УДК 517.9

О ВЕТВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА И УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

Т. И. Костина, Ю. И. Сапронов

Воронежский государственный университет;
Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 06.02.2017 г.

Аннотация. В статье рассмотрены с единой позиции две известные задачи: о периодических колебаниях маятника и о колебаниях спутника на эллиптической орбите (в модели Белецкого). Общей частью представленного подхода к изучению уравнений является применение процедуры нелокальной конечномерной редукции Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта, заключенной в (конструктивном) переходе от исходных уравнений к (эквивалентным) задачам анализа ключевых функции трех переменных — к вычислению критических точек функций, описанию их характера, к изображению поверхностей уровней и пр. Применение метода ключевой функции позволило использовать новые аналитические и вычислительные приемы при построении и анализе периодических решений уравнений, что дало в итоге и новый взгляд на поведение периодических решений в зависимости от изменения «управляющих» параметров.

Описан также алгоритм, позволяющий вычислять приближения к ключевой функций, к ее критическим точкам и, следовательно, к соответствующим периодическим решениям исходных уравнений. Получены графические изображения вторично редуцированных (в силу круговой симметрии) ключевых функций, демонстрирующие тенденции изменения амплитуд колебаний при подходе параметров к критическим и резонансным значениям.

Ключевые слова: периодические колебания маятника, уравнение Белецкого, функционал энергии, метод Ляпунова-Шмидта, моды колебаний, ключевая функция, критическая точка, нелокальные ветви периодических колебаний.

ABOUT BRANCHING OF PERIODIC SOLUTIONS OF THE EQUATION OF FLUCTUATION PENDULUM AND BELETSKII EQUATION

T. I. Kostina, Yu. I. Sapronov

Abstract. In article two known tasks are considered from a uniform line item: about periodic oscillations of a pendulum and about oscillations of the satellite in an elliptic orbit (in Beletsky's model). A common part of the provided approach to a study of the equations is application of the procedure of a nonlocal finite-dimensional reduction of Poincare-Lyapunov-Schmidt imprisoned in (constructive) transition from input equations to (equivalent) tasks of the analysis of key three variables of function—to computation of critical points of functions, the description of their character, to the image of surfaces of levels and other. Application of a method of key function allowed to use new analytical and computing receptions in case of creation and the analysis of periodic solutions of the equations that gave as a result and a new view on behavior of periodic decisions depending on change of the "controlling" parameters.

Also the algorithm allowing to calculate approaches to key functions to her critical points and, therefore, to relevant periodic decisions of input equations is described. Graphics images for the second time reduced (owing to circle symmetry) key functions, the showing tendencies of change of vibration amplitudes are received when approaching parameters to critical and resonant values.

Keywords: periodic fluctuations of a pendulum, Beletskii equation, functionality of energy, Lyapunov-Schmidt's method, fashion of fluctuations, key function, critical point, not local branches of periodic fluctuations.

В статье рассмотрена процедура нелокальной конечномерной редукции, примененная к задачам о периодических колебаниях маятника и периодических колебаниях спутника на эллиптической орбите, описываемых уравнением Белецкого [1]. Эта процедура представляет собой переход от исходного модельного уравнения к (эквивалентной) задаче анализа ключевой функции, заданной на конечномерном пространстве ключевых переменных. Такой переход носит название «нелокальная версия метода Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта» [2]. Использование ключевой функции позволяет применять новые аналитические и вычислительные технологии в построении и анализе свойств периодических решений уравнений, а также пролить новый свет на поведение решений при подходе параметров к критическим и резонансным значениям.

Основные цели, преследуемые авторами статьи, следующие: 1) определение количества решений, 2) определение топологических типов решений (индексов Морса соответствующих им критических точек функционала энергии) и 3) поведение решений при подходе параметров к критическим и резонансным значениям. Предполагается, что спектральный параметр не превышает второго критического значения. Численно-аналитическая процедура, предложенная в данной работе, ранее была апробирована в задачах о прогибах упругих систем и о фазовых переходов в кристаллах [2],[3].

1. НЕЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Колебания «загруженного математического маятника» (в дальнейшем «маятника») описываются, как известно (см. [4]), уравнением

$$f(\varphi) := \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \lambda\,\sin(\varphi) = q\,, \tag{1}$$

где t — *время*, $\varphi = \varphi(t)$ — *угол отклонения* маятника от положения равновесия, λ — параметр нагрузки, $q = q(s)$ — *функция внешнего колебательного воздействия*. Будем рассматривать это уравнение при периодических краевых условиях с фиксированным периодом $2\,\pi$:

$$\varphi(t + 2\,\pi) = \varphi(t)\,. \tag{2}$$

Заметим, что колебания с периодом, отличным от $2\,\pi$, также «охватываются» задачей (1)-(2) посредством масштабирующих преобразований вида $\varphi \longmapsto \alpha\,\varphi$, $t \longmapsto \beta\,t$, $\lambda \longmapsto \gamma\,\lambda$.

Задача (1)–(2) определяет также экстремали *функционала энергии*

$$V(\varphi, \lambda, q) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\,\pi}\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \lambda(\cos\varphi - 1) + q\varphi\right)\,ds\,. \tag{3}$$

С целью упрощения дальнейших вычислений, положим $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2$, то есть заменим уравнение (1) на уравнение

$$f(\varphi) := \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \lambda\sin(\varphi) = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2\,, \tag{4}$$

где

$$e_0 = 1\,, \qquad e_1 = \sqrt{2}\sin(s)\,, \qquad e_2 = \sqrt{2}\sin(2s)$$

— первыве три моды колебаний, отвечающие трем критическим значениям параметра λ: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (с фиксированным периодом $2\,\pi$). *Модами колебаний* называются *собственные функции* оператора $A := -\frac{d^2}{ds^2}$, то есть такие 2π-периодические функции, для которых выполняется равенство

$$A(\psi) = \lambda\,\psi\,, \tag{5}$$

с некоторым λ. Или, что эквивалентно, функция ψ должна быть решением линейного уравнения

$$\ddot{\psi} + \lambda\,\psi = 0\,. \tag{6}$$

Соответствующее значение λ, при котором выполняется равенство (5) (или (6)) для заданной моды ψ, называется *собственным значением*, отвечающим собственной функции ψ или *критическим значением* параметра λ, соответствующим моде ψ . Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что множество всех решений уравнения (6) (с периодом $2\,\pi$) исчерпывается следующим набором функций и отвечающих им собственных значений

$$e_0 = 1\,,\ \ e_{2k-1} = \sqrt{2}\,sin(k\,t)\,,\ e_{2k} = \sqrt{2}\,cos(k\,t)\,,\ \lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = k^2\,,\ k = 1{,}2,\ldots\,. \tag{7}$$

Нормирующий множитель $\sqrt{2}$ выбран из-за удобств вычислительного характера, связанных с тем, что система функций (7) образует ортонормированный базис в $L_2[0{,}2\,\pi]$.

