УДК 517.9

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Небольсина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 06.07.2016 г.

Аннотация. При исследовании динамических процессов важное место занимают задачи без начальных условий. Так Г. Баренблат и Я. Зельдович указывают на постановки вопросов о свойствах явлений которые не зависят от начальных условий или не зависят от деталей начальных условий, но вместе с тем система еще далека от состояния равновесия. Поэтому их можно объединить названием «промежуточная асимптотика». Такие асимптотики являются решениями вырожденных задач в которых параметры независимых переменных обращаются в нуль или бесконечность. Однако, чтобы решение представляло собой промежуточную асимптотику необходима корректная разрешимость задачи.

Настоящая заметка посвящена корректной разрешимости некоторых классов таких задач для дифференциальных уравнений в конструкции которых используется сингулярное выражение $\frac{d}{dh(x)}$, где $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $h'(x) > 0$, $h(a) = -\infty$, $h(b) = \infty$ и которые применялись авторами при исследовании корректной разрешимости задач методами сильно непрерывных полугрупп преобразований. Здесь мы используем также эту методику.

Ключевые слова: сингулярные уравнения, корректные разрешимость, дробные степени операторов, задачи без начальных условий.

ON CORRECT SOLVABILITY OF PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR SOME SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

A. V. Kostin, D. V. Kostin, M. N. Nebolsina

Abstract. In the study of dynamic processes occupy an important place problems without initial conditions. So Barenblat G., and Y. Zeldovich point to questions about the properties of phenomena which are not depending on initial conditions or do not depend on the details of the initial conditions, however, the system is far from equilibrium state. So you can combine them called «intermediate asymptotics». These asymptotics are solutions of degenerate problems in which the parameters of the independent variables go to zero or infinity. However, that decision was a intermediate asymptotics necessary correct solvability of a problem.

The present note deals with the correct solvability of some classes of such problems for differential equations in design which uses a singular expression $\frac{d}{dh(x)}$, here $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $h'(x) > 0$, $h(a) = -\infty$, $h(b) = \infty$ and that were used the authors at research of correct solvability of tasks by methods strongly continuous semigroups of transformations. Here we use it also methodology.

Keywords: singular equalizations, correct solvability, fractional degrees of operators, tasks without initial terms.

1. НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ

Пусть E — банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор с областью определения $\mathbb{D}(A) \subset E$. В [5]–[7] указаны условия при которых операторный многочлен

$$\mathbb{P}_n = P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m, \qquad a_m \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

имеет ограниченный обратный оператор

$$\mathbb{P}_n^{-1} f = \int\limits_0^\infty q(t) U(t, -A) f dt, \qquad f \in E, \tag{1.2}$$

где $U(t, -A)$ — сильно непрерывная полугруппа с генератором $-A$, $q(t)$ — решение задачи

$$\mathbb{P}_n \left(\frac{d}{dt} \right) q(t) = \delta(t), \qquad q(0) = \dots = q^{(n-1)}(0) = 0, \tag{1.3}$$

δ — дельта–функция.

Следующая теорема расширяет применение этого результата

Теорема 1.1. Пусть A_i $(i = 1, \dots, k)$ — линейные замкнутые операторы с областями определения $\overline{D(A_i)} = E$, $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{k} D(A_i)} = E$ и операторы $-A_i$ являются генераторами сильно непрерывных полугрупп (полугрупп класса C_0) $U(t, -A_i)$, коммутирующих между собой, в том смысле, что $U(t, -A_i) \cdot U(t, -A_j)\varphi = U(t, -A_j) \cdot U(t, -A_i)\varphi$, $\varphi \in E$ для которых выполняются оценки

$$\|U(t, -A_i)\| \leqslant M e^{\omega_i t}, \ t > 0, \ U(0, -A) = I \tag{1.4}$$

и пусть $A = \sum\limits_{n=1}^{k} A_i$. Тогда при выполнении условия

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} Re\, \lambda_j + \sum_{i=1}^{k} \omega_i = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k} \omega_i < 0 \tag{1.5}$$

