УДК 539.2

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И ТРАНСФОРМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕД

С. Е. Савотченко

Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова

Поступила в редакцию 02.11.2017 г.

Аннотация. Предложена модель, описывающая процессы локализации и трансформации возбуждений на границе раздела линейной и нелинейной сред. Математическая формулировка модели представляет собой контактную краевую задачу для линейного и нелинейного уравнений Шредингера в полупространствах. Показано, что существуют различные типы стационарных состояний в зависимости от диапазона энергии и соотношений между параметрами ангармонизма взаимодействия в среде и интенсивностью взаимодействия возбуждений с дефектом. Описана локализация кноидальной волны при переходе из полупространства с нелинейной средой в полупространство с линейной средой, в которой волновая функция является монотонно затухающей при удалении от границы раздела. Внутри сплошного спектра линейных волн описана трансформация кноидальной волны в гармонические колебания такой же частоты при переходе из полупространства с нелинейной средой в полупространство с линейной средой. Отдельно проанализированы случаи нелинейных сред с положительным и отрицательным ангармонизмом.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, граница раздела сред, локализованные состояния, нелинейные волны, кноидальные волны.

LOCALIZATION AND TRANSFORMATION OF NONLINEAR WAVES AT THE BOUNDARY OF LINEAR AND NONLINEAR MEDIA

S. E. Savotchenko

Abstract. The model describing processes of localization and transformation of excitations at the interface between linear and nonlinear media is proposed. The mathematical formulation of the model is a contact boundary value problem for the linear and nonlinear Schrödinger equations in half-spaces. The existence of the different types of stationary states depending on the energy range and the relationships between the anharmonicity parameters of the interaction in the medium and the intensity of interaction of the excitations with the defect is shown. The localization of a cnoidal wave during the transition from a half-space with a nonlinear medium to a half-space with a linear medium in which the wave function is monotonically damping from the interface is described. Inside the continuous spectrum of linear waves, the transformation of a cnoidal wave into harmonic oscillations of the same frequency is described when passing from a half-space with a nonlinear medium to a half-space with a linear medium. The cases of nonlinear media with positive and negative anharmonism are analyzed separately.

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, media boundary, localized states, nonlinear waves, cnoidal waves.

ВВЕДЕНИЕ

Закономерности локализации различных типов возбуждений вблизи границ раздела сред играют важную роль при разработке многих технических компонентов микроэлектроники и оптоэлектроники. Подобные явления имеют большое значение для построения контролируемых барьеров, необходимых для управления в сложных электронных и оптических системах, и представляющих собой границы раздела сред с различными физическими характеристиками, в том числе, с различными формами ангармонизма межатомного взаимодействия. Ясно, что при переходе через границу раздела таких сред возбуждения испытывают разнообразные преобразования, которые связаны с взаимодействием этих возбуждений с плоским дефектом кристаллической структуры, границу раздела сред [1].

Теоретическое изучение закономерностей распространения возбуждений в ангармонических кристаллах и локализации их вблизи дефектов проводится давно с использованием нелинейных эволюционных уравнений, среди которых широкое применение находит нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [2, 3].

В [4, 5] были подробно рассмотрены некоторые модели кристаллических систем с дефектами, приводящие к НУШ. В данной работе будет рассматриваться НУШ, параметры которого могут иметь соответствующий физических смысл в рамках одной из рассмотренных в [4, 5] моделей.

В данной работе предложена модель, описывающая процессы локализации и трансформации волн при переходе через границу раздела линейной и нелинейной сред, возбуждения в которых описываются соответственно решениями линейного и нелинейного уравнений Шредингера. Будет показано, что существуют несимметричные состояния с энергией в полосе сплошного спектра линейных волн, описывающее трансформацию линейной волны в кноидальную. В области ниже границы сплошного спектра линейных волн существуют несколько типов состояний, описывающие локализацию кноидальной волны при переходе из полупространства с нелинейной средой в полупространство с линейной средой.

В [6] были получены локализованные состояния для НУШ с короткодействующим потенциалом, моделирующим дефект в ангармоническом кристалле. В [7] была показана возможность существования локализованных состояний в нелинейной среде с дефектом и пространственной дисперсией, динамика возбуждений в которой описывается НУШ с пространственными производными четвертого порядка. В отличие от указанных работ, в настоящей работе рассматривается модель в которой по одну сторону от дефекта кристаллическая структура обладает гармоническим межатомным взаимодействием, а по другую — ангармоническим.

В данной работе будут рассматриваться только волновые процессы в полупространстве с нелинейной средой, описываемые периодическими решениями НУШ — кноидальными волнами. В одномерных системах без дефектов распространение нелинейных волн, описываемых периодическими решениями НУШ, рассматривались в [2]. В [8] были найдены периодические решения НУШ с производными четвертого порядка, описывающие длинноволновые коллективные возбуждения в квазиодномерной цепочке. В настоящей работе будут рассматриваться не свободно распространяющиеся волны, а волны, взаимодействующие с дефектом.

ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Будем рассматривать процессы локализации возбуждений на границе раздела линейной и нелинейной сред на основе уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \Omega(x)\psi - \gamma\theta(x)\left|\psi\right|^2\psi + U_0\delta(x)\psi, \tag{1}$$

где использована тета-функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

где M — эффективная масса возбуждений,

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1, \, x < 0 \\ \Omega_2, \, x > 0 \end{cases}$$

$\Omega_{1,2}$ — значения уровней дна энергетический зоны, γ — параметр нелинейности среды, расположенной справа от дефекта, $\delta(x)$ — δ-функция Дирака, U_0 — интенсивность взаимодействия дефекта, расположенным в начале координат, с возбуждением, такая, что при $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ — притягивается.

Стационарные состояния с энергией E уравнений (1) можно получить, представив в виде: $\psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt}$. Решение уравнения (1) сводится к решению двух стационарных УШ на полуосях:

$$\frac{1}{2m}\psi''(x) + (E - \Omega_1)\psi(x) = 0, \, x < 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2m}\psi''(x) + (E - \Omega_2)\psi(x) + \gamma \left|\psi(x)\right|^2 \psi(x) = 0, \, x > 0, \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$\psi(-0) = \psi(+0); \tag{4}$$

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2mU_0\psi(0). \tag{5}$$

В линейной среде без дефекта распространяются свободные волны с квадратичным законом дисперсии В нелинейной среде без дефекта могут распространяться нелинейные волны, описываемые периодическими решениями НУШ, которые выражаются через эллиптические функции и называются кноидальными волнами [3]. В зависимости от знака нелинейности существуют различные типы нелинейных волн.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕД С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ АНГАРМОНИЗМОМ

В случае положительной нелинейности (ангармонизме) при $\gamma > 0$ существует два типа периодических решений НУШ. Рассмотрим сначала такие решения УШ (2) и (3), удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5), которые существуют в области $E < \min\{\Omega_{1,2}\}$. В этом диапазоне энергий может существовать два вида решений. В первом случае волновая функция уравнений (2) и (3) представима в виде:

$$\psi_d(x) = \begin{cases} A_d^{(-)} e^{\kappa x}, \, x < 0 \\ A_d^{(+)} \mathrm{dn}(q_d(x - x_0),k), \, x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

где k — модуль эллиптической функции dn $(0 < k < 1)$, амплитуды:

$$A_d^{(-)} = q_d/(m\gamma)^{1/2}\mathrm{dn}(q_d x_0,k), \quad A_d^{(+)} = q_d(m\gamma)^{-1/2}, \tag{7}$$

декремент затухания и волновое число:

$$\kappa^2 = 2m(\Omega_1 - E), q_d^2 = 2m(\Omega_2 - E)/(2 - k^2), \tag{8}$$

Из (8) следует связь:

$$q_d^2 = \{2m(\Omega_2 - \Omega_1) + \kappa^2\}/(2 - k^2). \tag{9}$$

Энергия состояния (6) определяется из дисперсионного соотношения, полученного после подстановки (6) в граничные условия (4) и (5):

$$\Delta_d + \kappa = 0, \tag{10}$$

где обозначено $\Delta_d = 2mU_0 - k^2 q_d \mathrm{sn}(q_d x_0, k)\mathrm{sn}(q_d x_0 + K(k), k)$, sn — эллиптический синус, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [3].

Из дисперсионного соотношения следует, что энергия таких состояний зависит от параметра x_0 и модуля эллиптической функции k, значение одного из которых может быть определено из условия нормировки волновой функции (6), а второй тогда будет свободным параметром.

В предельном случае малых значений параметров кноидальной волны при $q_d x_0 \ll 1$ из (10) следует:

$$k^2 q_d^2 = \kappa + 2mU_0, \tag{11}$$

откуда с учетом связи (9) можно получить выражение для энергии в явном виде:

$$E_d = \Omega_1 - \frac{(2-k^2)^2}{8mk^4 x_0^2}\left\{1 \pm \left[1 + \frac{8mk^2 x_0}{2-k^2}\left(\frac{k^2 x_0(\Omega_1 - \Omega_2)}{2-k^2} + U_0\right)\right]^{1/2}\right\}^2. \tag{12}$$

Требование малости $q_d x_0 \ll 1$ означает, что значения энергии должны быть близки к краю зоны сплошного спектра так, чтобы выполнялось: $|\Omega_2 - E| << (2-k^2)/2mx_0^2$.