При изучении и построении функций φ, моделирующих колебания маятника (по предлагаемой ниже методике), используется тройка непрерывно вложенных пространств $E\subset F\subset H$, в которой

$$E = \{\varphi\in C^2(\mathbb{R})\,:\ \varphi(t+2\,\pi)\equiv\varphi(t)\}\,, \qquad (8),$$

$$F = \{\varphi\in C(\mathbb{R})\,:\ \varphi(t+2\,\pi)\equiv\varphi(t)\}\,, \qquad H = L_2[0{,}2\,\pi]\,.$$

В H определено стандартное скалярное произведение: $\langle v{,}w\rangle := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} vw\,ds\,.$

При $\lambda < (2n)^2$ в качестве редуцирующей системы ключевых параметров можно взять совокупность коэффициентов Фурье $p_j(w) = \langle e_j{,}w\rangle$, $j = 0{,}1,\ldots,2(n-1)$ (в рамках вариационной редуцирующей схемы Ляпунова-Шмидта [2],[3]).

Если записать левую часть исходного уравнения (1) в операторном виде

$$f(w) = q\,, \qquad w\in E := C^2(\mathbb{R})\cap\{w(t+2\,\pi)\equiv w(t)\}\,,$$

то задачу (1)-(2) можно представить в виде системы двух операторных уравнений (при $n = 2$)

$$\left.\begin{array}{l} A_1\,(u) - \lambda P^3\,(\sin(u+v)) + q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 = 0\,, \\ A_2(v) - \lambda P^{\,\infty-3}\,(\sin(u+v)) = 0, \end{array}\right\} \tag{9}$$

где P^3, $P^{\,\infty-3}$ — пара ортопроекторов (в метрике H) на $E^3 := Lin(e_0{,}e_1{,}e_2)$ и $E^{\,\infty-3} := E\cap\left(E^3\right)^{\perp}$, $A_1 = A|_{E^3}$, $A_2 = A|_{E^{\,\infty-3}}$ — соответствующие сужения оператора A, $u = u(\xi) := \xi_0\,e_0 + \xi_1\,e_1 + \xi_2\,e_2\in E^3$, $v\in E^{\,\infty-3}$.

Для второго уравнения последней системы имеет место однозначная разрешимость по v при каждом $u\in E^3$ — вследствие выпуклости функционала энергии на подпространстве $E^{\infty-3}$ (при условии $\lambda < 4$) . После построения (приближенного) аналитического выражения для решения второго уравнения системы (9) в виде отображения $v = \Phi(\xi)$ получим приближенное выражение так называемой *глобальной ключевой функции* в виде

$$W(\xi) = V\,(u(\xi) + \Phi(\xi))\ . \tag{10}$$

Построение приближенного аналитического представления отображения $v = \Phi(\xi)$ можно осуществить, например, на основе принципа сжимающих отображений. Для этого достаточно записать вместо второго уравнения системы (9) эквивалентное ему уравнение

$$y = g(\xi,y,\lambda)\,, \qquad g(\xi,y,\lambda) := \lambda\, P^{\,\infty-3}\left(\sin\left(u(\xi) + \mathfrak{G}(y)\right)\right) = 0, \tag{11}$$

рассмотренное в подпространстве $\mathfrak{L} := N^{\perp}$ пространства H. Здесь $\mathfrak{G} := (A_2)^{-1}$ — оператор Грина для краевой задачи $\ddot{y} + v = 0,\ y(0) = y(1) = 0,$ суженный на подпространство $\mathfrak{L}$.

Теорема 1. *При $\lambda < 4$ отображение $g(\xi,\cdot,\lambda) : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ является сжимающим (с константой сжатия, не зависящей от ξ,y).*

Доказательство с очевидностью вытекает из следующих известных неравенств:

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leqslant |a - b|,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \dot{w}^{\,2} ds \geqslant 4 \int\limits_0^{2\pi} w^2 ds \qquad \forall w \in \mathfrak{L}$$

— обобщенное неравенство Пуанкаре-Виртингера.

Как и в случае ритцевской аппроксимации, ключевая функция и ее приближения линейно зависят от параметров q_0,q_1,q_2. Следовательно, эти параметры не входят в уравнение параболического множества $\mathfrak{P}$ — множества точек, в которых вырождается второй дифференциал. Построенное таким образом параболическое множество для приближенной ключевой функции преобразуется затем в пространство параметров q_0,q_1,q_2 посредством градиентного отображения, что в итоге дает приближенное изображение каустики [2], [3]. Сходимость итерационного процесса, основанного на формуле (11), является C^r-равномерной по параметрам для любого заранее заданного $r > 0$ (сходимость осуществляется вместе с производными до порядка r). Если выбрать область определения, на которой функционал V трансверсален всем своим особенностям, то C^r-равномерная сходимость обеспечит «топологическую стабилизацию» приближенных изображений каустики.

Построение и анализ «колебательной функции» $\varphi(t)$ маятника можно осуществлять, с достаточно хорошей точностью, посредством анализа ключевой функции $W(\xi)$. Каждой критической точке $\overline{\xi}$ функции $W(\xi)$ соответствует (с сохранением индекса Морса) колебательной функция $u(\overline{\xi}) + \Phi(\overline{\xi})$ для маятника.

Изложенная исследовательская схема допускает применение (с некоторыми модификациями и уточнениями) к аналогичным задачам для эйлерова стержня, пространственного стержня Кирхгофа, а также для упругих балок и пластин в нелинейной модели Фусса-Винклера-Циммермана.

Замечание 1. При компьютерной реализации описанной выше схемы вычисления и анализа возникает существенное техническое препятствие, связанное с вхождением в формулы итераций выражений вида $\sin\left(\mathfrak{G}(y) + v\right)$, где v — построенный на предыдущем шаге отрезок разложения Фурье для приближения к решению второго уравнения системы (9). Наличие в этой формуле функции sin приводит к значительному росту сопровождающей вычисления информации, существенно повышающему требования к скорости и оперативной памяти компьютера. Ситуацию можно смягчить за счет предварительного «огрубления» функции $\sin(\varphi)$ посредством ее замены отрезком ряда Тейлора: $\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \frac{\varphi^7}{5040} + \ \ldots\ .$

Замечание 2. Вследствие круговой симметрии, возникающей из-за того, что функционал действия инвариантен относительно трансляции (сдвига) функции φ по аргументу: $g(t) \longrightarrow g(t+s)$, получим (при $\varepsilon = 0$ и $q = 0$) ключевую функцию в виде

$$W(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \widehat{W}(\xi_0,r^2), \quad r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

2. ПОСТРОЕНИЕ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ КРАТЧАЙШЕГО СПУСКА

При построении нелокальной ключевой функции можно также воспользоваться прямой процедурой кратчайшего спуска (см. [5]–[10]) в точку минимума функционала $V(u+v)$ по аргументу v. Вычисления можно проводить на основе комбинации редуцирующего перехода Ляпунова-Шмидта и ритцевской аппроксимации функционала V по заранее заданному набору достаточно большого количества мод. Первым шагом этой процедуры является выбор сдвига вдоль градиента из начальной (порождающей) точки, с целью уменьшения значения функционала энергии.

