УДК 517.9

СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНАЯ КОСИНУС-ФУНКЦИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Д. В. Костин, А. В. Костин, М. Н. Небольсина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 06.07.2016 г.

Аннотация. Начиная с работ М. Совы и Курепы операторные косинус функции (КОФ) стали важным инструментом при исследовании корректной разрешимости задачи Коши для уравнений второго порядка в банаховых пространствах и находятся в таком же отношении к этой задаче как сильно непрерывные полугруппы к задаче Коши для уравнений первого порядка.

В настоящей заметке впервые применяются КОФ к исследованию корректной разрешимости граничных задач, а именно задачи Неймана для уравнений второго порядка. Оказывается, что возможность использования косинус-функции для исследования краевых задач, позволяет получать представления решения в более простой форме. В частности, это относится к случаю экспоненциальных косинус-функций, обобщающих классическую формулу Д'Аламбера.

Ключевые слова: корректные и некорректные задачи, генератор сильно непрерывной косинус-функции.

A STRONGLY CONTINUOUS COSINE-FUNCTION AND CORRECTNESS OF THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM

D. V. Kostin, A. V. Kostin, M. N. Nebolsina

Abstract. Beginning with the works of M. Sova and Kurepa, the operator cosine functions (COF) have become an important tool in the study of the correct solvability of the Cauchy problem for second-order equations in Banach spaces and are in the same ratio to this problem as strongly continuous semigroups to the Cauchy problem for equations of the first order.

In this note, for the first time, COF is applied to the study of the correct solvability of boundary value problems, namely, the Neumann problem for second-order equations. It turns out that the possibility of using the cosine function to study boundary-value problems allows one to obtain representations of the solution in a simpler form. In particular, this refers to the case of exponential cosine functions that generalize the classical D'Alembert formula.

Keywords: correct and incorrect problems, a generator of strongly continuous cosine-function.

В банаховом пространстве E рассматривается задача Неймана

$$u''(t) + Au(t) = 0, \tag{1}$$

$$u'(0) = \varphi, u'(a) = \psi. \tag{2}$$

Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) для φ, $\psi \in D(A)$.

Определение 1. *Задача Неймана (1)–(2) называется корректной, если она однозначно разрешима для всех $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует константа $M > 0$, независящая от φ и ψ такая, что для всех решений уравнения (1) справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in[0,a]} \|u(t)\|_E \leqslant M(\|\varphi\|_E + \|\psi\|_E). \tag{3}$$

Критерий корректной разрешимости задач Неймана получен в [9]. В нашем случае он формулируется следующим образом

Теорема 1. *Задача (1)–(2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при всех $n = 0, 1, ...$ точки $\frac{n^2\pi^2}{a^2} \in \rho(A)$ и выполняется оценка*

$$n^2\|(\frac{n^2\pi^2}{a^2} - A)^{-1}\| < \infty. \tag{4}$$

При этом решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$u(t) = S(t)\varphi + S(\pi - t)\psi, t \in [0, \pi], \tag{5}$$

где

$$S(t, A)\varphi = \frac{A^{-1}\varphi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nt(n^2 I - A)^{-1}\varphi. \tag{6}$$

В настоящей заметке укажем представление для решение задачи Неймана в случае когда оператор A является генератором сильно непрерывной косинус-функции $C(t, A)$ в E.

Это означает, что $C(t, A)$, есть семейство ограниченных операторов в E при каждом $t \in R$, удовлетворяющих условиям

1. $C(t + s, A) + C(t - s, A) = 2C(t, A)C(s, A)$ для всех $t, s \in R$.
2. $C(0, E) = I$ — тождественный оператор в E.
3. Для каждого $\varphi \in E$ выполняется условие

$$\lim_{t\to 0} ||C(t, A)\varphi - \varphi||_E = 0.$$

Для φ из области определения $D(A)$ оператора A справедливо соотношение

$$Au = \frac{d^2}{dt^2} C(t, A)\varphi\Big|_{t=0},$$

область определения $D(A)$ плотно в E, причем

$$D(A) = \{\varphi \in E, \frac{d^2C(t, A)}{dt^2}\varphi \in E\}.$$

Существует константы M и $\omega > 0$ при которых имеет место оценка

$$||C(t, A)|| \leqslant Me^{\omega|t|}.$$

Для всех $\lambda > \omega \geqslant 0, f \in E$ выполняется соотношение связывающее резольвенту $R(\lambda, A)$ оператора A и $C(t, A)$

$$\lambda(\lambda^2 I - A^{-1})f = \lambda R(\lambda^2, A)f = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} C(t, A)f dt.$$

