УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ МОДЕЛЬНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Ву Нгуен Шон Тунг

Московский педагогический государственный университет

Поступила в редакцию 11.07.2016 г.

Аннотация. Изучается специальная нелокальная задача для общего нестационарного уравнения переноса нейтронов. Уравнение переноса интерпретируется как эволюционное уравнение в банаховом пространстве суммируемых функций. Вместо традиционного начального условия взят интеграл, выражающий среднее по времени. Основные результаты получены на основе общей теории, развитой для абстрактной нелокальной задачи в банаховом пространстве. При естественных ограничениях установлена теорема существования и единственности обобщенного решения. Предъявлена оценка устойчивости и показано, что обобщенное решение представимо сходящимся рядом Неймана. Отмечены точные условия, при которых обобщенное решение является классическим. В случае, когда уравнение переноса взято без интеграла столкновений, дана явная запись решения в виде некоторой конечной суммы. При исследовании задачи используется теория полугрупп линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов, нелокальная задача, теория полугрупп.

SOLVABILITY OF THE MODEL NONLOCAL PROBLEM ASSOCIATED WITH THE GENERAL NEUTRON TRANSPORT EQUATION

Vu Nguyen Son Tung

Abstract. A special nonlocal problem for the general nonstationary neutron transport equation is studied. The transport equation is interpreted as an evolutionary equation in the Banach space of summable functions. Instead of the traditional initial condition, an integral expressing the time averages is given. The main results are obtained on the basis of a general theory developed for an abstract nonlocal problem in a Banach space. Under natural restrictions the existence and uniqueness theorem for a weak solution is established. An estimate of the stability is found, and it is shown that a weak solution can be represented by a convergent Neumann series. Precise conditions are noted, under which the weak solution is a classical solution. In the case when the transport equation is taken without the collision integral, we show that the solution could be found explicitly, in the form of a finite sum. In the study of the problem, the theory of semigroups of bounded linear operators in a Banach space is used.

Keywords: neutron transport equation, nonlocal problem, theory of semigroups.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе изучается специальная нелокальная задача для общего уравнения переноса нейтронов

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\,\nabla_x u + \sigma_a(x,v)u = \int\limits_V k(x,v,v')\,u(x,v',t)\,dv', \qquad u = u(x,v,t). \tag{1}$$

К уравнению (1) добавлено краевое условие

$$u(x,v,t)\big|_{\Gamma^{(-)}} = 0 \tag{2}$$

и нелокальное условие среднего по времени

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,v,t)\,dt = \varphi(x,v). \tag{3}$$

Обычно считаем, что

$$x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3_x, \qquad v = (v_1,v_2,v_3) \in V \subset \mathbb{R}^3_v, \qquad 0 \leqslant t < +\infty$$

или $0 \leqslant t \leqslant T$ с заданным значением $T > 0$. Предполагаем, что Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^3_x$ с границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$, а V — шаровой слой в $\mathbb{R}^3_v$ вида

$$V \equiv \left\{\, v \in \mathbb{R}^3_v :\ 0 < \nu_{\min} \leqslant |v| \leqslant \nu_{\max} < \infty \,\right\} \tag{4}$$

с фиксированными положительными значениями $\nu_{\min}, \nu_{\max} \in \mathbb{R}$, $\nu_{\min} < \nu_{\max}$. В краевом условии (2) через $\Gamma^{(-)}$ обозначено множество таких (x,v), что $x \in \Gamma$, а вектор $v \in V$, приложенный к точке x, направлен внутрь области Ω.

Нелокальное условие (3) выражает среднее по времени и замещает традиционное начальное условие

$$u(x,v,0) = f(x,v), \qquad (x,v) \in \Omega \times V. \tag{5}$$

Функция $f(x,v)$ в формуле (5) сейчас неизвестна. Напротив, функция $\varphi(x,v)$ в формуле (3) предполагается заданной в $\Omega \times V$. Требуется восстановить решение $u = u(x,v,t)$ из соотношений (1)–(3). Другая полезная интерпретация: надо подобрать начальное состояние $f(x,v)$ так, чтобы решение стандартной задачи (1), (2), (5) обладало предписанным средним по времени (3).

Величины, входящие в уравнение переноса (1), имеют следующий физический смысл. Функция $u(x,v,t)$ описывает плотность распределения нейтронов, пролетающих через точку $x \in \Omega$ со скоростью $v \in V$ в момент времени t. Функция $\sigma_a(x,v)$ является коэффициентом поглощения нейтронов, а $k(x,v,v')$ есть ядро рассеяния, отвечающее за размножение нейтронов.

Базовые сведения про уравнение переноса нейтронов см. в [1]–[3]. Наше исследование существенно использует стандартный полугрупповой подход [4]–[7], в рамках которого уравнение переноса интерпретируют как эволюционное уравнение в банаховом пространстве $L^1(\Omega \times V)$. Среди множества работ, посвященных полугрупповой трактовке уравнения переноса, отметим статьи [8]–[11], где обсуждаются характерные свойства возникающих полугрупп. Общая теория нелокальных задач для эволюционных уравнений была развита в [12], [13]. В работе [14] отмечена глубокая внутренняя связь между нелокальными и обратными задачами для эволюционных уравнений. Различные обратные задачи для уравнения переноса нейтронов изучались в [15]–[19]. Однако, нелокальные (по времени) задачи для уравнения переноса ранее почти не рассматривались. Возможно, что одно из первых обсуждений задачи переноса с нелокальным условием среднего по времени проведено в недавней заметке [20], где было взято уравнение простого переноса без интеграла столкновений. Наше настоящее исследование служит непосредственным продолжением этой работы.

2. ТЕХНИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе перечислим технические требования, связанные с поставленной задачей (1)–(3). Основным пространством, используемым в работе, является вещественное банахово пространство $L^1(\Omega \times V)$ с нормой

$$\|h\| = \int\limits_{\Omega\times V} |h(x,v)|\, dxdv, \qquad h \in L^1(\Omega \times V).$$

Через $L^1_+(\Omega \times V)$ обозначаем конус неотрицательных функций в $L^1(\Omega \times V)$. Как обычно, все соотношения в $\Omega \times V$ считаем выполненными почти всюду (п. в.).

С физической точки зрения выбранное пространство $L^1(\Omega \times V)$ является наиболее естественным, поскольку функция $u = u(x,v,t)$ в уравнении (1) имеет смысл «плотности распределения нейтронов», и интеграл

$$\int\limits_{\Omega\times V} u(x,v,t)\, dxdv$$

выражает полное число частиц, находящихся в области Ω в момент времени t со всевозможными скоростями $v \in V$ (см. [2, с. 252]). Использование пространства $L^1(\Omega \times V)$ имеет и некоторые технические преимущества при оценке нормы полугруппы переноса.

Для того чтобы уравнение (1) с краевым условием (2) интепретировать как эволюционное уравнение в пространстве $L^1(\Omega \times V)$ введем основной оператор A по формуле

$$A := A_0 - J_a + K, \tag{6}$$

где операторы A_0, J_a, K имеют вид

$$(A_0\psi)(x,v) := -v\,\nabla_x\psi(x,v), \tag{7}$$

$$(J_a\psi)(x,v) := \sigma_a(x,v)\,\psi(x,v), \tag{8}$$

$$(K\psi)(x,v) := \int\limits_V k(x,v,v')\,\psi(x,v')\; dv', \tag{9}$$

при п. в. $(x,v) \in \Omega \times V$. Здесь

$$v\,\nabla_x\psi(x,v) = \frac{d}{ds}\,\psi(x+sv,v)\Big|_{s=0} \tag{10}$$

означает производную в точке $x \in \Omega$ по направлению вектора $v \in V$.

Предполагаем, что функция $\sigma_a \in L^\infty(\Omega \times V)$ неотрицательна в $\Omega \times V$. Интегральное ядро $k(x,v,v')$ считаем измеримым и неотрицательным на $\Omega \times V \times V$. Кроме того, требуем, чтобы $k(x,\,\cdot\,,v) \in L^1(V)$ при п. в. $(x,v) \in \Omega \times V$ с дополнительным условием, что величина

$$\sigma_p(x,v) \equiv \int\limits_V k(x,v',v)\, dv', \qquad (x,v) \in \Omega \times V, \tag{11}$$

принадлежит $L^\infty(\Omega \times V)$.

Функция $\sigma_p(x,v)$, определенная формулой (11), называется коэффициентом размножения нейтронов, равным количеству частиц, порождаемых из состояния (x,v) во всех остальных состояниях (x,v') за счет рассеяния и деления. Непосредственно проверяется, что интегральный оператор K из формулы (9) является линейным ограниченным в пространстве $L^1(\Omega \times V)$, причем $\|K\| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega\times V} \sigma_p(x,v)$.

Пару функций $\langle \sigma_a, k\rangle$, удовлетворяющую перечисленным условиям, назовем *регулярной парой* (см. [1, с. 259]).

Как обычно (см. [2, с. 253]), оператор A_0 из формулы (7) называется оператором простого переноса, оператор J_a из формулы (8) — оператором поглощения, а интегральный оператор K из формулы (9) — оператором рассеяния. Вводят также комбинированный оператор

$$A_1 := A_0 - J_a = -v\,\nabla_x - \sigma_a(x,v), \tag{12}$$

называемый оператором потока с поглощением.

Основной оператор A из формулы (6), а также операторы A_0 и A_1 определены на общей области определения

$$D_0(\Omega \times V) \equiv D_0(\,v\,\nabla_x\,;\ \Omega \times V), \tag{13}$$

плотной в пространстве $L^1(\Omega \times V)$ и совпадающей с естественной областью определения оператора (10). Точное определение дается так (подробнее см. [20]).

Введем вспомогательную краевую функцию $\tau_0(x,v)$, определенную всюду в $\Omega \times V$ по формуле

$$\tau_0(x,v) \equiv \sup\{\,\tau \in \mathbb{R}:\quad x - v\tau \in \Omega\,\}. \tag{14}$$

Функция $\tau_0(x,v)$ выражает время свободного пробега от точки $x \in \Omega$ до границы Γ со скоростью $(-v)$. По определению функция $\psi \in L^1(\Omega \times V)$ принадлежит множеству (13), если при п. в. $(x,v) \in \Omega \times V$ функция $\psi(x+v\tau, v)$ определена на отрезке

$$-\tau_0(x,v) \leqslant \tau \leqslant \tau_0(x,-v) \tag{15}$$

и удовлетворяет условиям:

(i) $\psi(x+v\tau,v)$ абсолютно непрерывна по τ на отрезке (15);

(ii) $\psi(x+v\tau,v)\big|_{\tau=-\tau_0(x,v)} = \psi(x - v\,\tau_0(x,v),\ v) = 0.$

Для таких функций $\psi \in D_0(\Omega \times V)$ дифференциальный оператор (10) будет корректно определен п. в. в $\Omega \times V$.