Пусть $e_0, e_1, \dots, e_m$ — фиксированный базис ритцевской аппроксимации (базис Ритца), $m = 2n$, и пусть e_0, e_1, e_2 — основные моды, по которым допускается вырождение. Пусть при этом $V_R(\xi) := V\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \xi_k\, e_k\right)$ — ритцевская аппроксимация функционала энергии (по базису Ритца). В качестве нулевого приближения к функции

$$W(\widehat{\xi}) := \inf_{\langle w,e_j\rangle=\xi_j,,\, j=0,1,2} \overline{V_R}(w)\,, \quad \widehat{\xi} = (\xi_0,\xi_1,\xi_2)\,,$$

рассмотрим функцию

$$W_0(\widehat{\xi}) := V(\xi_0\, e_0 + \xi_1\, e_1 + \xi_2\, e_2)$$

(ритцевскую аппроксимацию по модам e_0,e_1,e_2).

Первый шаг заключен в выборе «поправки» к W_0, дающей первое приближение к $W(\widehat{\xi})$ в виде

$$W_1(\widehat{\xi}) := V_R(a(\widehat{\xi}))\,,$$

где

$$a(\widehat{\xi})) = a_0 - s_o\, g_0\,, \quad a_0 = (\xi_0,\xi_1,\xi_2, 0, \dots, 0)\,, \quad g_0 := \operatorname{grad}_{\xi_3,\dots,\xi_m} V_R(a_0)\,,$$

$$s_0 = \frac{\|g_0\|^2}{\langle G_0\, g_0, g_0\rangle}\,,$$

где $G_0 = \operatorname{Hess}_{\xi_3,\dots,\xi_m}(V_R)(a_0)$ — матрица Гессе (в нулевой порождающей точке a_0) функции V_R по переменным $\xi_3, \dots, \xi_m$.

Второй шаг — повторение первого шага для новой порождающей точки a_1 и т. д. (см. [6], [7]). На шаге с номером k делается выбор функциональной величины сдвига $s_k = s_k(\widehat{\xi})$ вдоль антиградиента посредством формулы

$$s_k = \frac{\|g_k\|^2}{\langle G_k\, g_k, g_k\rangle}\,, \tag{12}$$

где $G_k = \operatorname{hess}_{\xi_3,\dots,\xi_m} V_R(a_0)$ — матрица Гессе (в точке a_k) функции V_R по переменным $\xi_3, \dots, \xi_m$.

Выбор функциональной величины $s_k = s_k(\widehat{\xi})$ (сдвига вдоль антиградиента) в виде (12) приводит к большому росту информационного потока и к существенному замедлению работы алгоритма. Это препятствие значительной мере преодолевается заменой функционального множителя числовым множителем σ, служащим оценкой снизу допустимых функциональных множителей вида (12). Подбор такого ограничителя снизу можно осуществить, используя следущюие легко проверяемые неравенства (для произвольной симметричной матрицы $G = (g_{j,k})$):

$$\|G\|_1 \leqslant \|G\|_2 \leqslant \|G\|_3\,,$$

где

$$\|G\|_1 := max\{\mu : \ \mu \in \mathrm{spec}(G)\}\,, \quad \|G\|_2 := \sqrt{\mathrm{tr}\ (G^\top G)}\,, \quad \|G\|_3 := \sum_{j,k} |g_{j,k}|\,.$$

3. АНАЛИЗ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВЕТВЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

Периодические колебания спутника вблизи эллиптической орбиты в модели Белецкого можно изучать на основе нелокальной вариационной версии метода Ляпунова-Шмидта. Уравнение колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты (уравнение Белецкого), выведенное В. В. Белецким в 1956 г. и опубликованное в 1959 г. [1], имеет следующий вид:

$$(1+e\cos(\nu))\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin(\nu)\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin(\delta) - 4e\sin(\nu) = 0. \qquad (13)$$

Здесь e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника, δ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника, ν — угловая (полярная) координата центра масс спутника. С тех пор это уравнение изучалось многими исследователями на основе различных подходов. Метод Ляпунова-Шмидта также использовался при изучении этого уравнения [11], но лишь в случае одного локального ключевого параметра (локальной одномерной редукции) и без использования вариационного происхождения уравнения.

После умножения уравнения (13) на $(1+e\cos(\nu))$ получим уравнение, являющееся уравнением Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала

$$V(q) = \int\limits_0^{2\pi} L(\dot{q},q)dt, \qquad (14)$$

с лагранжианом $L(\dot{q},q)$:

$$\frac{\dot{q}^2}{2}(1+e\cos(\nu))^2 + (1+e\cos(\nu))4eq\sin(\nu) + (1+e\cos(\nu))\mu\cos(q)$$

(соответствующая теорема доказана в [12],[13]).

Если в уравнении (13) положить $e=0$, то получим уравнение колебаний маятника (без внешнего воздействия) $\ddot{\nu} + \mu\sin(\nu) = 0$, которое изучал А. Ю. Борзаков [14], [15] (на основе нелокальной вариационной версии Ляпунова-Шмидта) в случае неоднородного уравнения и при наличии двух нелокальных ключевых параметров. Аналогичное исследование можно провести и при $e \neq 0$.

Заменив в уравнении (14) q на x, ν на t, e на ε, получим следующий вид функционала действия уравнения Белецкого:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left((1+\varepsilon\cos(t))^2\ \frac{\dot{x}^2}{2} + (1+\varepsilon\cos(t))(\mu\cos(x) + 4\varepsilon x\sin(t))\right)dt. \qquad (15)$$

Хотя случай $\mu < 0$ считается не имеющим физический смысл [2], но он представляет математический интерес, так как позволяет рассматривать состояние равновесия при малых $\mu > 0$, как результат бифуркации из устойчивого нулевого равновесия (при переходе μ через ноль). В этой связи представляет интерес следующее утверждение.

Теорема 2. *В случае* $0 \leqslant \varepsilon < 1$ *и* $\mu < 0$ *функционал (15) является выпуклым. При этом его градиент является коэрцитивным (и, следовательно, собственным) отображением.*

Следующее утверждение дает основу для применения метода Ляпунова-Шмидта.