уравнение

$$\mathbb{P}_n u = A_n u = \sum_{m=0}^{n} a_m \left(\sum_{i=1}^{k} A_i \right)^m u = f$$

имеет единственное решение $u \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} D(A_i^n)$ при любых $f \in \mathbb{D}A$ и оно имеет вид

$$u = \int\limits_0^\infty q(t) \prod_{i=1}^{k} U(t, -A_i) f, \tag{1.6}$$

где $q(t)$ удовлетворяет (1.3) и справедлива оценка

$$\|u\|_E = \|\mathbb{P}_n^{-1} f\|_E \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} M_i}{|\lambda_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i|} \|f\|_E. \tag{1.7}$$

Доказательство. В соответствии с [10], условия коммутативности полугрупп $U(t,-A_i)$ позволяет утверждать, что оператор $-A = \sum\limits_{k=1}^{k}(-A_i)$ является генератором полугруппы $U(t,-A) = U(t,-\sum\limits_{i=1}^{k}A_i) = \prod\limits_{i=1}^{k}U(t,-A_i)$. И применение равенства (1.2) к этой полугруппе дает равенство (1.6). Отсюда, пользуясь неравенством (1.4), получаем (1.7).

2. УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ СТЕПЕНЯМИ ОПЕРАТОРОВ

Как известно (см. [2]–[4]) для операторов A, удовлетворяющим условию

$$\|U(t,-A)\| \leqslant Me^{-\omega t}, \qquad \omega > 0 \tag{2.1}$$

определены дробные степени A^{α}, $0 < \alpha < 1$. При этом $-A^{\alpha}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t,-A^{\alpha})$ имеющей вид

$$U(t,-A^{\alpha})f = \int\limits_0^{\infty} g(t,\xi)U(\xi,-A)fd\xi, \tag{2.2}$$

где функция $g(t,\xi) > 0$ и является обратным преобразованием Лапласа функции $F(z) = e^{-tz^{\alpha}}$, $Re z > 0$.

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то

$$U(t,-A^{\frac{1}{2}})f = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\xi^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{t^2}{4\xi}}U(\xi,-A)fd\xi. \tag{2.3}$$

Для этих полугрупп справедлива оценка

$$\|U(t,-A^{\alpha})\| \leqslant Me^{-\omega^{\alpha}t}. \tag{2.4}$$

Таким образом, в силу выполнения условий (1.4), операторы A_i имеют дробные степени $A_i^{\alpha_i}$, $0 < \alpha_i < 1$ с генерируемыми полугруппами $U(t,-A_i^{\alpha_i})$, причем

$$\|U(t,-A_i^{\alpha_i})\| \leqslant M_i e^{-\omega_i^{\alpha_i}t}. \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что оператор $A_{\overline{\alpha}} = \sum\limits_{i=1}^{k}A_i^{\alpha_i}$ является генератором C_0 — полугруппы вида

$$U(t,-A_{\overline{\alpha}}) = \prod_{i=1}^{k}U(t,-A_i^{\alpha_i}) = \int\limits_0^{\infty}\cdots\int\limits_0^{\infty}g_{\alpha_i}(t,\xi)\prod_{i=1}^{k}U(t,-A_i)d\xi_1\ldots d\xi_k \tag{2.6}$$

и справедлива оценка

$$\|U(t,-A_{\overline{\alpha}})\| \leqslant \prod_{i=1}^{k}M_i e^{-\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i^{\alpha}t} \tag{2.7}$$

И таким образом из теоремы 1.1 следует

Теорема 2.1. Если операторы A_i удовлетворяют условиям (2.4) и выполняется неравенство

$$\lambda_0 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} Re\,\lambda_j < \sum_{i=1}^{k}\omega_i^{\alpha_i}, \tag{2.8}$$

где λ_j — корни многочлена $P_n(x)$, то уравнение

$$A_{n,\alpha}u = \sum_{m=0}^{n} a_m \left(\sum_{i=1}^{k} A_i^{\alpha_i}\right)^m u = f \tag{2.9}$$

корректно разрешимо для $u \in \prod\limits_{i=1}^{k} D(A_i^k)$ и $f \in D(A)$.