Перейдем к полугруппам, связанным с указанными операторами (ср. с [2, гл. 12]). Непосредственная проверка показывает, что операторы A_0, A_1 из формул (7), (12) являются производящими для соответствующих полугрупп $U_0(t)$, $U_1(t)$ класса C_0, действующих при $t \geqslant 0$ на элемент $h \in L^1(\Omega \times V)$ по правилам

$$(U_0(t)h)(x,v) = \chi_\Omega(x-vt)\,h(x-vt,v), \tag{16}$$

$$(U_1(t)h)(x,v) = \chi_\Omega(x-vt)\,h(x-vt,v)\exp\left(-\int\limits_0^t \sigma_a(x-vs,v)\,ds\right). \tag{17}$$

Здесь $\chi_\Omega : \mathbb{R}^3_x \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества Ω. Формулы (16), (17) подразумевают, что $(U_0(t)h)(x,v) \equiv 0$ и $(U_1(t)h)(x,v) \equiv 0$ при $x - vt \notin \Omega$.

В силу ограниченности оператора K полный оператор $A = A_1 + K$ является производящим для полугруппы $U(t)$ класса C_0, удовлетворяющей интегральному уравнению Дюамеля

$$U(t) = U_1(t) + \int\limits_0^t U_1(t-s)KU(s)\,ds, \qquad t \geqslant 0, \tag{18}$$

с полугруппой $U_1(t)$ из формулы (17). В свою очередь, из (18) выводится известное разложение Дайсона–Филлипса

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t), \qquad W_0(t) \equiv U_1(t), \qquad W_n(t) \equiv \int\limits_0^t U_1(t-s)KW_{n-1}(s)\,ds. \tag{19}$$

Подробности см. в [7, с. 163].

Отметим еще свойства перечисленных полугрупп. В пространстве $L^1(\Omega \times V)$, полуупорядоченном при помощи замкнутого конуса $L^1_+(\Omega \times V)$, полугруппы $U_0(t)$, $U_1(t)$ являются *позитивными*, т. е. состоят из положительных операторов (теорию см. в [5]). Сравнивая (16) и (17), замечаем, что

$$0 \leqslant U_1(t) \leqslant U_0(t), \qquad t \geqslant 0,$$

в смысле все той же полуупорядоченности $L^1(\Omega \times V)$. Учитывая формулу (19) и положительность оператора K, имеем соотношение

$$0 \leqslant U_1(t) \leqslant U(t), \qquad t \geqslant 0.$$

В частности, полугруппа $U(t)$ также позитивна в пространстве $L^1(\Omega \times V)$.

В работе [18, с. 59–61] в развитие идей [1, с. 260–262] показано, что полугруппа $U(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|U(t)\| \leqslant e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{20}$$

со значением

$$\alpha \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega\times V} (\sigma_a(x,v) - \sigma_p(x,v)).$$

Здесь $\sigma_a(x,v)$ — коэффициент поглощения из уравнения (1), а функция $\sigma_p(x,v)$ определена формулой (11).

С физической точки зрения случай $\sigma_a(x,v) \leqslant \sigma_p(x,v)$ называется *режимом генерации*, а случай $\sigma_a(x,v) \geqslant \sigma_p(x,v)$ — *режимом поглощения* (см. [1, с. 260]). Обратим особое внимание на условие *строгого поглощения*

$$\alpha \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega\times V} (\sigma_a(x,v) - \sigma_p(x,v)) > 0. \tag{21}$$

В силу (20) условие (21) гарантирует, что полугруппа $U(t)$, порожденная основным оператором A, является экспоненциально сжимающей.

Полугрупповой подход позволяет ввести понятие *обобщенного решения* поставленной нелокальной задачи (1)–(3), как функции вида

$$u(x,v,t) = (U(t)f)(x,v), \qquad (x,v) \in \Omega \times V, \qquad t \geqslant 0. \tag{22}$$

Здесь $f \in L^1(\Omega \times V)$, и тогда $u \in C\big([0,+\infty);\, L^1(\Omega \times V)\big)$. Требуем, чтобы такая функция $u = u(x,v,t)$ удовлетворяла заданному условию (3). Если в формуле обобщенного решения (22) оказалось, что $f \in D_0(\Omega \times V)$ для введенного выше множества (13), то указанное решение задачи (1)–(3) будем называть *классическим* (в смысле теории полугрупп). В этом случае $u \in C^1\big([0,+\infty);\, L^1(\Omega \times V)\big)$, и $u(\cdot\,,\cdot\,,t) \in D_0(\Omega \times V)$ для любого значения $t \geqslant 0$. Уточним, что интеграл в (3) понимаем как векторный интеграл Римана, вычисляемый по норме $L^1(\Omega \times V)$.

