УДК 517.927.25+517.312

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Ф. В. Голованева[1], Е. В. Лылов[2], С. А. Шабров[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *АО «Концерн «Созвездие»*

Поступила в редакцию 12.07.2016 г.

Аннотация. В работе формула интегрирования по частям распространяется на случай интеграла, в котором интегрирование осуществляется по геометрическому графу. Такая необходимость в интегрировании по частям возникает, например, при моделировании деформаций и колебательных процессов объектов, расположенных вдоль геометрического графа. Доказанная формула позволяет получать математические модели, описывающие различные механические процессы на графе. Получаемые при этом модели реализуются ввиде дифференциальных уравнений, определенных поточечно, и дополненных краевыми условиями.

Такая концепция (поточечно заданного дифференциального уравнения), сформулированного Ю. В. Покорным, показала свою эффективность для дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков на отрезке.

Ключевые слова: геометрический граф, интегрирование по частям, производная.

THE ANALOGUE OF THE FORMULA OF INTEGRATION BY PARTS ON GEOMETRIC GRAPH

F. V. Golovaneva, E. V. Lilov, S. A. Shabrov

Abstract. In this paper, the integration by parts formula is extended for an integral in which the integration is carried out along the geometric graph. The need for integration by parts arises, for example, in the modeling of deformations and oscillatory processes of objects located along a geometric graph. The proven formula makes it possible to obtain mathematical models describing different processes on the graph. In this case, the resulting models are realized in the form of differential equations, defined pointwise, and supplemented by boundary conditions. That conception (pointwise given differential equation), formulated by Yu. V. Pokorny, showed its effectiveness for differential equations of the second and fourth orders on the interval.

Keywords: geometric graph, integration by parts, derivative.

Проблема возможности применения интегрирования по частям стоит остро не только в теории функций, но и при моделировании различных процессов, в случае вариационного подхода, если «появляется» интеграл Стилтьеса, в котором значения интегрируемой функции важны в точках разрыва интегрирующей функции. В то же время, при интегрировании по частям, когда функции меняются местами, значение интегрируемой функции в точках разрыва становятся актуальными (ранее бывшее «не нужными»).

В [1] изложен результат о справедливости формулы интегрирования по частям в случае, если в каждой точке промежутка интегрирования по крайней мере одна из функций непрерывна или обе регулярны, т. е. значение функции в точках разрыва первого рода равно полусумме ее предельных значений.

В дальнейшем этот результат был обобщен на случай различных на отрезке функций [2].

В этой работы мы доказываем формулу интегрирования по частям для геометрического графа.

В работе будем пользоваться терминологией из [3, § 1.3, гл. 1].

Пусть Γ — произвольный компактный связный граф, ребра графа обозначим через γ_i ($i = 1, \ldots, N$), вершины — через a_k (i, k — номера, причем нумерация ребер предполагается независимой от нумерации вершин). Обозначим $R(\Gamma) = \bigcup \gamma_i$, где γ_i — непрерывные кривые без внутренних самопересечений. Всюду далее предполагается, что на графе задана некоторая ориентация.

Множество граничных вершин графа Γ обозначим через $\partial\Gamma$, т. е. $\partial\Gamma = \{b_i, i = 1, 2, \ldots, L\}$. Таким образом, имеем $\Gamma = R(\Gamma) \bigcup \{a_k\}$, $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \partial\Gamma$. Чтобы выделить из множества $R(\Gamma)$ те ребра, которые примыкают к вершине a_k, введем множество $\Gamma(a_k)$, обозначая так подграф, состоящий из a_k и примыкающих к данной вершине ребер. Подграфом Γ называется любое связное открытое подмножество Γ.

Скалярная функция $u(x)$ на графе Γ — обычное отображение $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i обозначается через $u_i(x)$.

Определения на графе функции ограниченной вариации и абсолютно-непрерывной функции аналогичны классическим.