Его решение имеет вид

$$u = \int\limits_0^\infty q(t)U(t, -A_{\overline{\alpha}})f dt \tag{2.10}$$

и справедлива оценка

$$\|u\| \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} M_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i^{\alpha_i} - \lambda_0} \cdot \|f\|. \tag{2.11}$$

3. ПРИМЕРЫ

Пусть функция $h(x)$ определена на интервале $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям: $h'(x) > 0$, $h(\infty) = -\infty$, $h(b) = \infty$.

Через $L_{p,\omega,h}$ будем обозначать банахово пространство функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\omega,h} = \left[\int\limits_a^b e^{p\omega h(x)} |\varphi(x)|^p dh\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geqslant 1. \tag{3.1}$$

Введем операторы $\mathbb{D}_{\alpha,h} = \alpha\frac{d}{dh}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ с областью определения $D(\mathbb{D}_{\alpha,h}) = \{\varphi : \varphi \in L_{p\omega,h}, \frac{d\varphi}{dh} \in L_{p,\omega,h}\}$.

Нетрудно проверить, что такие операторы являются генераторами сильно непрерывных групп линейных преобразований, действующих по правилу

$$U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + \alpha t)], \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

причем для них справедливо равенство

$$\|U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi\|_{p,\omega,h} = e^{-\alpha^2\omega t}, \tag{3.3}$$

которое следует из соотношений

$$\int\limits_a^b |U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x)|^p dh = \int\limits_a^b e^{\alpha\omega p h(s)} |\varphi[h^{-1}(h(s) + \alpha t)]|^p =$$

$$= e^{-\alpha^2 p\omega t} \int\limits_a^b e^{\alpha\omega p h(s)} |\varphi(s)|^p dh = e^{-\alpha^2\omega p t} \|\varphi\|_{p,\alpha\omega,h}.$$

В случае $t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ семейства (3.2) являются сжимающими полугруппами класса C_0.

Рассмотрим уравнение

$$\mathbb{D}_{\alpha,h}u(x) = Au(x) + f(x), \qquad x \in (a,b) \tag{3.4}$$

где $f(x)$ — операторная функция со значениями в E при каждом $x \in (a,b)$, A — генератор сильно непрерывной полугруппы $U(t,A)$ в E, типа ω_A. Требуется найти $u \in D(\mathbb{D}_{\alpha,h})$, удовлетворяющую (3.4).

Из теоремы 1.1. следует

Утверждение 3.1. Если $\omega_A + \omega < 0$, то уравнение (3.4) имеет единственное решение $u \in L_{p,\alpha\omega,h}(E)$ с нормой

$$\|u\| = \left[\int\limits_a^b e^{\alpha p\omega h(x)}\|u(x)\|_E^p dh(x)\right]^{\frac{1}{p}},$$

и оно имеет вид

$$u(x) = \int\limits_a^b U(t,A)f[h^{-1}(h(x) - \alpha t)dt. \tag{3.5}$$

При этом справедлива оценка $\|u\| \leqslant \frac{M}{\omega_A+\omega}$.

В частности, для некоторых классических случаев имеем

1. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, $h(x) = x$, $x \in (-\infty,\infty)$, $U(t,\mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi(x+\alpha t)$, $u(x) = \int\limits_0^\infty U(t,A)\varphi(x-\alpha t)dt$, $\|u\| = \left[\int\limits_a^b e^{\alpha p\omega x}|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$.

2. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = x\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $h(x) = \ln x$, $x \in (0,\infty)$, $U(t,\mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi(xe^{\alpha t})$, $u(x) = \int\limits_0^\infty U(t,A)\varphi(xe^{-\alpha t})dt$, $\|u\| = \left[\int\limits_a^b x^{\alpha p\omega-1}|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$.

3. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = (1-x^2)\frac{d\varphi}{dx}$, $h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1,1)$, $U(t,\mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1+\operatorname{th} t}{1-x\operatorname{th} t}\right)$, $u(x) = \int\limits_0^\infty U(t,A)\varphi\left(\frac{1+\operatorname{th} t}{1-x\operatorname{th} t}\right)dt$, $\|\varphi\| = \int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\alpha p\omega}{2}} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)}$.

Очевидно, что используя операторы $\mathbb{D}_{\alpha,h}$ при конструировании операторов A_i в теоремах 1.1 и 2.1 можно получать корректную разрешимость задач без начальных условий для широкого класса дифференциальных уравнений с вырождающимися коэффициентами

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И. Промежуточные асимптотики в математической физике / Г. И. Баренблат, Я. Б. Зельдович // Успехи математических наук. — 1971. — Т. 26, вып. 2 (158). — С. 115–129.

2. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев : Высща школа, 1989. — 347 с.

3. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

4. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

5. Маслов, В. П. Асимптотические методы и теория возмущений / В. П. Маслов. — М. : Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит., 1988. — 312 с.

6. Маслов, В. П. Операторные методы / В. П. Маслов. — М. : Наука, 1973. — 543 с.

7. Костин, В. А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // ДАН. — 2013. — Т. 452, № 4. — С. 367–370.

8. Костин, В. А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // ДАН. — 2014. — Т. 455, № 2. — С. 142–146.

9. Костин, В. А. Операторные многочлены Ньютона и корректная разрешимость задач для обобщенного уравнения Эйлера / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // ДАН. — 2016. — Т. 470, № 2. — С. 141–143.

10. Da Pratto, G. D'jperateures lineaires et equations differentielles operationnelles / G. Da Pratto, P. Grusvald, J. Sommes // Math. pures et appl. — 1975. — V. 54. — P. 305–387.

11. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

12. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

REFERENCES

1. Barenblatt G.I., Zeldovich Y.B. Intermediate asymptotics in mathematical physics. [Barenblatt G.I., Zel'dovich Ya.B. Promezhutochnye asimptotiki v matematicheskoj fizike]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. 26, iss. 2 (158), pp. 115–129.

2. Goldstain D. Semigroups of linear operators and their applications. [Goldstejn Dzh. Polugruppy linejnyx operatorov i ix prilozheniya]. Kyev, 1989, 347 p.

3. Iosida K. Functional Analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

4. Kreyn S.G. Linear Differential Equations in Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

5. Maslov V.P. Asymptotic methods and perturbation theory. [Maslov V.P. Asimptoticheskie metody i teoriya vozmushhenij]. Moscow, 1988, 312 p.

6. Maslov V.P. Operator methods. [Maslov V.P. Operatornye metody]. Moscow: Nauka, 1973, 543 p.

7. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operator method of Maslov–Heaviside and C_0 – operator integral Duhamel. [Kostin V.A, Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornyj metod Maslova-Xevisajda i C_0–operatornyj integral Dyuamelya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 452, no. 4, pp. 367–370.

8. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Elementary transformations of the semigroup and its generating equation. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. E'lementarnye polugruppy preobrazovanij i ix proizvodyashhie uravneniya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 455, no. 2, pp. 142–146.

9. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operational polynomials Newton and correct solvability of the problems for the generalized Euler. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornye mnogochleny N'yutona i korrektnaya razreshimost' zadach dlya obobshhennogo uravneniya E'jlera]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 470, no. 2, pp. 141–143.

10. Da Pratto G., Grusvald P., Sommes J. D'jperateures lineaires et equations differentielles operationnelles. Math. pures et appl., 1975, vol. 54, pp. 305–387.

11. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

12. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A.

Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

Небольсина М. Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Nebolsina M. N., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Костин А. В., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: leshakostin@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Kostin A. V., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: leshakostin@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Костин Д. В., д.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: dvk@rambler.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Kostin D. V., doctor of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: dvk@rambler.ru
Tel.: +7(473)220–83–64