Используя отмеченные соображения, временно заменим исходную задачу (1)–(3) задачей для абстрактного дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

3. АБСТРАКТНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|$ рассмотрим задачу о нахождении решения дифференциального уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{23}$$

из нелокального условия среднего по времени

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)\,dt = \varphi \tag{24}$$

с фиксированным значением $T > 0$. Как видим, формула (24) согласована с исходным условием (3). Предполагаем, что линейный замкнутый оператор A с плотной областью определения $D(A) \subset E$ порождает в пространстве E полугруппу $U(t)$ класса C_0. Элемент φ считаем заданным в E.

Обобщенным решением абстрактной задачи (23), (24) будем называть векторную функцию $u(t) = U(t)f$ с элементом $f \in E$, выбранным так, чтобы выполнялось нелокальное условие (24). Если, дополнительно, $f \in D(A)$, то решение $u(t) = U(t)f$ называем *классическим.* В подобных определениях считаем, что $t \geqslant 0$. Можно, конечно, ограничиться случаем $0 \leqslant t \leqslant T$.

Хорошо известно (см. [6, с. 5]), что при любом выборе элемента $f \in E$ интеграл (24) с функцией $u(t) = U(t)f$ должен принадлежать $D(A)$. Поэтому требование $\varphi \in D(A)$ необходимо для разрешимости нелокальной задачи (23), (24). Считаем выполненным такое предположение. Используя схему работы [12], установим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть линейный замкнутый оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0, удовлетворяющую оценке*

$$\|U(t)\| \leqslant Me^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{25}$$

с константами $M \geqslant 1$ и $\alpha > 0$. Тогда при любом выборе элемента $\varphi \in D(A)$ нелокальная задача (23), (24) *имеет и притом единственное обобщенное решение $u(t) = U(t)f$, где элемент f представим рядом Неймана*

$$f = -T\sum_{k=0}^{\infty} U(kT)A\varphi, \tag{26}$$

сходящимся по норме пространства E. Кроме того, справедлива оценка устойчивости

$$\|u(t)\| \leqslant Ce^{-\alpha t}\,\|A\varphi\|, \qquad t \geqslant 0, \tag{27}$$

где $C \equiv M^2\,T/(1 - e^{-\alpha T}) > 0$, а значения $M \geqslant 1$ и $\alpha > 0$ те же, что и в формуле (25).

Доказательство. Отметим, что условие (25) со значением $\alpha > 0$ гарантирует, что резольвента оператора A определена в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -\alpha$. В частности, существует ограниченный обратный оператор $A^{-1} : E \to E$, выражаемый в виде

$$A^{-1}h = -\int\limits_0^{\infty} U(t)h\,dt, \qquad h \in E. \tag{28}$$

По поводу такого представления см. [7, теорема II.1.10].

Выберем теперь $\varphi \in D(A)$. Пусть функция $u(t) = U(t)f$ с элементом $f \in E$ есть обобщенное решение задачи (23), (24). Применяя обратимый оператор A к условию (24), придем к эквивалентному соотношению

$$A\varphi = A\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T U(t)f\,dt\right) = \frac{U(T)f - f}{T}. \tag{29}$$

Последний переход в (29) основан на известной формуле теории полугрупп (см. [6, с. 5]). Итак, для того чтобы обобщенное решение $u(t) = U(t)f$ удовлетворяло нелокальному условию (24) необходимо и достаточно, чтобы элемент f был решением операторного уравнения

$$f - Bf = g \tag{30}$$

с оператором $B = U(T)$ и правой частью $g = -TA\varphi$.

В пространстве E введем эквивалентную норму

$$\|h\|_\alpha = \sup_{\tau \geqslant 0} \| e^{\alpha\tau} U(\tau)h \|, \qquad h \in E,$$

с тем же значением $\alpha > 0$, что и в формуле (25). Тогда $\|h\| \leqslant \|h\|_\alpha \leqslant M\|h\|$ для любого элемента $h \in E$, и, согласно [4, с. 59], в этой норме

$$\|U(t)\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{31}$$

Поэтому

$$\|B\|_\alpha = \|U(T)\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha T} < 1. \tag{32}$$

Оценка (32) гарантирует, что уравнение (30) однозначно разрешимо при любом заданном элементе $g \in E$, и его решение $f \in E$ представимо сходящимся рядом Неймана

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} B^k g = \sum_{k=0}^{\infty} U(kT)g. \tag{33}$$

Полагая $g = -TA\varphi$, получим однозначно определенный элемент $f \in E$, пригодный для обобщенного решения $u(t) = U(t)f$ поставленной задачи (23), (24). При такой подстановке формула (33) перейдет в (26). Обобщенное решение существует и единственно для любого элемента $\varphi \in D(A)$.

Осталось обосновать оценку устойчивости (27). Оценим элемент f из формулы (26). С учетом (31) имеем

$$\|f\|_\alpha \leqslant T \sum_{k=0}^{\infty} \|U(kT)\|_\alpha \, \|A\varphi\|_\alpha \leqslant T \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} \, \|A\varphi\|_\alpha = \frac{T}{1 - e^{-\alpha T}} \, \|A\varphi\|_\alpha.$$

Поскольку $\|f\| \leqslant \|f\|_\alpha$ и $\|A\varphi\|_\alpha \leqslant M\|A\varphi\|$, то

$$\|f\| \leqslant \frac{MT}{1 - e^{-\alpha T}} \, \|A\varphi\|. \tag{34}$$

Сочетая (25) и (34), получаем оценку (27) с константой $C \equiv M^2 T/(1 - e^{-\alpha T})$. Теорема доказана.