Теорема 2. *Если оператор A является генератором сильно непрерывной косинус-функции $C(t,A)$, то задача (1)–(2) равномерно корректна и ее решение имеет вид*

$$u(t) = S(t)\varphi + S(\pi - t)\psi, t \in [0,\pi],$$

где

$$S(t) = \frac{A^{-1}\varphi}{\pi} + \frac{1}{\pi} ctgt \int\limits_0^\infty arctg(e^{-y}\sin t)C(y,A)\varphi dy.$$

Доказательство. Пусть $C(t,A)$-косинус-функция с генератором А. $\|C(t,A)\| \leqslant Me^{\omega t}, 0 < \omega \leqslant 1$.

Тогда справедливо представление [3] с.177

$$n(n^2I - A)^{-1}\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-ny}C(y,A)\varphi dy. \tag{7}$$

Используя это равенство в (6), получаем

$$S(t)\varphi = \frac{A^{-1}\varphi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nt}{n}\int\limits_0^\infty e^{-ny}C(y,A)\varphi dy = \frac{A^{-1}\varphi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty (\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nt}{n}e^{-ny})C(y,A)\varphi dy.$$

$$\|S(t)\varphi\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\varphi\|}{\pi} + \frac{2M}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{|\cos nt|}{n}\int\limits_0^\infty e^{-(n-\omega)y}C(y,A)dy\|\varphi\| =$$

$$= \frac{\|A^{-1}\|\|\varphi\|}{\pi} + \frac{2M}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\|\varphi\|}{n(n-\omega)}.$$

Преобразуем функцию $G(t,y) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\cos nt}{n}e^{-ny}$. В силу неравенства

$$|G(t,y)| \leqslant \sum_{n=1}^\infty e^{-ny} = \frac{1}{e^y - 1}, \qquad \lim_{y\to\infty} G(t,y) = 0. \tag{8}$$

Далее

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\sum_{n=1}^\infty \cos nte^{-ny} = -\frac{e^y\cos t}{e^{2y} - 2e^y\cos t + 1} = -\frac{\cos t}{2(\operatorname{ch} y - \cos t)}. \tag{9}$$

В силу (8)

$$G(t,y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\cos te^y dy}{e^{2y} - 2e^y\cos t + 1} = \frac{\cos t}{2}\int\limits_{e^y}^\infty \frac{d\tau}{\tau^2 - 2\tau\cos\tau + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin t}{e^y}\right).$$

Отсюда следует

$$S(t)\varphi = \frac{A^{-1}\varphi}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{ctg} t \cdot \operatorname{arctg}(e^{-y}\sin t)C(y,A)\varphi dy =$$

$$= \frac{A^{-1}\varphi}{\pi} + \frac{1}{\pi}\operatorname{ctg} t \int\limits_0^\infty \operatorname{arctg}(e^{-y}\sin t) C(y, A)\varphi dy.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков, И. К. Интегральные преобразования и операторное исчисление / И. К. Волков, А. Н. Канатников. — М. : Издательсво МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с.

2. Горбачук, В. И. Граничные значения решений дифференциально–операторных уравнений / В. И. Горбачук, А. И. Князюк // Успехи матем. наук. — 1989. — Т. 44, № 3 (267). — С. 55–91.

3. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев : Высща школа, 1989. — 347 с.

4. Костин, В. А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // ДАН. — 2013. — Т. 452, № 4. — С. 367–370.

5. Костин, В. А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В. А. Костин, М. Н. Небольсина // ДАН. — 2009. — Т. 428, № 1. — С. 20–22.

