УДК 517.95; 517.984

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ*

М. Ш. Бурлуцкая, И. В. Колесникова, Е. А. Шайна

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07.06.2016 г.

Аннотация. В работе исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией, рассматриваемая на геометрическом графе из двух ребер, одно из которых образует цикл. В задаче с симметричным потенциалом формальный ряд удается просуммировать и получить явное решение. В общем случае приводится обоснование применения метода Фурье на основе полученных уточненных асимптотических формул для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи. Использованы приемы по ускорению сходимости рядов, позволяющие преобразовать ряд, представляющий формальное решение по методу Фурье, и доказать возможность его почленного дифференцирования. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования.

Ключевые слова: инволюция, функционально-дифференциальный оператор, смешанная задача, метод Фурье, геометрический граф.

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH INVOLUTION ON THE GRAPH

M. Sh. Burlutskaya, I. V. Kolesnikova, E. A. Shayna

Abstract. We study the mixed problem for the first order differential equation with involution at the simplest graph of the two edges, one of which forms a cycle. In the case of a symmetric potential, the formal series is summed and an explicit solution is obtained. In the general case, using the received specified asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem, the application of the Fourier method is substantiated. We used techniques, which allow to transform a series representing the formal solution on Fourier method, and to prove the possibility of its term by term differentiation. At the same time on the initial problem data minimum requirements are imposed.

Keywords: involution, functional differential operator, mixed problem, Fourier method, geometric graph.

Рассматривается простейший геометрический граф Γ, состоящий из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю, а второе примыкает к нему. Ребра графа параметризованы отрезком $[0,1]$. На Γ исследуется смешанная задача, определяемая как задача в пространстве вектор-функций $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ (T — знак транспонирования):

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_k(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1-x} + q_k(x)u_k(x,t), \quad k = 1,2 \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t), \tag{2}$$

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \tag{3}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16–11–10125, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

где $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Предполагаем выполненными требования: $q_k(x) \in C^1[0,1]$ и вещественные, $\varphi_k(x) \in C^1[0,1]$, и

$$\varphi_1(0)=\varphi_1(1)=\varphi_2(0),\ \varphi_1'(0)=\varphi_1'(1),\ \varphi_1'(0)+\varphi_1(0)\,(q_1(0)-q_2(0))-\varphi_2'(1)=0. \tag{4}$$

Решение ищется в классе вектор-функций, непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0,1] \times (-\infty, +\infty)$. Краевые условия (2) обеспечивают непрерывность решения задачи в узле графа. Условия (4) являются естественными и минимальными для существования классического решения (необходимо следуют из постановки задачи).

Решая задачу методом Фурье, мы используем прием ускорения сходимости рядов, который на базе уточненных асимптотик собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи позволяет получить классическое решение при минимальных требованиях гладкости на начальные данные задачи (см. [1]–[2] и библиографию в них). Рассматриваемый граф имеет минимальную структуру, что упрощает вычисления, но служит базой для построения других моделей. Задача (1)–(3) обобщает задачи, рассмотренные в [2], [3].

К начально-краевым задачам и задачам граничного управления на графах приводит моделирование колебательных процессов на сетевых структурах, например, струнных и струнно-стержневых конструкций (см. [4]–[7]). В указанных работах обсуждаются и вопросы, связанные с обоснованием метода Фурье (см, например, [7]).

Согласно методу Фурье, положим $u_1(x,t) = y_1(x)T(t)$, $u_2(x,t) = y_2(x)T(t)$. Тогда $T(t) = e^{\lambda i t}$, а соответствующая (1)–(3) спектральная задача есть $Ly = \lambda y$, $y = (y_1, y_2)^T$, где

$$Ly = \Big(y_1'(1-x) + q_1(x)y_1(x),\, y_2'(1-x) + q_2(x)y_2(x)\Big)^T,$$
$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

1. ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ СИММЕТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Сначала рассмотрим задачу для уравнений

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_k(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1-x} + q_k^0(x)u_k(x,t), \quad k = 1,2, \tag{5}$$

с условиями (2), (3) (так называемую эталонную задачу), где $q_k^0(x)$, удовлетворяют условиям $q_k^0(x) = q_k^0(1-x)$. Здесь достаточно требовать $q_k^0(x) \in C[0,1]$. Соответствующий оператор будем обозначать L_0.