Теорема 3. *В случае* $0 \leqslant \varepsilon < 1$ *и* $\mu < 4\,(1-\varepsilon)$ *функционал действия (15) является выпуклым на* $E^{\infty-3} := E \cap N^{\perp}$, $N = Lin(e_0,e_1,e_2)$, *и его условный градиент по подпространству* $E^{\infty-3}$ *является собственным (как отображение из* $E^{\infty-3}$ *в* $F^{\infty-3} := F \cap N^{\perp}$*).*

Доказательства теорем 2, 3 основаны (см. [12]) на представлении функционала действия V_ε в виде суммы двух функционалов $V_\varepsilon^{(1)}$ и $V_\varepsilon^{(2)}$, где

$$V_\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{(1+\varepsilon\cos(t))^2\,\dot{x}^2}{2} - \mu\frac{(1+\varepsilon\cos(t))\,x^2}{2}\right)dt\,,$$

$$V_\varepsilon^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\mu\,(1+\varepsilon\cos(t))\left(\frac{x^2}{2}+\cos(x)\right) + 4\varepsilon x\sin(t)(1+\varepsilon\cos(t))\right)dt.$$

Пусть $\theta = 1-\varepsilon$, $\theta \geqslant 0$, получим $1+\varepsilon\cos(t) \geqslant \theta$ и, следовательно,

$$(1+\varepsilon\cos(t))\left(\frac{x^2}{2}+\cos(x)\right) \geqslant \theta\,\left(\frac{x^2}{2}+\cos(x)\right).$$

Из этого вытекает выпуклость $V_\varepsilon^{(2)}$ на E вследствие выпуклости функции $\frac{x^2}{2}+\cos(x)$). Выпуклость функционала $V_\varepsilon^{(1)}$ на $E^{\infty-3}$ вытекает из соотношений

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{(1+\varepsilon\cos(t))^2\,\dot{x}^2}{2} - \mu\,\frac{(1+\varepsilon\cos(t))\,x^2}{2}\right)dt\; =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1+\varepsilon\cos(t))^2\left(\dot{x}^2 - \frac{\mu}{(1+\varepsilon\cos(t))}\,x^2\right)dt \;\;\geqslant\;\; \frac{\theta^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\dot{x}^2 - \frac{\mu}{1-\varepsilon}\,x^2\right)dt\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\dot{x}^2 \;\geqslant 4\,\pi^2\int\limits_0^{2\pi}x^2\,dt \qquad \forall x \in E^{\infty-3}.$$

Из этих неравенств получаем достаточное условие выпуклости в виде соотношения $\frac{\mu}{1-\varepsilon} < 4$ или, окончательно, в виде

$$\mu < 4\,(1-\varepsilon)\,.$$

Коэрцитивность и собственность градиентного отображения следует из того, что градиент функционала V_ε предсталяет собой сумму линейного обратимого и ограниченного вполне непрерывного операторов. Ограниченность градиента вызвана вхождением в уравнение «нелинейностей», заданных ограниченными тригонометрическими функциями (информация об условиях собственности отображений банаховых пространств имеется в в [2]).

Из сформулированных теорем следует существование гладкого отображения $\Phi(\xi)$, для которого $V(u(\xi)+\Phi(\xi)) = \inf\limits_{v\in N^{\perp}} V(u+v)$. Теоремы 2, 3 дают теоретическое обоснование представимости ключевой функции в виде обобщенной (нелинейной) ритцевской аппроксимации по первым трем модам:

$$W(\xi) = V(u(\xi)+\Phi(\xi)), \quad u(\xi) := \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2.$$

Предложенная ниже вычислительная схема в построении приближений $\Phi_k(\xi)$ к функции $\Phi(\xi)$ также основана на методе кратчайшего (градиентного) спуска. Последовательность приближений $\Phi_k(\xi)$ приводит к последовательности приближений ключевой функции

$$W_{(k)}(\xi) = V(u(\xi) + \Phi_k(\xi)).$$

Как и в случае маятника можно воспользоваться модами колебаний:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \sqrt{2}cos(t); \quad e_2 = \sqrt{2}sin(t), \quad e_3 = \sqrt{2}cos(2t), \quad e_4 = \sqrt{2}sin(2t)\ldots.$$

При

$$x = \sum_{k=0}^{2n} \xi_k e_k,$$

получаем систему уравнений

$$\left\langle f\left(\sum_{k=0}^{2n} \xi_k e_k\right), e_j \right\rangle = 0,$$

где f — левая часть уравнения Белецкого. В итоге применения данной вычислительной схемы получим сходящийся итерационный процесс, позволяющий осуществить построение ключевой функции с любой точностью.

После получения приближенной ключевой функции можно осуществить построение соответствующего приближенного дискриминантного множества (*каустики*) — множества значений параметров (q_0,q_1,q_2), при которых существуют вырожденные критические точки. Каустика определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \text{grad}\,(W_k)(\xi,\lambda,q) = 0\,, \quad \xi = (\xi_0,\xi_1,\xi_2)^\top\,, \\ \text{hessian}\,(W_k)(\xi,\lambda,q) = 0\,, \end{cases}$$

$\text{hessian}\,(W_k) := \det(\text{Hess}\,(W_k))\,, \quad W_k(\xi,\lambda,q)) = V\,(u(\xi) + \Phi_k(\xi)) + q_0\xi_0 + q_1\xi_1 + q_2\xi_2\,.$ Получив информацию о геометрическом строении каустики, можно приступить к изучению bif-раскладов экстремалей, соответствующих ячейкам регулярности (компонентам связности дополнения к каустике) в области изменения параметров. Каждой ветви $\xi(\lambda, q)$, $q = (q_0, q_1, q_2)^\top$, приближенно вычисленных критических точек ключевой функции $(W_k)(\xi,\lambda,q)$, соответствует ветвь приближенных периодических решений

$$x(\lambda, q) = u(\xi(\lambda, q)) + \Phi_k(\xi(\lambda, q))$$

уравнения Белецкого.

4. ФРЕДГОЛЬМОВЫ ФУНКЦИОНАЛЫ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ С ОБОБЩЕННОЙ КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Анализ бифуркаций периодических решений напрямую связан с анализом критических орбит фредгольмовых функционалов, обладающих круговой симметрией [2].

Пусть $V : E \to \mathbb{R}$ — фредгольмов функционал с градиентом в тройке $\{E,F,H\}$ и пусть задано представление T группы $SO(2)$ в группу $O(H)$ ортогональных операторов $H \to H$, что $T_g(E) \subset E$, $T_g(F) \subset F$, $\forall g \in SO(2)$, и функционал V инвариантен относительно действия $SO(2)$ на E (обладает *круговой симметрией*):

$$V(T_g x) = V(x) \qquad \forall\, x \in E, \quad g \in SO(2).$$

Предположим также, что задано эквивариантное редуцирующее отображение $p : E \to \mathbb{R}^m$, $p(T_g(x)) = T_g(p(x))$ $\forall\, x \in E$, $g \in SO(2)$ (действие $SO(2)$ на $\mathbb{R}^m$ обозначено тем же символом T). Будем также предполагать выполнение условия слабой гладкости действия G и условие отсутствия ненулевых неподвижных точек. Пространство N мод бифуркации в этом случае имеет четную размерность и разбивается в прямую сумму двумерных подпространств:

$$N = N^1 \dot{+} N^2 \dot{+} \ldots \dot{+} N^n\,,$$

инвариантных относительно заданного действия окружности и таких, что сужения действия $SO(2)$ на каждое из этих подпространств является неприводимым. Если отождествить каждое подпространство N^k с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, то индуцированное действие окружности на N^k сведется к стандартному действию окружности на комплексной плоскости кратности p_k:

$$\{\varphi, z\} \mapsto e^{ip_k\varphi}\, z\,.$$

Локальная алгебраическая структура ключевой функции, отвечающей данному функционалу, зависит от набора кратностей $\{p_k\}$ или, более точно, от резонансов. Под резонансами подразумеваются такие нетривиальные наборы целых чисел $m_1, m_2, \ldots\, m_n$, для которых выполняются (резонансные) соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} m_k p_k = 0.$$

Ясно, что множество $\mathcal{R}$ всех резонансов является подгруппой целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$. Произвольный базис подгруппы $\mathcal{R}$ называется базисным набором резонансов. В частности, если $n = 2$, то базисный набор составляет единственная пара $\{m_1,m_2\}$.