6. Костин, В. А. Сильно непрерывная косинус-функция и корректность краевой задачи Дирихле / В. А. Костин // Международная конференция, посвященная 100–летию со дня рождения С. Г. Крейна (13–19 ноября 2017 г.) : сборник материалов. — Воронеж, 2017. — С. 126–128.

7. Кошляков, Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М., 1962. — 766 с.

8. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

9. Небольсина, М. Н. Задача Неймана для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве и ортогональные многочлены / М. Н. Небольсина // Математические модели и операторные уравнения. — 2007. — Т. 4. — С. 104–115.

10. Fattorini, H. O. Second order linear differential equations in Banach spaces / H. O. Fattorini. — North Holland, Amsterdam, 1985. — 314 p.

11. Sova, M. Cosine operator functions / M. Sova // Rozpr. mat. — 1966. — V. 49. — P. 1–47.

12. Sova, M. Concerning the characterization of generators of distribution semigroups / M. Sova // Cas. pestov. mat. — 1980. — V. 105, № 4. — P. 329–340.

REFERENCES

1. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integrated transformations and operator calculation. [Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral'nye preobrazovaniya i operatornoe ischislenie]. Moscow: Publishing house MSTU of N. E. Bauman, 2002, 228 p.

2. Gorbachuk V.I., Knyazyuk A.I. Boundary values of decisions differential and operator equations. [Gorbachuk V.I., Knyazyuk A.I. Granichnye znacheniya reshenij differencial'no–operatornyx uravnenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1989, vol. 44, no. 3 (267), pp. 55–91.

3. Goldsteyn J. Semigroups of linear operators and their applications. [Goldstejn Dzh. Polugruppy linejnyx operatorov i ix prilozheniya]. Kiev: Vyshcha school, 1989, 347 p.

4. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operator method of Maslov–Heaviside and C_0 – operator integral Duhamel. [Kostin V.A, Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornyj metod Maslova-Xevisajda i C_0–operatornyj integral Dyuamelya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 452, no. 4, pp. 367–370.

5. Kostin V.A., Nebolsina M.N. About correct resolvability of regional tasks for equations of the second order. [Kostin V.A., Nebol'sina M.N. O korrektnoj razreshimosti kraevyx zadach dlya

uravneniya vtorogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2009, vol. 428, no. 1, pp. 20–22.

6. Kostin V.A. Strongly continuous a cosine function and correctness of a regional task of Dirikhle. [Kostin V.A. Sil'no nepreryvnaya kosinus-funkciya i korrektnost' kraevoj zadachi Dirixle]. *Mezhdunarodnaya konferenciya, posvyashhennaya 100–letiyu so dnya rozhdeniya S.G. Krejna (13–19 noyabrya 2017 g.) — The International conference devoted to the 100 anniversary since the birth of S.G. Crane (on November 13–19, 2017)*, Voronezh, 2017, pp. 126–128.

7. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Main differential equations of athematic physics. [Koshlyakov N.S., Gliner E'.B., Smirnov M.M. Osnovnye differencial'nye uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow, 1962, 766 p.

8. Kreyn S.G. Linear Differential Equations in Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

9. Nebolsina M.N. The Neumann problem for a second-order differential equation in a Banach space and orthogonal polynomials. [Nebol'sina M.N. Zadacha Nejmana dlya differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v banaxovom prostranstve i ortogonal'nye mnogochleny]. *Matematicheskie modeli i operatornye uravneniya — Mathematical models and operator equations*, 2007, vol. 4, pp. 104–115.

10. Fattorini H.O. Second order linear differential equations in Banach spaces. North Holland, Amsterdam, 1985, 314 p.

11. Sova M. Cosine operator functions. Rozpr. mat., 1966, vol. 49, pp. 1–47.

12. Sova M. Concerning the characterization of generators of distribution semigroups. Cas. pestov. mat., 1980, vol. 105, no. 4, pp. 329–340.

Небольсина М. Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Nebolsina M. N., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Костин А. В., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: leshakostin@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Kostin A. V., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: leshakostin@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Костин Д. В., д.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: dvk@rambler.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Kostin D. V., doctor of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: dvk@rambler.ru
Tel.: +7(473)220–83–64