Используя формулу из [3, Лемма 2] для общего решения уравнения

$$y_k{}'(1-x) + q_k^0(x)y_k(x) = \lambda y_k(x),$$

где $y_k(x)$ — скалярная функция, в случае симметрической $q_k^0(x)$, получим

Лемма 1 ([8]). *Если* $a_1 = \int\limits_0^1 q_1^0(t)\,dt$, $a_2 = \pi/2 + \int\limits_0^1 q_2^0(t)\,dt$ *не кратны* 2π, *и* $a_1 \neq a_2$, *то собственные значения оператора* L_0 *простые и образуют две серии* $\lambda_{1n}^0 = a_1 + 2\pi n$, $\lambda_{2n}^0 = a_2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, *а соответствующие собственные функции*

$$y_{1n}^0(x) = \Big(g_1^0(x, \lambda_{1n}^0),\, \gamma g_2^0(x, \lambda_{1n}^0)\Big)^T, \quad y_{2n}^0(x) = \Big(0,\, g_2^0(x, \lambda_{2n}^0)\Big)^T,$$

где $\gamma = \dfrac{1+i}{1-e^{ai}}$, $a = a_1 - a_2$, $g_k^0(x,\lambda) = s_k(1-x)e^{\lambda i(1-x)} - is_k(x)e^{\lambda ix}$, $s_k(x) = \exp\left(-i\int\limits_0^x q_k^0(t)dt\right)$.

Сопряженный оператор L_0^* имеет те же собственные значения, его собственные функции есть:

$$z_{1n}^0(x) = \Big(g_1^0(x,\lambda_{1n}^0),\, 0\Big)^T, \quad z_{2n}^0(x) = \Big(g_1^0(x,\lambda_{2n}^0),\, \frac{i}{\gamma e^{ai}}\, g_2^0(x,\lambda_{2n}^0)\Big)^T.$$

Также как в [3] устанавливается

Лемма 2. *Системы $\{y_{1n}^0(x)\} \cup \{y_{2n}^0(x)\}$ и $\{z_{1n}^0(x)\} \cup \{z_{2n}^0(x)\}$ образуют полные системы в пространстве вектор-функций $L_2^2[0,1]$.*

Всюду далее через $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2^2[0,1]$ или $L_2[0,1]$ (в зависимости от рассматриваемых функций).

Формальное решение смешанной задачи (1)–(3) представляется рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} y_{1n}^0(x) e^{\lambda_{1n}^0 it} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} y_{2n}^0(x) e^{\lambda_{2n}^0 it} \tag{6}$$

Из условия (3) при $t=0$ имеем

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} y_{1n}^0(x) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} y_{2n}^0(x). \tag{7}$$

Лемма 3. *Если $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ удовлетворяет условиям $\varphi_j(x) \in C^1[0,1]$ и $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0)$, то $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\varphi, z_{1n}^0\right) y_{1n}^0(x) + \frac{\gamma i}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\varphi, z_{2n}^0\right) y_{2n}^0(x), \tag{8}$$

и ряды в (8) сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. В (7) имеем $c_{1n} = \dfrac{(\varphi, z_{1n}^0(x))}{(y_{1n}^0(x), z_{1n}^0(x))}$, $c_{2n} = \dfrac{(\varphi, z_{2n}^0(x))}{(y_{2n}^0(x), z_{2n}^0(x))}$. Учитывая свойства $g_k^0(x,\lambda)$ (см. [3]), получим $(y_{1n}^0(x), z_{1n}^0(x)) = 2$, $(y_{2n}^0(x), z_{2n}^0(x)) = -\frac{2}{\gamma}$. Тогда $c_{1n} = \frac{1}{2}(\varphi_1, g_1^0(x,\lambda_{1n}^0))$, $c_{2n} = \frac{\gamma}{2}(\varphi_1, g_1^0(x,\lambda_{2n}^0)) + \frac{1}{2}(\varphi_2, g_2^0(x,\lambda_{2n}^0))$.