Заметим, что имеется прямая аналогия рассмотренных здесь резонансов с резонансами в теории зарождения циклов динамических систем из сложного фокуса. Так же, как и в теории динамических систем, наиболее сложными для изучения являются случаи резонансов с порядками, не превышающими четырех:

$$|m| \;:=\; \sum_{k=1}^{q} |m_k| \;\leqslant\; 4$$

(сильные резонансы).

Пусть, далее, $V(x,\lambda)$ — фредгольмов функционал с градиентом в тройке $\{E,F,H\}$, гладко зависящий от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^l$, и пусть задано такое представление T группы $G := SO(2)$ в группу $O(H)$ ортогональных операторов $H \to H$ вместе с представлением R группы G в группу $O(\mathbb{R}^l)$, что $T_g(E) \subset E$, $T_g(F) \subset F$, $\forall g \in G$, и функционал V инвариантен относительно действия G на E (то есть обладает *обобщенной круговой симметрией*): $V(T_g x, R_g\lambda) = V(x,\lambda)$ $\quad \forall\, x \in E\,, \lambda \in \mathbb{R}^l\,,\;\; g \in G$. Имеет место следующее утверждение (см. [12]): *пусть выполнено условие слабой гладкости действия G и пусть задана G-эквивариантная редуцирующая субмерсию $p : E \to \mathbb{R}^m$ для гладкого семейства обобщенно G-инвариантных гладких фредгольмовых функционалов $V(x,\lambda)$, пусть при этом φ — редуцирующее (маргинальное) отображение. Тогда индуцированное действие G на подмногообразии $\mathcal{N} := \varphi(\mathbb{R}^m)$ автоматически является гладким, а соответствующая ключевая функция наследует обобщенную симметрию.*

Приведем пример функции на $\mathbb{R}^3$ с обобщенной круговой симметрией:

$$W(\xi,\varepsilon,\delta) = W(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\delta,\varepsilon_1,\varepsilon_2) =$$

$$= \xi_0^4 + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^2 + a\,\xi_0^2\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) - \delta\left(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2\right) + \varepsilon_1\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2.$$

Очевидно, что $W(T_\varphi \xi, T_\varphi \varepsilon, \delta) = W(\xi, \varepsilon, \delta) \quad \forall \delta\, \varphi\,, \varepsilon$, где

$$T_\varphi \xi = (\xi_0,\, \cos(\varphi)\, \xi_1 - \sin(\varphi)\, \xi_2,\, \sin(\varphi)\, \xi_1 + \cos(\varphi)\, \xi_2)^\top ,$$

$$T_\varphi \varepsilon = (\cos(\varphi)\, \varepsilon_1 - \sin(\varphi)\, \varepsilon_2,\, \sin(\varphi)\, \varepsilon_1 + \cos(\varphi)\, \varepsilon_2)^\top .$$

Достаточно полное представление о поведении этой функции можно получить, рассмотрев ее двумерное сечение $\overline{W}(\xi_1, \xi_2, \delta, \varepsilon) := W(\xi_0, \xi_1, 0, \delta, \varepsilon, 0,)$ (положив $\xi_2 = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = 0$). На рисунке 1 приведены изображения линий уровней этой функции.

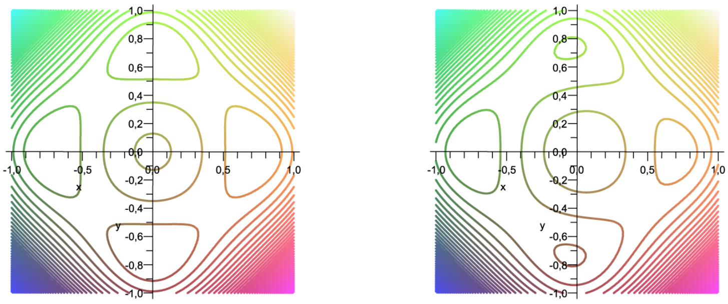

Рис. 1. *Семейство линий уровней двумерного сечения* $\overline{W}(\xi_1, \xi_2, \delta, \varepsilon)$ *при* $a = 4,\ \delta = 0.9,\ \varepsilon = 0$ *(рисунок слева) и* $a = 4,\ \delta = 0.9,\ \varepsilon = 0.1$.

В следующем разделе рассмотрены линии уровней сечения аналогичной функции, построенной в виде второго приближения к ключевой функции маятника.

5. ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ К КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ МАЯТНИКА

Ниже приведены графические изображения поверхностей уровня для второго приближения к ключевой функции маятника. Уровни соответствуют значениям, близким к значению в седловой точке. Очевидно, что внутри замкнутых компонент («овалоидов») имеются точки минимума, соответствующие некоторым равновесным режимам маятника.

Второе приближение к ключевой функции маятника задано нелинейной ритцевской аппроксимацией по первым трем модам. В результате был получен многочлен $W2$, который мы здесь не приводим вследствие его громоздкости. Программа его вычисления приведена ниже (в кодах Maple) для уравнения Белецкого (маятнику соответствует случай $\varepsilon = 0$).

Некоторые поверхности уровней многочлена $W2$ изображены ниже на рис. 2.

Рисунки подчеркивают обобщенную круговую симметрию рассмотренных уравнений. Положив $\xi_1 = r\, \cos(\psi)\,,\ \ \xi_2 = r\, \sin(\psi)\,,$ получим относительно более простой многочлен в виде

$$U(\xi_0, r, \psi) := P(\xi_0, r) + q\, cos(\psi)\, r\,, \tag{16}$$

где P равен аналогичному многочлену для уравнения Белецкого при $\varepsilon = 0$.

Анализ критических точек многочлена (16) упрощается, если перейти к редуцированной фунции двух переменных

$$U_0(\xi_0, r) := \operatorname*{extr}_{\psi} U(\xi_0, r, \psi) = P(\xi_0, r) + q\, r\ . \tag{17}$$

Рисунки показывают, что с увеличением амплитуды $|q|$ внешнего воздействия (при фиксированном значении параметра λ) начинается снижение величины амплитуды бифурцирующего колебания, соответствующего нижней седловой точке. При подходе параметра q к значению -0.011 седловая точка исчезает, слившись с точкой максимума.