Для локализации нелинейной волны вида (6) с энергией (12) при переходе через границу раздела сред должно выполняться ограничение для интенсивности взаимодействия волны с дефектом: $U_0 \geqslant U_d$, где $U_d = k^2 x_0(\Omega_2 - \Omega_1)/(2-k^2) - (2-k^2)/8mk^2 x_0$. Если $U_0 = U_d$, то из (12) получается энергия такого состояния $E_d = \Omega_1 - (2-k^2)^2/8mk^4 x_0^2$. Знак в (12) определяется из требования того, чтобы декремент затухания был положительной величиной: $\kappa > 0$.

Волновая функция (6) описывает локализацию кноидальной волны, при переходе через границу раздела из полупространства с нелинейной средой в полупространство с линейной средой.

Волновая функция кноидальных волн второго вида в таком же энергетическом диапазоне имеет вид:

$$\psi_c(x) = \begin{cases} A_c^{(-)} e^{\kappa x}, \ x < 0 \\ A_c^{(+)} \mathrm{cn}(q_c(x - x_0), k), \ x > 0 \end{cases} \tag{13}$$

где cn — эллиптический косинус, амплитуды:

$$A_c^{(-)} = kq_c/(m\gamma)^{1/2}\mathrm{cn}(q_c x_0, k), \quad A_c^{(+)} = kq_c(m\gamma)^{-1/2}, \tag{14}$$

декремент затухания κ определяется прежним выражением (8), а волновое число:

$$q_c^2 = 2m(\Omega_2 - E)/(2k^2 - 1), \tag{15}$$

Из (8) и (15) следует связь:

$$q_c^2 = \{2m(\Omega_2 - \Omega_1) + \kappa^2\}/(2k^2 - 1). \tag{16}$$

Энергия состояния (13) определяется из дисперсионного соотношения, полученного после подстановки (13) в граничные условия (4) и (5):

$$\Delta_c + \kappa = 0, \tag{17}$$

где обозначено $\Delta_c = 2mU_0 - q_c \mathrm{sn}(q_c x_0, k)/\mathrm{sn}(q_c x_0 + K(k), k)$.

В предельном случае малых значений параметров кноидальной волны при $q_d x_0 \ll 1$ из (17) следует:

$$q_c^2 = \kappa + 2mU_0, \tag{18}$$

откуда с учетом связи (16) можно получить выражение для энергии в явном виде:

$$E_c = \Omega_1 - \frac{(2k^2-1)^2}{8mx_0^2}\left\{1 \pm \left[1 + \frac{8mx_0}{2k^2-1}\left(\frac{x_0(\Omega_1 - \Omega_2)}{2k^2-1} + U_0\right)\right]^{1/2}\right\}^2. \tag{19}$$

Для локализации нелинейной волны вида (13) с энергией (19) при переходе через границу раздела сред должно выполняться ограничение для интенсивности взаимодействия волны с дефектом: $U_0 \geqslant U_c$, где $U_c = x_0(\Omega_2 - \Omega_1)/(2k^2 - 1) - (2k^2 - 1)/8mx_0$. Если $U_0 = U_c$, то из (19) получается энергия такого состояния $E_c = \Omega_1 - (2k^2 - 1)^2/8mx_0^2$. Знак в (19) определяется из требования $\kappa > 0$.

Из (12) и (19) хорошо видно, что в пределе $k \to 1$ энергии состояний (6) и (13) совпадают, что соответствует тому, что в таком пределе кноидальны волны обоих видов согласно асимптотическим свойствам эллиптических функций вырождаются в одно решение НУШ солитонного типа (3): $\psi(x) = A/\mathrm{ch}q(x - x_0)$, где $A = \pm q(m\gamma)^{-1/2}$, $E = \Omega - q^2/2m$.

ТРАНСФОРМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕД С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ АНГАРМОНИЗМОМ

Внутри сплошного спектра линейных волн в диапазоне $\Omega_1 < E < \Omega_2$ существуют два вида состояний, соответствующие двум видам кноидальных волн.

Состояния первого вида описывается решением уравнений (2) и (3), удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5):

$$\psi_d(x) = \begin{cases} B_d^{(-)} \cos(px + \varphi), \ x < 0 \\ B_d^{(+)} \mathrm{dn}(q_d(x - x_0), k), \ x > 0 \end{cases} \tag{20}$$

где q_d определяется выражением (8), $p^2 = 2m(E - \Omega_1)$, амплитуды решения: $B_d^{(+)} = A_d^{(+)}$ и

$$B_d^{(-)} = q_d \mathrm{dn}(q_d x_0, k)(p^2 + \Delta_d^2)^{1/2}/p(m\gamma)^{1/2}. \tag{21}$$