Далее $(\varphi, z_{kn}^0(x)) = \frac{1}{\lambda_{kn}^0}(\varphi, L^* z_{kn}^0(x)) = \frac{1}{\lambda_{kn}^0}(w, z_{kn}^0(x))$, где $w = L\varphi \in L_2^2[0,1]$, $k=1,2$. Обозначая через α_n любые числа такие, что $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, имеем $(w, z_{kn}^0(x)) = \alpha_n$ (см. [3]), откуда в силу того, что $\frac{1}{\lambda_n^0} = O(1/n)$, коэффициенты Фурье имеют оценку $\frac{\alpha_n}{n}$. Учитывая, что $y_{1n}^0(x)$, $y_{2n}^0(x)$ ограничены, получаем абсолютную и равномерную сходимость рядов в (8). □

Таким образом, для формального решения $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ имеем следующую формулу:

$$u_1(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} g_1^0(x,\lambda_{1n}^0) e^{\lambda_{1n}^0 it},$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n}\gamma g_2^0(x,\lambda_{1n}^0) e^{\lambda_{1n}^0 it} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} g_2^0(x,\lambda_{2n}^0) e^{\lambda_{2n}^0 it}.$$

Здесь ряды сходится абсолютно и равномерно при всех $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 1. *При выполнении условий* (4) *классическое решение задачи* (1)–(3) *существует и имеет вид:* $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, *где*

$$u_1(x,t) = \big[p_1(1-x)f_1(1-x+t) - ip_1(x)f_1(x+t)\big]e^{a_1 it}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = \gamma\big[p_3(1-x)f_1(1-x+t) - ip_3(x)f_1(x+t)\big]e^{a_1 it}+ \\ +\big[p_2(1-x)f_2(1-x+t) - ip_2(x)f_2(x+t)\big]e^{a_2 it}, \end{aligned} \tag{10}$$

$f_k(x)$ *— непрерывно дифференцируемые при* $x \in (-\infty, +\infty)$*, периодические с периодом 1 функции, причем при* $x \in [0,1]$

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2p_1(x)}\left[i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)\right],$$
$$f_2(x) = \tfrac{1}{2p_2(x)}\left[i\varphi_2(x) + \varphi_2(1-x)\right] - \tfrac{\gamma}{2p_4(x)}\left[i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)\right],$$

$p_1(x) = s_1(x)e^{a_1 ix}$, $p_2(x) = s_2(x)e^{a_2 ix}$, $p_3(x) = s_2(x)e^{a_1 ix}$, $p_4(x) = s_1(x)e^{a_2 ix}$.

Доказательство. Учитывая вид $g_k^0(x,\lambda)$ имеем:

$$u_1(x,t) = \left[s_1(1-x)e^{a_1 i(1-x)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n}e^{2\pi ni(1-x+t)} - is_1(x)e^{a_1 ix}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n}e^{2\pi ni(x+t)}\right]e^{a_1 it},$$

откуда, полагая $f_1(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} c_{1n}e^{2n\pi ix}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, придем к (9). В свою очередь, c_{1n} преобразуется к виду $c_{1n} = \frac{1}{2}\left(\overline{p_1(x)}(\varphi_1(1-x) + i\varphi_1(x))/2, e^{2\pi nix}\right)$. Отсюда в силу полноты тригонометрической системы имеем при $x \in [0,1]$ $f_1(x) = \frac{1}{2p_1(x)}\left[i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)\right]$.

Аналогично для $u_2(x,t)$ получим (10), где $f_2(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} c_{2n}e^{2n\pi ix}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим подробнее $f_2(x)$. Имеем

$$c_{2n} = -\frac{\gamma}{2}(\varphi_1, g_1(x,\lambda_{2n}^0)) + \frac{1}{2}(\varphi_2, g_2(x,\lambda_{2n}^0)) = -\frac{\gamma}{2}(\widetilde{\varphi}_1, e^{2n\pi ix}) + \frac{1}{2}(\widetilde{\varphi}_2, e^{2n\pi ix}),$$

где $\widetilde{\varphi}_1(x) = \overline{s_1(x)e^{a_2 ix}}[i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)]$, $\widetilde{\varphi}_2(x) = \overline{s_2(x)e^{a_2 ix}}[i\varphi_2(x) + \varphi_2(1-x)]$.