Следующий результат поясняет, когда решение из теоремы 1 будет классическим.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и элемент* $\varphi \in D(A)$ *в нелокальном условии* (24) *выбран так, что* $A\varphi \in D(A)$. *Тогда элемент* f *из формулы* (26) *тоже принадлежит* $D(A)$, *и решение* $u(t) = U(t)f$, *построенное в теореме* 1, *будет классическим.*

Доказательство. Следует из общих результатов [12].

Отметим особый случай, когда полугруппа $U(t)$ является *нильпотентной*, т. е.

$$U(t) = 0, \qquad \forall\, t \geqslant t_0 > 0, \tag{35}$$

с некоторым фиксированным значением $t_0 > 0$. Этот специальный класс вырожденных полугрупп естественно возникает при рассмотрении процесса простого переноса в ограниченной области Ω (см. [20]). Установим следующий полезный факт.

Теорема 3. *Пусть линейный замкнутый оператор A порождает нильпотентную полугруппу $U(t)$ класса C_0, удовлетворяющую соотношению* (35) *с фиксированным значением* $t_0 > 0$. *Тогда при любом выборе $\varphi \in D(A)$ нелокальная задача* (23), (24) *имеет и притом единственное решение $u(t) = U(t)f$, где элемент f представим в виде конечной суммы*

$$f = -T \sum_{k=0}^{N_0} U(kT)A\varphi, \qquad N_0 \equiv \lceil t_0/T \rceil - 1. \tag{36}$$

Здесь через $\lceil q \rceil$ обозначен потолок числа $q \in \mathbb{R}$, т. е. наименьшее целое число, большее или равное q.

Доказательство. Выберем произвольное значение $\alpha > 0$. Из условия (35) очевидно следует оценка (25) с соответствующей константой $M = M_\alpha \geqslant 1$. Теорема 1 применима. При этом

$$U(kT) = 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad k \geqslant t_0/T. \tag{37}$$

Но из (37) вытекает, что ряд Неймана (26) превращается в конечную сумму (36). Теорема доказана.

Отметим, что в работе [21] представлены аналоги теоремы 3, относящиеся к линейным обратным задачам для эволюционных уравнений.

Выделим особо случай, когда решение $u(t) = U(t)f$ задачи (23), (24) оказывается неотрицательным. Пусть E — полуупорядоченное банахово пространство с замкнутым конусом неотрицательных элементов $E_+ \equiv \{h \in E : h \geqslant 0\}$ (см. [5]). Установим следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть, дополнительно, пространство E полуупорядочено при помощи замкнутого конуса E_+ и полугруппа $U(t)$ позитивна, т. е. $U(t)\, E_+ \subset E_+$ при $t \geqslant 0$. Тогда для всякого элемента $\varphi \in D(A)$, такого, что $A\varphi \leqslant 0$, решение $u(t) = U(t)f$ задачи* (23), (24) *является неотрицательным.*

Доказательство. Используем позитивность полугруппы $U(t)$ и замкнутость в пространстве E конуса E_+. При условии $A\varphi \leqslant 0$ сумма ряда (26) будет неотрицательной. Поэтому $f \geqslant 0$, и обобщенное решение $u(t) = U(t)f$ тоже будет неотрицательным при всех значениях $t \geqslant 0$. Теорема доказана.

Отметим еще, что выбор $A\varphi \leqslant 0$ в теореме 4 автоматически означает неотрицательность элемента $\varphi \in D(A)$, ибо, согласно (28), очевидно имеем

$$\varphi = A^{-1}(A\varphi) = -\int_0^\infty U(t)A\varphi\, dt = \int_0^\infty U(t)(-A\varphi)\, dt \geqslant 0.$$

Такие элементы φ естественно считать *усиленно положительными* (см. [12]).

Применяя теоремы, установленные в этом разделе, получим «параллельные» результаты для исходной задачи (1)–(3).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Вернемся к уравнению переноса (1) с краевым условием (2) и заданным нелокальным условием (3). Используем понятия, введенные в разделе 2. Основной результат состоит в следующем.

Теорема 5. *Пусть $\langle \sigma_a, k \rangle$ — регулярная пара. Пусть выполнено условие строгого поглощения* (21). *Тогда при любом выборе функции $\varphi \in D_0(\Omega \times V)$ нелокальная задача* (1)–(3) *имеет и притом единственное обобщенное решение $u(x, v, t) = U(t)f(x, v)$, где функция $f(x, v)$ представима рядом*

$$f(x, v) = -T \sum_{k=0}^{\infty} U(kT)A\varphi(x, v), \tag{38}$$

сходящимся по норме пространства $L^1(\Omega \times V)$. *Здесь основной оператор* A *определен по формуле* (6), *а соответствующая полугруппа* $U(t)$ *определена по формуле* (19). *Кроме того, справедлива оценка устойчивости*

$$\| u(x,v,t)\| \leqslant Ce^{-\alpha t} \| A\varphi(x,v)\|, \qquad t \geqslant 0, \tag{39}$$

с константой $C \equiv T/(1-e^{-\alpha T}) > 0$, *не зависящей от выбора функции* $\varphi \in D_0(\Omega \times V)$, *и значением* $\alpha > 0$ *из формулы* (21).