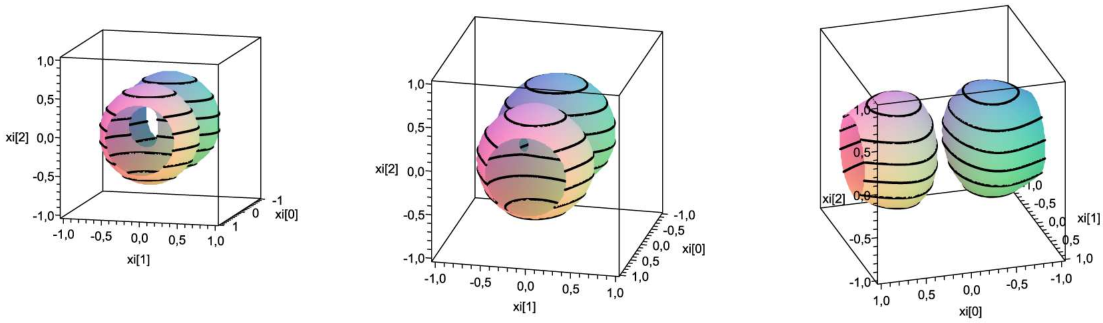

Рис. 2. *Поверхности уровней второго приближения к ключевой функции маятника (при* $\lambda = 1.01$, $q_0 = 0$, $q_1 = 0.001$, $q_2 = 0$, $W2 = -0.003$, 0.0038, 0.009 *).*

6. ПРИБЛИЖЕНИЯ К КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

Если в уравнении Белецкого сделать замену $\varepsilon \longmapsto \sqrt{2}\,\varepsilon$, то функционал (15) предстанет в виде

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left((1+\varepsilon\, e_1(t))^2\,\frac{\dot{x}^2}{2} + (1+\varepsilon\, e_1(t))(\mu\cos(x) + 4\varepsilon x e_2(t))\right)dt. \qquad (18)$$

При достаточно малых значениях параметра ε этот функционал можно записать в виде

$$V = \widetilde{V} + o(\|x\|^4) + O(\varepsilon)O(\|x\|^4) + o(\varepsilon) + const\,,$$

где

$$\widetilde{V} = V_4 + V_{2,1} + V_{2,2} + V_1\,,$$

$$V_4 = \frac{\mu}{48\,\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^4\,dt\,, \qquad V_{2,1} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1+2\varepsilon\, e_1)\,\dot{x}^2\,,$$

$$V_{2,2} = -\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1+\varepsilon\, e_1)\,x^2\,, \qquad V_1 = \frac{2\,\varepsilon}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\, e_2\,dt\,.$$

Ниже приведена программа вычисления второго приближения редуцированной ключевой функции для уравнения Белецкого (в кодах Maple) и приведены компьютерные изображения семейств линий уровней редуцированных приближений при трех различных значениях параметра ε:

$$e_0 := 1; e_1 := \sqrt{2}\cdot\cos(t); e_2 := \sqrt{2}\cdot\sin(t);$$

$$e_3 := \sqrt{2}\cdot\cos(2t); e_4 := \sqrt{2}\cdot\sin(2t);$$

$$e_5 := \sqrt{2}\cdot\cos(3t); e_6 := \sqrt{2}\cdot\sin(3t);$$

$$e_7 := \sqrt{2}\cdot\cos(4t); e_8 := \sqrt{2}\cdot\sin(4t);$$

$$Digits := 4; S_1 := sum(\xi_k\cdot e_k, k = 0..8); S_2 := S_1^2; \varepsilon := 0.1; \mu := 1.15;$$

$$S_4 := S_2^2; V4 := \mu\cdot(int(S_4, t = 0..2\cdot\pi))/(48\cdot\pi); v := diff(S_1, t); w := v^2;$$

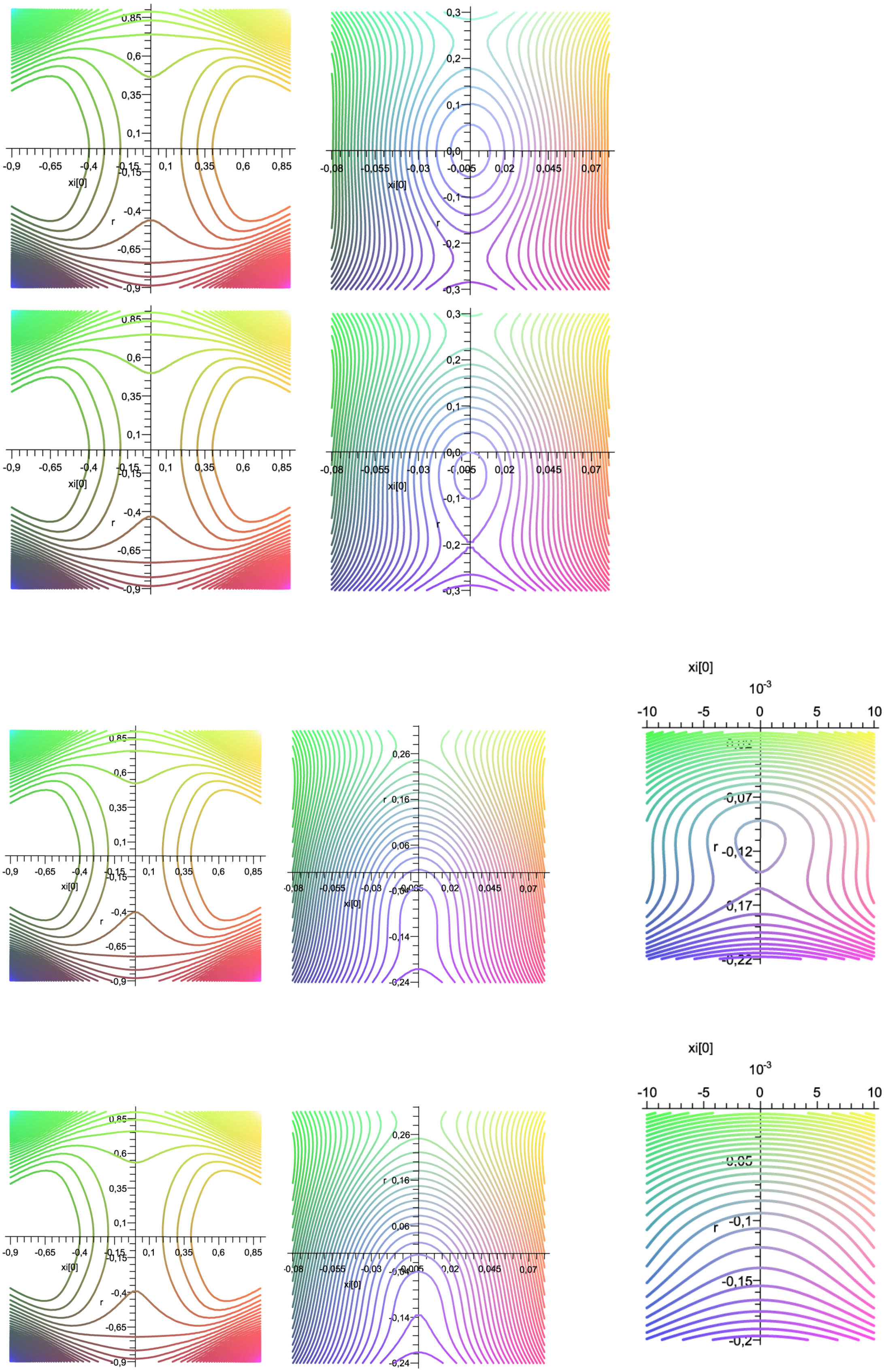

Рис. 3. *Семейства линий уровней второго приближения к редуцированной ключевой функции маятника при* $\lambda = 1.14$, $q_0 = 0$; $q = 0$ *(верхний ряд двух изображений);* $q = -0.005$, $q = -0.009$ *и* $q = -0.011$.