Обозначая суммы рядов $f_3(x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty}(\widetilde{\varphi}_1, e^{2n\pi ix})e^{2n\pi ix}$, $f_4(x) = \frac{\gamma}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty}(\widetilde{\varphi}_2, e^{2n\pi ix})e^{2n\pi ix}$, при $x \in [0,1]$ имеем $f_3(x) = \frac{i\varphi_1(x)+\varphi_1(1-x)}{2s_1(x)e^{a_2 ix}}$, $f_4(x) = \frac{i\varphi_1(x)+\varphi_1(1-x)}{2s_2(x)e^{a_2 ix}}$, откуда $f_2(x) = f_3(x) - f_4(x)$.

Так как по условию $\varphi_1(x) \in C^1[0,1]$, то $f_1(x) \in C^1[0,1]$, а из $\varphi_1(0) = \varphi_1(1)$, $\varphi_1'(0) = \varphi_1'(1)$ и периодичности $f_1(x)$, следует $f_1(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$.

Функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ — периодические с периодом 1 и, вообще говоря, разрывны при $x \in \mathbb{Z}$. Однако, учитывая (4) непосредственной проверкой (как, например, в [3]) можем убедиться, что $f_2(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$. $\square$

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Решение спектральной задачи $Ly = \lambda y$ связано с решением уравнения

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{11}$$

которое сводится к известной системе Дирака (см. [3, Лемма 1], а также [1]). Используя результаты из [1], получим

Лемма 4. *При достаточно больших* $|\lambda|$ *общее решение уравнения* (11) *есть* $y(x) = y(x,\mu) = cg(x,\mu)$, *где* c — *произвольная постоянная,*

$$g(x,\lambda) = p_{11}(x,\lambda)a(\lambda) + p_{12}(x,\lambda), \tag{12}$$

$p_{11}(x,\lambda) = (h_1(x)u_{11}(x) - ih_2(x)u_{21}(x))e^{-i\lambda x}$, $p_{12}(x,\lambda) = (h_1(x)u_{12}(x) - ih_2(x)u_{22}(x))e^{i\lambda x}$, $h_j(x) = \exp\left(\frac{\varepsilon_j i}{2}\int\limits_0^x (q(t) + q(1-t))dt\right)$, $\varepsilon_j = (-1)^{j+1}$, $j = 1, 2$, $a(\lambda) = \frac{h_2(1/2)u_{22}(1/2) - h_1(1/2)u_{12}(1/2)}{h_1(1/2)u_{11}(1/2) - h_2(1/2)u_{21}(1/2)}\, e^{i\lambda}$, $u_{ij}(x)$ *определены в* [1, *Теорема* 3.2].

Решением спектральной задачи $Ly = \lambda y$ является вектор-функция $y(x) = (c_1 g_1(x,\lambda), c_2 g_2(x,\lambda))^T$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а $g_k(x,\lambda)$ задается формулой (12), где все функции определяются через $q_k(x)$. Уравнение для собственных значений имеет вид: $(g_1(0,\lambda) - g_1(1,\lambda))g_2(0,\lambda) = 0$. Учитывая лемму 4 и уточненные асимптотические формулы из [1, Теорема 3.2], также как в [1] получим следующие утверждения

Теорема 2. *Если* a_1 *и* a_2 *из леммы 1, то собственные значения оператора* L, *достаточно большие по модулю, простые и образуют две серии:*

$$\lambda_{1n} = \lambda_{1n}^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad \lambda_{2n} = \lambda_{2n}^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots),$$

где λ_{kn}^0 *из леммы 1, через* α *обозначаются различные константы, не зависящие от* n *(из конечного набора констант), через* α_n *такие константы, что* $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

Собственные функции оператора L *образуют две серии:*

$$y_{1n}(x,\lambda_{1n}) = (g_1(x,\lambda_{1n}), \gamma_n g_2(x,\lambda_{1n}))^T, \qquad y_{2n}(x,\lambda_{2n}) = (0, g_2(x,\lambda_{2n}))^T,$$

где $\gamma_n = g_1(0,\lambda_{1n})/g_2(0,\lambda_{1n})$.