Доказательство. Согласно (20) и (21) полугруппа $U(t)$, порожденная оператором A, является экспоненциально сжимающей, т. е. удовлетворяет нужной оценке (25) с константой $M = 1$ и численным значением $\alpha > 0$ из формулы (21). Требования теоремы 1 выполнены. Выберем теперь функцию $\varphi \in D_0(\Omega \times V)$ и рассмотрим задачу (1)–(3). Применяя теорему 1, получим представление (38) и оценку устойчивости (39) с соответствующей константой $C \equiv T/(1-e^{-\alpha T}) > 0$. Теорема доказана.

Отметим еще условия, при которых решение задачи (1)–(3) будет классическим.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5, *и функция* $\varphi \in D_0(\Omega \times V)$ *в нелокальном условии* (3) *выбрана так, что* $v\,\nabla_x\varphi \in D_0(\Omega\times V)$. *Тогда функция* $f(x,v)$ *из формулы* (38) *тоже принадлежит* $D_0(\Omega \times V)$, *и решение* $u(x,v,t) = U(t)f(x,v)$, *построенное в теореме* 5, *будет классическим.*

Доказательство. В силу конструкции оператора A (см. формулы (6)–(9)) требование $v\,\nabla_x\varphi \in D_0(\Omega \times V)$ эквивалентно тому, что $A\varphi \in D_0(\Omega \times V) \equiv D(A)$. Оставшееся следует из теоремы 2.

Отдельно рассмотрим вырожденный случай, когда функция $k(x,v,v') \equiv 0$. Поскольку интеграл столкновений в (1) отсутствует, уравнение переноса приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\,\nabla_x u + \sigma_a(x,v)u = 0, \qquad u = u(x,v,t).$$

Установим следующий результат.

Теорема 7. *Пусть* $k(x,v,v') \equiv 0$ *в* $\Omega\times V\times V$. *Пусть функция* $\sigma_a \in L^\infty(\Omega\times V)$ *неотрицательна в* $\Omega\times V$. *Тогда при любом выборе функции* $\varphi \in D_0(\Omega\times V)$ *нелокальная задача* (1)–(3) *имеет и притом единственное обобщенное решение* $u \equiv u(x,v,t)$, *представимое в виде*

$$u(x,v,t) = \chi_\Omega(x-vt)\, f(x-vt,v)\, \exp\left(-\int\limits_0^t \sigma_a(x-vs,v)\,ds\right), \tag{40}$$

с начальным условием

$$f(x,v) = T\sum_{k=0}^{n_0(x,v)} \psi(x-vkT,v)\, \exp\left(-\int\limits_0^{kT} \sigma_a(x-vs,v)\,ds\right), \qquad (x,v)\in\Omega\times V. \tag{41}$$

Здесь $\psi(x,v) \equiv (v\,\nabla_x + \sigma_a(x,v))\,\varphi(x,v)$, *а значение* $n_0(x,v)$ *вычисляется по правилу*

$$n_0(x,v) \equiv \left\lceil \frac{\tau_0(x,v)}{T} \right\rceil - 1, \qquad (x,v)\in\Omega\times V, \tag{42}$$

с функцией $\tau_0(x,v)$ *из формулы* (14).

Доказательство. При $k(x,v,v') \equiv 0$ основной производящий оператор A превращается в оператор A_1 из формулы (12) с соответствующей полугруппой $U_1(t)$, явно выраженной в виде (17). Полугруппа $U_1(t)$ является нильпотентной: из формулы (17) следует, что $U_1(t) = 0$ при $t \geqslant t_0 \equiv d/\nu_{\min}$, где $d > 0$ — диаметр области Ω, а $\nu_{\min}$ — минимальная абсолютная скорость из формулы (4). Воспользуемся специальной теоремой 3. В силу (36) начальное условие $f(x,v)$ выражается в виде

$$f(x,v) = T\sum_{k=0}^{N_0} U_1(kT)\,\psi(x,v), \qquad N_0 \equiv \lceil\, t_0/T\,\rceil - 1, \tag{43}$$

с функцией $\psi(x,v) = -A_1\varphi(x,v) = (v\,\nabla_x + \sigma_a(x,v))\,\varphi(x,v)$. Здесь

$$U_1(kT)\psi(x,v) = \chi_\Omega(x - vkT)\,\psi(x - vkT, v)\,\exp\left(-\int_0^{kT}\sigma_a(x - vs, v)\,ds\right).$$

Ясно, что $U_1(kT)\psi(x,v) = 0$ при условии $x - vkT \notin \Omega$, т. е. когда $kT \geqslant \tau_0(x,v)$ или, что эквивалентно, когда $k \geqslant \tau_0(x,v)/T$ с функцией $\tau_0(x,v)$ из формулы (14). Поэтому формула (43) допускает запись (41) со значением $n_0(x,v)$ из формулы (42). Согласно теореме 3 функция $u(x,v,t) = U_1(t)f(x,v)$ вида (40) является единственным обобщенным решением задачи (1)–(3) при условии, что $k(x,v,v') \equiv 0$. Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что при подстановке начального условия (41) в формулу (40) результат допускает явную запись

$$u(x,v,t) = \begin{cases} T\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0(x-vt,v)} \psi(x - v(t+kT), v)\,\exp\left(-\int_0^{t+kT}\sigma_a(x - vs, v)\,ds\right), & \tau_0(x,v) > t, \\ 0, & \tau_0(x,v) \leqslant t, \end{cases}$$

с функцией $\psi(x,v) \equiv (v\,\nabla_x + \sigma_a(x,v))\,\varphi(x,v)$ и значением

$$n_0(x - vt, v) \equiv \left\lceil \frac{\tau_0(x - vt, v)}{T} \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{\tau_0(x,v) - t}{T} \right\rceil - 1, \qquad (x,v) \in \Omega \times V.$$

Детальный анализ подобных формул и разбор свойств считающей функции $n_0(x,v)$ дан в нашей предыдущей работе [20].