$$V21 := (int((1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot e_1) \cdot w, t = 0..2 \cdot \pi))/(4 \cdot \pi);$$

$$V22 := -\mu \cdot (int((1 + \varepsilon \cdot e_1) \cdot S_2, t = 0..2 \cdot \pi))/(4 \cdot \pi); V1 := 2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_2/\pi; \sigma := 0.5; \delta_0 := -\mu;$$

$$\delta_1 := 1 - \mu; \delta_2 := 1 - \mu; \delta_3 := 4 - \mu; \delta_4 := 4 - \mu;$$

$$\delta_5 := 9 - \mu; \delta_6 := 9 - \mu; \delta_7 := 16 - \mu; \delta_8 := 16 - \mu;$$

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8);$$

$$WR := V4 + V21 + V22 + V1;$$

$$g_1 := diff(WR, \xi_0); g_2 := diff(WR, \xi_1); g_3 := diff(WR, \xi_2);$$

$$g_4 := diff(WR, \xi_3); g_5 := diff(WR, \xi_4); g_6 := diff(WR, \xi_5);$$

$$g_7 := diff(WR, \xi_6); g_8 := diff(WR, \xi_7); g_9 := diff(WR, \xi_8);$$

$$g := (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9);$$

$$a1 := (\xi_0, \xi_1, \xi_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$g1 := subs(\xi_0 = a1_1, \xi_1 = a1_2, \xi_2 = a1_3, \xi_3 = a1_4, \xi_4 = a1_5,$$

$$\xi_5 = a1_6, \xi_6 = a1_7, \xi_7 = a1_8, \xi_8 = a1_9, g);$$

$$W1 := subs(\xi_0 = a1_1, \xi_1 = a1_2, \xi_2 = a1_3, \xi_3 = a1_4, \xi_4 = a1_5,$$

$$\xi_5 = a1_6, \xi_6 = a1_7, \xi_7 = a1_8, \xi_8 = a1_9, WR);$$

$$a2 := a1 - \sigma \cdot g1;$$

$$W2 := combine(subs(\xi_0 = a2_1, \xi_1 = a2_2, \xi_2 = a2_3, \xi_3 = a2_4,$$

$$\xi_4 = a2_5, \xi_5 = a2_6, \xi_6 = a2_7, \xi_7 = a2_8, \xi_8 = a2_9, WR));$$

$$U2 := subs(\xi_1 = r \cdot \cos(\psi), \xi_2 = r \cdot \sin(\psi), W2);$$

$$Q := combine(eval(subs(\psi = 0, U2)));$$

На рисунках проявляется тенденция роста величин амплитуд бифурцирующих колебаний, соответствующих седловым точкам ключевой функции, при $\mu \to 1$. По-видимому, это связано с наличием резонанса [1] при $\mu = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий, В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / В. В. Белецкий. — М. : Наука, 1965. — 416 с.

2. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

3. Костин, Д. В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем: учебное пособие / Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов. — Воронеж : ИПЦ Воронежского государственного университета, 2012. — 207 с.

4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — М. : Наука, 1989. — 472 с.

5. Красноселький, М. А. Итерационный процесс с минимальными невязками / М. А. Красноселький, С. Г. Крейн // Матем. сборник. — 1952. — Т. 31 (73), вып. 2. — С. 315–334.

6. Сапронов, Ю. И. Моделирование диффузорных течений жидкости посредством редуцированных уравнений / Ю. И. Сапронов // Вестник ЮУрГУ. Сер: Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 74–86.

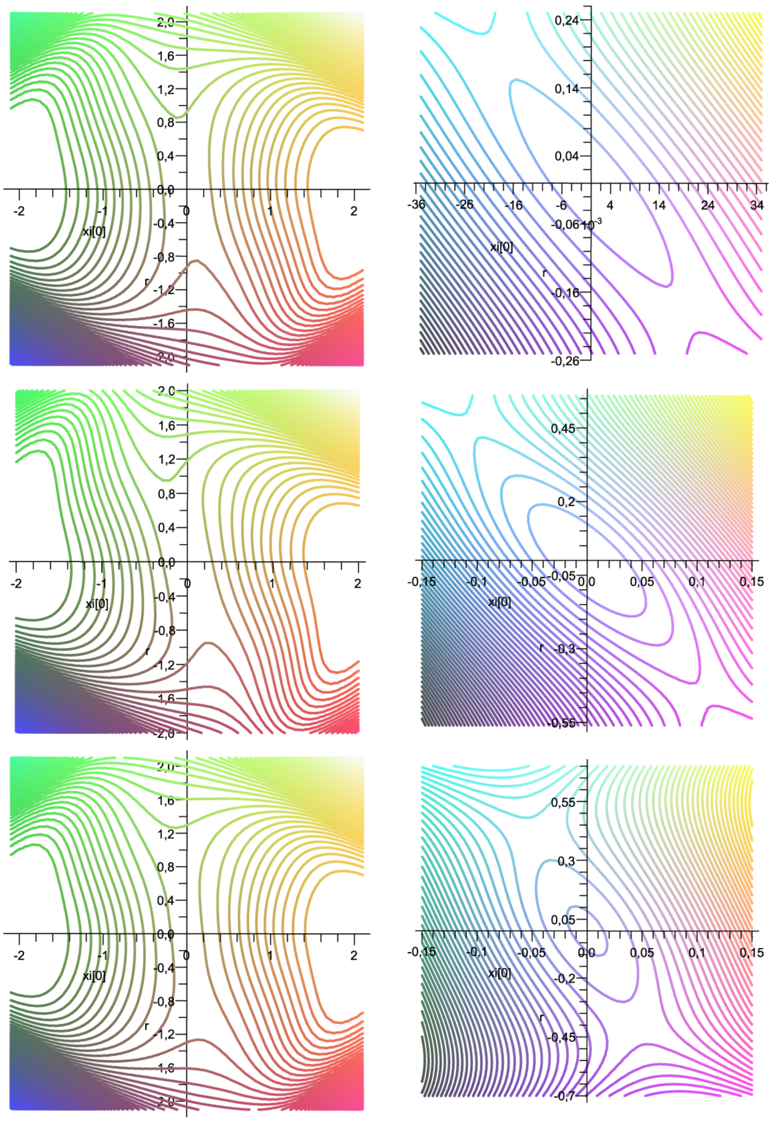

Рис. 4. *Семейства линий уровней второго приближения к редуцированной ключевой функции Q для уравнения Белецкого при* $\mu = 1.1\,,\ \varepsilon = 0.2\,;\ \ \mu = 1.05\,,\ \varepsilon = 0.1\,;\ \ \mu = 1.01\,,\ \varepsilon = 0.1\,.$

7. Конев, В. В. Обобщённое уравнение Джеффри-Гамеля в случае трёхмерного диффузора / В. В. Конев, Ю. И. Сапронов // Насосы. Турбины. Системы. — 2015. — № 2 (15). — С. 60–64.