Для сопряженного оператора L^*, имеющего вид $L^*z = Lz$, $z_2(0) = z_1(1) - z_1(0) + iz_2(1) = 0$, где $z = z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, аналогично получим

Теорема 3. *Сопряженный оператор* L^* *имеет те же собственные значения, что и оператор* L. *Соответствующие собственные функции есть*

$$z_{1n}(x,\lambda_{1n}) = (g_1(x,\lambda_{1n}),\, 0)^T, \quad z_{2n}(x,\lambda_{2n}) = (g_1(x,\lambda_{2n}),\, \widetilde{\gamma}_n g_2(x,\lambda_{2n}))^T,$$

где $\widetilde{\gamma}_n = \frac{g_1(0,\lambda_{2n}) - g_1(1,\lambda_{2n})}{g_2(1,\lambda_{2n})}$.

Всюду далее будем обозначать λ_n одно их собственных значений в теореме 2, λ_n^0 — его главная часть, и $y_n(x,\lambda_n)$ $(z_n(x,\lambda_n))$ — соответствующие собственные функции оператора L (L^*). Также как [1, Теорема 3.6] получим

Лемма 5. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$g_k(x,\lambda_n) = g_k^0(x,\lambda_n^0) + \Omega_n(x,\lambda_n^0) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{13}$$

где $g_k^0(x,\lambda_n^0) = h_{k2}(1-x)e^{\lambda_n^0 i(1-x)} - ih_{k2}(x)e^{\lambda_n^0 ix}$, $h_{k2}(x) = \exp\left(-\frac{i}{2}(q_k(t) + q_k(1-t))\,dt\right)$, $\Omega_n(x,\lambda_n^0) = \Omega_{1n}(x,\lambda_n^0) + \Omega_{2n}(x,\lambda_n^0)$, $\Omega_{kn}(x,\lambda_n^0)$ *определены в* [1, *Теорема*3.6] *через суммы выражений вида* $\frac{1}{n}b(x)e^{\pm\lambda_n^0 ix}$, $\frac{1}{n}b(x)\int\limits_0^x e^{\pm\lambda_n^0 i\tau}b(x)\,d\tau$, $b(x)$ *обозначают различные непрерывные функции из некоторого конечного набора. Оценки* $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *равномерны по* x.

Замечание. Отметим, что если $q_k^0(x) = (q_k(x)+q_k(1-x))/2$, то $s_k(x)$ из п. 1 и есть $h_{k2}(x)$.

Лемма 6. *Для собственных функций операторов L и L^* справедливы асимптотические формулы*

$$y_n(x,\lambda_n) = y_n^0(x,\lambda_n^0) + (\Omega_n(x,\lambda_n^0), \Omega_n(x,\lambda_n^0))^T + O(1/n^2),$$
$$z_n(x,\lambda_n) = z_n^0(x,\lambda_n^0) + (\Omega_n(x,\lambda_n^0), \Omega_n(x,\lambda_n^0))^T + O(1/n^2),$$

где $y_n^0(x,\lambda_n) = y_n^0(x)$, $z_n^0(x,\lambda_n) = z_n^0(x)$ из леммы 1.

Также, как в [1], используя ограниченность ядра резольвенты, доказывается, что собственные функции операторов L и L^* образуют полные системы в $L_2^2[0,1]$, и всякая функция $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, удовлетворяющая условиям $f_j(x) \in C^1[0,1]$ и $f_1(0) = f_1(1) = f_2(0)$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора L.

3. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda_n|=r} (R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda it}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(\varphi, z_n(x,\lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)} y_n(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it}, \tag{14}$$

где $\gamma(\lambda_n) = (y_n(x,\lambda_n), z_n(x,\lambda_n))$, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор. Здесь $r > 0$ фиксировано и таково, что при $|\lambda_n| > r$ все λ_n — простые.