Отметим еще, что требование неотрицательности функции $\sigma_a(x,v)$ в теореме 7 является излишним и не повляет на результат. Данное требование включено в теорему 7 для ее согласования с общими предположениями настоящей работы.

В конце раздела дадим теорему о неотрицательности обобщенного решения нелокальной задачи (1)–(3).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия основной теоремы* 5. *Считаем, что пространство* $L^1(\Omega \times V)$ *полуупорядочено при помощи замкнутого конуса* $L^1_+(\Omega \times V)$. *Тогда при любом выборе функции* $\varphi \in D_0(\Omega \times V)$, *такой, что*

$$A\varphi(x,v) \leqslant 0, \qquad (x,v) \in \Omega \times V, \tag{44}$$

с оператором A *из формулы* (6), *обобщенное решение* $u(x,v,t)$ *задачи* (1)–(3) *будет неотрицательным в* $\Omega \times V$ *при всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Следует из теоремы 4 с учетом позитивности полугруппы $U(t)$, порожденной основным оператором A из формулы (6).

Отметим, что решение $u(x,v,t)$ в теореме 7 также будет неотрицательным при выполнении условия $A_1\varphi(x,v) \leqslant 0$, аналогичного (44). Это следует из позитивности полугруппы $U_1(t)$ и формулы (41) с функцией $\psi(x,v) = -A_1\varphi(x,v) = (v\,\nabla_x + \sigma_a(x,v))\,\varphi(x,v)$.

Автор глубоко благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и поддержку в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рид, М. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1982. — 443 с.

2. Kaper, H. G. Spectral methods in linear transport theory / H. G. Kaper, C. G. Lekkerkerker, J. Hejtmanek. — Basel : Birkhäuser, 1982. — 345 p.

3. Mokhtar-Kharroubi, M. Mathematical topics in neutron transport theory: new aspects / M. Mokhtar-Kharroubi. — World Scientific, Singapore, 1997. — 344 p.

4. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

5. Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент и др. — М. : Мир, 1992. — 351 с.

6. Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. — N.Y. : Springer-Verlag, 1983. — 279 p.

7. Engel, K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel. — N.Y. : Springer, 2000. — 586 p.

8. Jörgens, K. An asymptotic expansion in the theory of neutron transport / K. Jörgens // Comm. Pure Appl. Math. — 1958. — V. 11, № 2. — P. 219–242.

9. Greiner, G. Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equation / G. Greiner // Math. Zeitschrift. — 1984. — V. 185, № 2. — P. 167–177.

10. Voigt, J. Spectral properties of the neutron transport equation / J. Voigt // J. Math. Anal. Appl. — 1985. — V. 106, № 1. — P. 140–153.

11. Weis, L. W. A generalization of the Vidav-Jorgens perturbation theorem for semigroups and its application to transport theory / L. W. Weis // J. Math. Anal. Appl. — 1988. — V. 129, № 1. — P. 6–23.

12. Тихонов, И. В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве / И. В. Тихонов // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 6. — С. 841–843.

13. Тихонов, И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / И. В. Тихонов // Известия РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 133–166.

14. Прилепко, А. И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I / А. И. Прилепко // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 11. — С. 1560–1571.

15. Прилепко, А. И. Обратные задачи определения коэффициента, индикатрисы рассеяния и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса / А. И. Прилепко, А. Л. Иванков // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 5. — С. 870–885.

16. Орловский, Д. Г. О некоторых обратных задачах для линеаризованного уравнения Больцмана / Д. Г. Орловский, А. И. Прилепко // Журнал вычисл. математики и матем. физики. — 1987. — Т. 27, № 11. — С. 1690–1700.

17. Прилепко, А. И. Обратные задачи определения параметров нестационарного кинетического уравнения переноса по дополнительной информации о следах искомой функции / А. И. Прилепко, Н. П. Волков // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 1. — С. 136–146.

18. Тихонов, И. В. Обратные задачи для эволюционных уравнений и приложения к уравнению переноса: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Москва, 1993. — 85 с.

19. Тихонов, И. В. Корректность обратной задачи с финальным переопределением для нестационарного уравнения переноса / И. В. Тихонов // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1995. — № 1. — С. 56–64.

20. Тихонов, И. В. Формулы явного решения в модельной нелокальной задаче для уравнения простого переноса / И. В. Тихонов, Ву Нгуен Шон Тунг // Матем. заметки СВФУ. —

2017. — Т. 24, № 1. — С. 57–73.

21. Тихонов, И. В. Метод решения обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой / И. В. Тихонов, Ву Нгуен Шон Тунг // Дифференц. уравнения и процессы управления. — 2017. — № 2. — С. 51–58.

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. V. 3. Scattering theory. [Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. T. 3. Teoriya rasseyaniya]. Moscow: Mir, 1982, 443 p.