8. Коротких, А. С. Стабильные концентрации, определяемые одномерным уравнением диффузии с кубической нелинейностью / А. С. Коротких // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 156–161.

9. Костина, Т. И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений / Т. И. Костина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 181–186.

10. Ковалева, М. И. Огибающие кривые, точки возврата и бифуркационный анализ нелинейных задач / М. И. Ковалева, Т. И. Костина, Ю. И. Сапронов. — Воронеж : ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. — 242 с.

11. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

12. Костина, Т. И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова-Шмидта / Т. И. Костина // Математические модели и операторные уравнения. — 2008. — Т. 5, вып. 1. — С. 98–104.

13. Костина, Т. И. Нелокальный анализ гладких вариационных задач с параметрами / Т. И. Костина. — Дисс.. . . к.ф.-м.н. Воронеж, 2011. — 122 с.

14. Борзаков, А. Ю. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей / А. Ю. Борзаков, А. А. Лемешко, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2003. — № 2. — С. 100–112.

15. Борзаков, А. Ю. Редукции в нелокальном анализе вариационных краевых задач и уравнение колебаний маятника / А. Ю. Борзаков // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. — 2005. — Вып. 1. — С. 34–44.

REFERENCES

1. Beletsky V.V. Motion of an artificial satellite about its center of mass. [Beletsky V.V. Dvizhenie isskustvennogo sputnika otnositelno centra mass]. Moscow: Nauka, 1965, 416 p.

2. Darinskii B.M., Sapronov Y.I., Tsarev S.L. Bifurcations of extremals Fredholm functional. [Darinskij B.M., Sapronov Yu.I., Carev S.L. Bifurkacii e'kstremalej fredgol'movyx funkcionalov]. *Modern mathematics. Fundamental directions — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

3. Kostin D.V., Sapronov Y.I. Functional analysis and multi- Deflections of Elastic Systems: Tutorial. [Kostin D.V., Sapronov Yu.I., Funkcional'nyj analiz i mnogomodovye progiby uprugix sistem: uchebnoe posobie]. Voronezh: Publishing and printing center of Voronezh State University, 2012, 207 p.

4. Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. [Arnold V.I. Matematicheskie metodi klassiceskoi mehaniki]. Moscow: Nauka, 1989, 472 p.

5. Krasnoselky M.A., Krein S.G. The iterative process minimal residuals. [Krasnosel'kij M.A., Krejn S.G. Iteracionnyj process s minimal'nymi nevyazkami]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1952, vol. 31 (73), iss. 2, pp. 315–334.

6. Sapronov Y.I. Simulation of fluid flows diffuser by the reduced equations. [Sapronov Yu.I. Modelirovanie diffuzornyx techenij zhidkosti posredstvom reducirovannyx uravnenij]. *Vestnik YuUrGU. Ser: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of South Ural State University. Ser: Mathematical modeling and programming*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 74–86.

7. Konev V.V., Sapronov Y.I. Generalized equation of Jeffrey-Hamel in the case of three-dimensional diffuser. [Konev V.V., Sapronov Y.I. Obobzinnoe uravnenie Djefri-Gamelia v sluchai trehmernogo difuzora]. *Nasosy. Turbiny. Sistemy — Pumps. Turbine. System*, 2015, no. 2 (15), pp. 60–64.

8. Korotkikh A.S. Stable concentration, determined by one-dimensional diffusion equation with cubic nonlinearity. [Korotkikh A.S. Stabilnie koncentracii opredeliaemie odnomernim uravneniem diffuzii c kubicheskoi nelineinosty]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 156–161.

9. Kostina T.I. Nonlocal calculation of the key functions in the problem about periodic solutions of variational equations. [Kostina T.I. Nelokal'noe vychislenie klyuchevyx funkcij v zadache o periodicheskix resheniyax variacionnyx uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 181–186.

10. Kovaleva M.I., Kostina T.I., Sapronov Y.I. Envelopes of curves, points of return and bifurcation analysis of nonlinear problems. [Kovaleva M.I., Kostina T.I., Sapronov Y.I. Ogibauzie krivie, toshki vozvrata i bifurkacionnii analis nelineinih zadash]. Voronezh: VUNTS VVS «VVA», 2015, 242 p.

11. Vainberg M.M., Trenogin B.A. The Theory of branching solutions of nonlinear equations. [Vainberg M.M., Trenogin B.A. Teoria vetvlenia reshenii nelineinih uravnenii]. Moscow: Science, 1969, 528 p.

12. Kostina T.I. Analysis of branching of periodic solutions to the Beletsky through a variational Lyapunov-Schmidt. [Kostina T.I. Analis vetvlenia periodicheskih rechenii uravnenia Beleckogo posredstvom varicionnogo metoda liapunova-Chmidta]. *Matematicheskie modeli i operatornye uravneniya — Mathematical models and operator equations*, 2008, vol. 5, iss. 1, pp. 98–104.

13. Kostina T.I. Nonlocal analysis of smooth variational problems with parameters. [Kostina T.I. Nelineinii analis gladkh zadach c parametrami]. PhD thesis. Voronezh, VSU, 2011, 122 p.

14. Borzakov A.Y., Lemeshko A.A. Ritse nonlinear approximation and visualization of bifurcations of extremals. [Borzakov A.Y., Lemeshko A.A. Nelineinaie ritsevskie approksimacii i vizulizacii bifurkacii exstremalei]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2003, no. 2, pp. 100–112.

15. Borzakov A.Y. Reduction in non-local analysis of variational boundary value problems and the equation of oscillations of a pendulum. [Borzakov A.Y. Redukcia d nelokalnom analise variasionnih kraevih zadach i uravnenie kolebanii maiatnika]. *Seminar po global'nomu i stoxasticheskomu analizu — Seminar on global and stochastic analysis*, 2005, vol. 1, pp. 34–44.

Костина Т. И., к.ф-м.н., доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: tata_sti@rambler.ru

Kostina T. I., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: tata_sti@rambler.ru

Сапронов Ю. И., профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: yusapr@mail.ru

Sapronov Yu. I., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: yusapr@mail.ru