Введем следующее обозначение:

$$\frac{d}{d\Gamma}\Big(pu'\Big)' = \begin{cases} (pu')', \text{ при } x \in R(\Gamma), \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu_i(a_k)} p_i(a_k) u_i(a_k), \text{ при } x \in I(\Gamma), \end{cases}$$

где

$$\mu_i(a_k) = \begin{cases} 1, \text{ если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана «к» вершине } a_k, \\ 0, \text{ если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана «от» вершины } a_k. \end{cases}$$

Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 1 (Аналог формулы интегрирования по частям для графа без циклов). *Пусть Γ — произвольный ориентированный граф без циклов, L — количество граничных вершин графа Γ, т. е. $\partial\Gamma = \{b_1, b_2, \ldots, b_L\}$. Пусть на графе Γ заданы абсолютно-непрерывная функция $u(x)$ и функция ограниченной вариации $v(x)$, причем производная $u'_x(x)$ является σ-абсолютно непрерывной на Γ, а $v'_\Gamma(x)$ — функцией ограниченной вариации. Тогда на графе Γ справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_\Gamma u \frac{dv}{d\Gamma}\, d\Gamma = \sum_{i=1}^{L} (-1)^{\nu(b_i)+1} u_i(b_i) v_i(b_i) - \int\limits_\Gamma v(x) u'_x(x)\, dx,$$

где

$$\nu(b_i) = \begin{cases} 0, \textit{ если ориентация выбрана «от» вершины } b_i, \\ 1, \textit{ если ориентация выбрана «к» вершине } b_i. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции по количеству ребер k графа Γ.

При $k = 1$ формула справедлива, так как при $k = 1$ получаем ориентированный граф Γ, состоящий из одного ребра и двух граничных вершин b_1 и b_2. Для определенности пусть задана ориентация на графе от вершины b_1 к b_2. Для отрезка формула интегрирования по частям доказана и имеет следующий вид:

$$\int\limits_\Gamma u \frac{dv}{d\Gamma}\, d\Gamma = \int\limits_{b_1}^{b_2} u\, dv = u(b_2)v(b_2) - u(b_1)v(b_1) - \int\limits_{b_1}^{b_2} v\, du. \tag{1}$$

Предполагая справедливость формулы интегрирования по частям при $k \leqslant N-1$, покажем справедливость формулы при $k = N$. Выбросим из графа Γ внутреннюю вершину $a_k \in I(\Gamma)$ степени m, т. е. m — число ребер графа Γ, инцидентных вершине a_k. Тогда получаем m компонент связности, причем выполнены следующие условия $\sum\limits_{i=1}^{m} N_i = N$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} L_i\right) - m = L$, где N_i, L_i — количество ребер и граничных вершин соответственно, получившихся графов Γ_i. Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{dv}{d\Gamma}\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{\Gamma_i} u_i\frac{dv_i}{d\Gamma_i}\,d\Gamma_i + (-1)^{\mu_i(a_k)}u_i(a_k)v_i(a_k)\right). \tag{2}$$

Для интеграла под знаком суммы выполнено наше предположение при $k \leqslant N-1$, т. е. справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma_i} u_i\frac{dv_i}{d\Gamma_i}d\Gamma_i = \sum_{j=1}^{L_i-1}(-1)^{\nu(b_j)+1}u(b_j)v(b_j) + (-1)^{\nu(a_k)+1}u_i(a_k)v_i(a_k) - \sum_{j=1}^{N_i}\int\limits_{\gamma_j} v_j {u_j}'_x\,dx. \tag{3}$$

Подставляя представление (3) в (2), получим

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{dv}{d\Gamma}\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{L_i-1}(-1)^{\nu(b_j)+1}u(b_j)v(b_j) + (-1)^{\nu(a_k)+1}u_i(a_k)v_i(a_k) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{N_i}\int\limits_{\gamma_j} v_j {u_j}'_x\,dx + (-1)^{\mu(a_k)}u_i(a_k)v_i(a_k)\right) = \sum_{i=1}^{L}(-1)^{\nu(b_i)+1}u(b_i)v(b_i) - \int\limits_{\Gamma} vu'_x\,dx,$$

т. е. формула интегрирования по частям справедлива при $k = N$. Теорема доказана.

Покажем теперь справедливость формулы интегрирования по частям для произвольного графа с циклом.

Теорема 2 (Аналог формулы интегрирования по частям для графа с циклами)**.** *Пусть Γ — произвольный ориентированный граф с циклами, L — количество граничных вершин графа Γ, т. е. $\partial\Gamma = \{b_1, b_2, \ldots, b_L\}$. Пусть на графе Γ заданы абсолютно непрерывная на Γ функция $u(x)$ и функция ограниченной вариации $v(x)$, причем производная $u'_x(x)$ является σ-абсолютно непрерывной на Γ, а $v'_\Gamma(x)$ — функцией ограниченной вариации на Γ. Тогда на графе Γ справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{dv}{d\Gamma}\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{L}(-1)^{\nu(b_i)+1}u_i(b_i)v_i(b_i) - \int\limits_{\Gamma} v(x)u'_x(x)\,dx,$$

где

$$\nu(b_i) = \begin{cases} 0, & \text{если ориентация выбрана «от» вершины } b_i, \\ 1, & \text{если ориентация выбрана «к» вершине } b_i. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции по количеству циклов k графа Γ.