2. Kaper H.G., Lekkerkerker C.G., Hejtmanek J. Spectral methods in linear transport theory. Birkhäuser, Basel, 1982, 345 p.

3. Mokhtar-Kharroubi M. Mathematical topics in neutron transport theory: new aspects. World Scientific, Singapore, 1997, 344 p.

4. Kreyn S.G. Linear Differential Equations in Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

5. Clement Ph. et. al. One-parameter semigroups. [Klement F. i dr. Odnoparametricheskie polugruppy]. Moscow: Mir, 1992, 351 p.

6. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York, 1983, 279 p.

7. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, New York, 2000, 586 p.

8. Jörgens K. An asymptotic expansion in the theory of neutron transport. Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, no. 2, pp. 219–242.

9. Greiner G. Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equation. Math. Zeitschrift, 1984, vol. 185, no. 2, pp. 167–177.

10. Voigt J. Spectral properties of the neutron transport equation. J. Math. Anal. Appl., 1985, vol. 106, no. 1, pp. 140–153.

11. Weis L.W. A generalization of the Vidav-Jorgens perturbation theorem for semigroups and its application to transport theory. J. Math. Anal. Appl., 1988, vol. 129, no. 1, pp. 6–23.

12. Tikhonov I.V. Solvability of a problem with a nonlocal integral condition for a differential equation in a Banach space. [Tikhonov I.V. O razreshimosti zadachi s nelokal'nym integral'nym usloviyem dlya differentsial'nogo uravneniya v banakhovom prostranstve]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 6, pp. 841–843.

13. Tikhonov I.V. Uniqueness theorems in linear nonlocal problems for abstract differential equations. [Tikhonov I.V. Teoremy yedinstvennosti v lineynykh nelokal'nykh zadachakh dlya abstraktnykh differentsial'nykh uravneniy]. *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 133–166.

14. Prilepko A.I. The semigroup method for inverse, nonlocal, and nonclassical problems. Prediction-Control and Prediction-Observation for evolution equations: I. [Prilepko A.I. Metod polugrupp resheniya obratnykh, nelokal'nykh i neklassicheskikh zadach. Prognoz-upravleniye i prognoz-nablyudeniye evolyutsionnykh uravneniy. I]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 11, pp. 1560–1571.

15. Prilepko A.I., Ivankov A.L. Inverse problems for determining the coefficient, the scattering indicatrix and the right-hand side of a time-dependent multiple-speed transport equation. [Prilepko A.I., Ivankov A.L. Obratnyye zadachi opredeleniya koeffitsiyenta, indikatrisy rasseyaniya i pravoy chasti nestatsionarnogo mnogoskorostnogo uravneniya perenosa]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 5, pp. 870–885.

16. Orlovskij D.G., Prilepko A.I. Some inverse problems for the linearized Boltzmann equation. [Orlovskij D.G., Prilepko A.I. O nekotorykh obratnykh zadachakh dlya linearizovannogo

uravneniya Bol'tsmana]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational mathematics and mathematical physics*, 1987, vol. 27, no. 11, pp. 1690–1700.

17. Prilepko A.I., Volkov N.P. Inverse problems of finding parameters of a nonstationary kinetic transport equation from supplementary information on traces of the unknown function. [Prilepko A.I., Volkov N.P. Obratnyye zadachi opredeleniya parametrov nestatsionarnogo kineticheskogo uravneniya perenosa po dopolnitel'noy informatsii o sledakh iskomoy funktsii]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 1, pp. 136–146.

18. Tikhonov I.V. Inverse problems for evolution equations and applications to the transport equation. [Tikhonov I.V. Obratnyye zadachi dlya evolyutsionnykh uravneniy i prilozheniya k uravneniyu perenosa]. Diss. ... cand. fiz.-mat. sciences, Moscow, 1993, 85 p.

19. Tikhonov I.V. Well-posedness of an inverse problem with final overdetermination for the nonstationary transport equation. [Tikhonov I.V. Korrektnost' obratnoy zadachi s final'nym pereopredeleniyem dlya nestatsionarnogo uravneniya perenosa]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naya matematika i kibernetika — Moscow university computational mathematics and cybernetics*, 1995, no. 1, pp. 56–64.

20. Tikhonov I.V., Vu Nguyen Son Tung. Formulas for an explicit solution of the model nonlocal problem associated with the ordinary transport equation. [Tikhonov I.V., Vu Nguyen Son Tung. Formuly yavnogo resheniya v model'noy nelokal'noy zadache dlya uravneniya prostogo perenosa]. *Matematicheskiye zametki SVFU — Yakutian Mathematical Journal*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 57–73.

21. Tikhonov I.V., Vu Nguyen Son Tung. A method of solving the inverse problem for the evolution equation with a superstable semigroup. [Tikhonov I.V., Vu Nguyen Son Tung. Metod resheniya obratnoy zadachi dlya evolyutsionnogo uravneniya s superustoychivoy polugruppoy]. *Differentsial'nyye uravneniya i protsessy upravleniya — Journal differential equations and control processes*, 2017, no. 2, pp. 51–58.

Ву Нгуен Шон Тунг, аспирант кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, Москва, Российская Федерация
E-mail: vnsontung@mail.ru

Vu Nguyen Son Tung, Postgraduate Student of Mathematical Analysis Department, Moscow State University of Education, Moscow, Russian Federation
E-mail: vnsontung@mail.ru