Так как $(\varphi, z_n(x,\lambda_n)) = \frac{1}{\lambda_n}(\varphi, L^* z_n(x,\lambda_n)) = \frac{1}{\lambda_n}(L\varphi, z_n(x,\lambda_n))$, то справедлива

Лемма 7. *Если $\varphi \in D_L$, λ_n — собственное значение операторов L и L^*, то*

$$(\varphi, z_n(x,\lambda_n)) = \frac{1}{\lambda_n}(L\varphi, z_n(x,\lambda_n)).$$

Поскольку $(L\varphi, z_n(x,\lambda_n)) = \alpha_n$, то ряд в (14) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и всем $t \in [-A, A]$, при любом $A > 0$.

Представим (14) в виде:

$$u(x,t) = u^0(x,t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda_n|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0)\varphi)(x)e^{\lambda it}d\lambda + \sum_{\substack{|\lambda_n|>r\\ |\lambda_n^0|>r}} A_n(x,t), \tag{15}$$

где $u^0(x,t)$ решение эталонной задачи (1)–(3) с симметричным потенциалом $q_k^0(x) = \frac{1}{2}(q_k(x) + q_k(1-x))$, $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть оператор L, в котором $q_k(x)$ заменяется на $q_k^0(x)$,

$$A_n(x,t) = \frac{(\varphi, z_n(x,\lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)} y_n(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it} - \frac{(\varphi, z_n^0(x,\lambda_n^0))}{\gamma^0(\lambda_n^0)} y_n^0(x,\lambda_n^0)e^{\lambda_n^0 it}, \tag{16}$$

λ_n^0 — собственные числа, а $y_n^0(x,\lambda_n^0)$, $z_n^0(x,\lambda_n^0)$ — собственные функции операторов L_0 и L_0^* соответственно, $\gamma^0(\lambda_n^0) = (y_n^0(x,\lambda_n^0), z_n^0(x,\lambda_n^0))$.

Лемма 8. *Если $q_k(0) = q_k(1)$, то для $A_n(x,t)$ справедливы оценки:*

$$A_n(x,t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n^2}\right), \quad A'_{n,x}(x,t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right), \quad A'_{n,t}(x,t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right), \tag{17}$$

равномерные по $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Доказательство. Из леммы 7 имеем:

$$A_n(x,t) = \frac{(L\varphi, z_n(x,\lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)\lambda_n}\, y_n(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it} - \frac{(L_0\varphi, z_n^0(x,\lambda_n^0))}{\gamma^0(\lambda_n^0)\lambda_n^0}\, y_n^0(x,\lambda_n^0)e^{\lambda_n^0 it},$$

а из леммы 6, учитывая, что $(L\varphi, \Omega_n) = \alpha_n/n$ (см. [1, Лемма 3.17]), получим

$$\frac{(L\varphi, z_n(x,\lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)} = \frac{(L_0\varphi, z_n^0(x,\lambda_n^0))}{\lambda_n^0} + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

Отсюда, с учетом лемм 5, 6, при условии $q_k(0) = q_k(1)$, справедливо представление:

$$A_n(x,t) = \frac{\alpha_n}{n}\, B_n(x,t) + \frac{\alpha_n}{n^2}\, C_n(x,t), \tag{18}$$

где $B_n(x,t) = y_n(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it} - y_n^0(x,\lambda_n^0)e^{\lambda_n^0 it}$, $C_n(x,t) = y_n(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it}$, при этом имеют место оценки:

$$B_n(x,t) = O(1/n), \quad (B_n(x,t))'_x = O(1), \quad (B_n(x,t))'_t = O(1),$$

равномерные по $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Отсюда следует утверждение леммы. □

Из леммы 8, также как в [1], следует абсолютная и равномерная сходимость рядов $\sum A_n(x,t)$, $\sum (A_n(x,t))'_x$ и $\sum (A_n(x,t))'_t$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (15) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)–(3). Таким образом справедлива

Теорема 4. *Если $q_k(x)$ вещественные, $q_k(x) \in C^1[0,1]$, $q_k(0) = q_k(1)$, числа $a_1 = \int\limits_0^1 q_1^0(t)dt$, $a_2 = \pi/2 + \int\limits_0^1 q_2^0(t)dt$ не кратны 2π, и $a_1 \neq a_2$, $\varphi_k(x) \in C^1[0,1]$ и удовлетворяют условиям* (4) $(k = 1, 2)$, *то классическое решение задачи* (1)–(3) *существует и имеет вид* (15). *Ряды в* (15) *и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием по x и t, абсолютно и равномерно сходятся при $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов, А. П. Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные / А. П. Хромов, М. Ш. Бурлуцкая // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, вып. 2. — С. 171–198.