При $k = 1$ получаем ориентированный граф Γ с одним циклом. Выбросив из графа Γ точки нулевой σ-меры x_i ребер γ_i ($i = 1, 2, \ldots, M$, причем $M \leqslant N$), образующих цикл, получим M подграфов без цикла. Тогда,

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{dv}{d\Gamma}\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{M}\left(\int\limits_{\Gamma_i} u_i\frac{dv_i}{d\Gamma_i}\,d\Gamma_i + (-1)^{\mu_i(x_i)}u_i(x_i)v_i(x_i)\right). \tag{4}$$

Но для интеграла под знаком суммы, в силу теоремы 1, справедлива формула интегрирования по частям. Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{dv}{d\Gamma}d\Gamma = \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{L_i-1}(-1)^{\nu(b_j)+1}u(b_j)v(b_j) + (-1)^{\nu(a_k)+1}u_i(x_i)v_i(x_i) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{N_i}\int\limits_{\gamma_j} v_j u'_{jx}dx + (-1)^{\mu(a_k)}u_i(x_i)v_i(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{L}(-1)^{\nu(b_i)+1}u(b_i)v(b_i) - \int\limits_{\Gamma} vu'\,dx,$$

т. е. формула интегрирования по частям справедлива при $k = 1$.

Предполагая справедливость формулы интегрирования по частям при $k \leqslant N-1$, покажем справедливость формулы при $k = N$. Выбросим из графа Γ внутреннюю вершину $a_k \in I(\Gamma)$ степени m, т. е. m — число ребер графа Γ, инцидентных вершине a_k. Тогда получаем m компонент связности, причем выполнены следующие условия: $\sum\limits_{i=1}^{m} N_i = N$, $(\sum\limits_{i=1}^{m} L_i) - m = L$, где N_i, L_i - количество ребер и граничных вершин получившихся графов Γ_i. Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{dv}{d\Gamma}d\Gamma = \sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{\Gamma_i} u_i\frac{dv_i}{d\Gamma_i}d\Gamma_i + (-1)^{\mu_i(a_k)}u_i(a_k)v_i(a_k)\right). \tag{5}$$

Если получившийся граф Γ_i с циклом, то для него выполнено наше предположение при $k \leqslant N-1$, если граф Γ_i без цикла, то для него справедлива теорема 1. Таким образом, получим

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{dv}{d\Gamma}d\Gamma = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{L_i-1}(-1)^{\nu(b_j)+1}u(b_j)v(b_j) + (-1)^{\nu(a_k)+1}u_i(a_k)v_i(a_k) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{N_i}\int\limits_{\gamma_j} v_j u'_{jx}\,dx + (-1)^{\mu(a_k)}u_i(a_k)v_i(a_k)\right) = \sum_{i=1}^{L}(-1)^{\nu(b_i)+1}u(b_i)v(b_i) - \int\limits_{\Gamma} vu'\,dx,$$

т. е. формула интегрирования по частям справедлива при $k = N$. Теорема доказана.

Доказанные результаты позволяют получать математические модели различных процессов, происходящих на геометрическом графе (с циклами). При этом возникающее дифференциальное уравнение является поточечно заданным. Это подход, развитый Ю. В. Покорным и его учениками, показал свою эффективность [3]–[6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сакс, С. Теория интеграла / С. Сакс. — М., 1949. — 494 с.

2. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. // — М. : Физматлит, 2004. — 274 с.

4. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

5. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

REFERENCES

1. Saks S. Theory of the intergal. [Saks S. Teoriya integrala]. Moscow, 1949, 494 p.

2. Zvereva M.B. Differential equations with discontinuous solutions: qualitative theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

3. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 274 p.

4. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

5. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

6. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

Лылов Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, АО «Концерн «Созвездие», отдел НТЦ «Системы управления тактического звена», начальник, Воронеж, Россия
E-mail: zhenya86@mail.ru

Lylov Evgeny Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, AO «Concern «Sozvezdie», division of STC «Control Systems at the tactical level», head, Voronezh, Russia
E-mail: zhenya86@mail.ru

Голованева Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежсского государственного университета, кандидат физико-математических наук, г. Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, Russi
E-mail: gfainav@mail.ru

Шабров Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90