2. Бурлуцкая, М. Ш. Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом / М. Ш. Бурлуцкая // Докл. РАН. — 2012. — Т. 447, № 5. — С. 479–482.

3. Бурлуцкая, М. Ш. Явное решение одной смешанной задачи с инволюцией на графе / М. Ш. Бурлуцкая // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 79–88.

4. Прядиев, В. Л. Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости / В. Л. Прядиев, О. В. Коровина // Известия Саратовского университета. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, № 3. — С. 37–46.

5. Зверева, М. Б. Задача граничного управления дифференциальной системой с нелинейным условием / М. Б. Зверева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 182—191.

6. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров,

Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

7. О возможности применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко, Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 1. — С. 91–98.

8. Шайна, Е. А. О собственных функциях для оператора с инволюцией и потенциалом специального вида на графе / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. : Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения - XXVI». — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2015. — С. 221–222.

REFERENCES

1. Khromov A.P., Burlutskaya M.Sh. Classical Fourier solution of mixed problems with minimum requirements for initial data. [Khromov A.P., Burlutskaya M.Sh. Klassicheskoe reshenie metodom Fur'e smeshannyh zadach pri minimal'nyh trebovaniyah na iskhodnye dannye]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika — Proceedings of the Saratov University. New episode. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 171–198.

2. Burlutskaya M.Sh. A mixed problem with an involution on a graph of two edges with a cycle. [Burlutskaya M.Sh. Smeshannaya zadacha s involyuciej na grafe iz dvuh reber s ciklom]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 479–482.

3. Burlutskaya M.Sh. An explicit solution of a mixed problem with an involution on the graph. [Burlutskaya M.Sh. Yavnoe reshenie odnoj smeshannoj zadachi s involyuciej na grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 79–88.

4. Pryadiev V.L., Korovina O.V. Structure of decision of th e mixed task for wave equalization on a compact geometrical count in case of an unzero initial velocity. [Pryadiev V.L., Korovina O.V. Struktura resheniya smeshannoj zadachi dlya volnovogo uravneniya na kompakt-nom geometricheskom grafe v sluchae nenulevoj nachal'noj skorosti]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika — Proceedings of the Saratov University. New episode. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2009, vol. 9, no. 3, pp. 37–46.

5. Zvereva M.B. The boundary control problem of differential system with nonlinear condition. [Zvereva M.B. Zadacha granichnogo upravleniya differencial'noj sistemoj s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 182–191.

6. Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. An adaptation of the finite element method for solving the boundary value problem with differentials Stieltjes on a geometric graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx e'lementov dlya resheniya granichnoj zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

7. Golovko N.I., Golovaneva F.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On the possibility of applying the Fourier method to a different-order mathematical model. [Golovko N.I., Golovaneva F.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. O vozmozhnosti primeneniya metoda Fur'e k raznoporyadkovoj matematicheskoj modeli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 91–98.

8. Shayna E.A. On eigen functions for an operator with an involution and a potential of a special form on the graph. [Shayna E.A. O sobstvennyh funkciyah dlya operatora s

involyuciej i potencialom special'nogo vida na grafe]. *Sovremennye metody teorii kraevyh zadach: materialy mezhdunarodnoj konferencii : Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya–XXVI» — Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the international conference: Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin Readings–XXV», Publishing house VSU*, 2015, pp. 221–222.

Бурлуцкая Мария Шаукатовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Тел.: +7(473) 220–86–90

Burlutskaya Maria Shaukatovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Tel.: +7(473) 220–86–90

Колесникова Инна Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kolinna@inbox.ru
Тел.: +7(473) 220–86–90

Kolesnikova Inna Viktorovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kolinna@inbox.ru
Tel.: +7(473) 220–86–90

Шайна Екатерина Александровна, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: katerinashaina@mail.ru
Тел.: +7(473) 220–86–90

Shayna Ekaterina Aleksandrovna, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: katerinashaina@mail.ru
Tel.: +7(473) 220–86–90