Связь между волновыми числами:

$$q_d^2 = \{2m(\Omega_2 - \Omega_1) - p^2\}/(2 - k^2). \tag{22}$$

Энергия состояния (20) определяется из дисперсионного соотношения, полученного после подстановки (20) в граничные условия (4) и (5):

$$\mathrm{tg}\varphi = \Delta_d/p. \tag{23}$$

В предельном случае малых значений параметров кноидальной волны при $q_d x_0 \ll 1$ из (23) следует:

$$k^2 q_d^2 = 2mU_0 - p\,\mathrm{tg}\varphi, \tag{24}$$

откуда с учетом связи (22) можно получить выражение для энергии в явном виде:

$$E_d(\varphi) = \Omega_1 + \frac{(2 - k^2)^2}{8mk^4 x_0^2} \left\{ \mathrm{tg}\varphi \pm \left[\mathrm{tg}^2\varphi + \frac{8mk^2 x_0}{2 - k^2} \left(\frac{k^2 x_0(\Omega_2 - \Omega_1)}{2 - k^2} - U_0 \right) \right]^{1/2} \right\}^2. \tag{25}$$

Для существования состояния с энергией (25) должно выполняться ограничение $U_0 \leqslant U_d(\varphi)$, где $U_d(\varphi) = k^2 x_0(\Omega_2 - \Omega_1)/(2 - k^2) + (2 - k^2)\mathrm{tg}^2\varphi/8mk^2 x_0$.

Можно отметить, что для выделенного уровня при $\varphi = 0$ выражение (25) для энергии существенно упрощается: $E_d(0) = \Omega_2 - U_0(2 - k^2)/k^2 x_0$, причем для существования состояния с такой энергией должно выполняться: $U_0 < k^2 x_0 \Omega_2/(2 - k^2)$.

Состояния второго вида описывается решением уравнений (2) и (3), удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5):

$$\psi_c(x) = \begin{cases} B_c^{(-)} \cos(px + \varphi), \ x < 0 \\ B_c^{(+)} \mathrm{cn}(q_c(x - x_0), k), \ x > 0 \end{cases} \tag{26}$$

где q_c определяется выражением (15), волновое число p такое же, как и для волновой функции (20), амплитуды решения $B_c^{(+)} = A_c^{(+)}$ и

$$B_c^{(-)} = kq_c\mathrm{cn}(q_c x_0,k)(p^2 + \Delta_c^2)^{1/2}/p(m\gamma)^{1/2}. \tag{27}$$

Связь между волновыми числами:

$$q_c^2 = \{2m(\Omega_2 - \Omega_1) - p^2\}/(2k^2 - 1). \tag{28}$$

Энергия состояния (26) определяется из дисперсионного соотношения, полученного после подстановки (26) в граничные условия (4) и (5):

$$\mathrm{tg}\varphi = \Delta_c/p. \tag{29}$$

В предельном случае малых значений параметров кноидальной волны при $q_c x_0 \ll 1$ из (29) следует:

$$q_c^2 = 2mU_0 - p\mathrm{tg}\varphi, \tag{30}$$

откуда с учетом связи (28) можно получить выражение для энергии в явном виде:

$$E_c(\varphi) = \Omega_1 + \frac{(2k^2-1)^2}{8mx_0^2}\left\{\mathrm{tg}\varphi \pm \left[\mathrm{tg}^2\varphi + \frac{8mx_0}{2k^2-1}\left(\frac{x_0(\Omega_2-\Omega_1)}{2k^2-1} - U_0\right)\right]^{1/2}\right\}^2. \tag{31}$$

Для существования состояния с энергией (31) должно выполняться ограничение $U_0 \leqslant U_c(\varphi)$, где $U_c(\varphi) = x_0(\Omega_2 - \Omega_1)/(2k^2 - 1) + (2k^2 - 1)\mathrm{tg}^2\varphi/8mx_0$.

Можно отметить, что для выделенного уровня при $\varphi = 0$ выражение (31) для энергии существенно упрощается: $E_c(0) = \Omega_2 - U_0(2k^2-1)/x_0$. При этом для существования состояния с такой энергией должно выполняться: $U_0 < x_0\Omega_2/(2k^2 - 1)$.

Состояния (20) и (26) в диапазоне $\Omega_1 < E < \Omega_2$ помимо модуля эллиптической функции k, зависят от дополнительного свободного параметра — фазы φ, и поэтому, могут назваться двухпараметрическими.

Так же как и в предыдущем пункте, из (25) и (31) можно сделать вывод о том, что в пределе $k \to 1$ энергии состояний (20) и (26) совпадают, что соответствует вырождению кноидальных волн в нелинейном полупространстве в одно локализованное состояние, описываемое простым солитонным решением НУШ.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕД С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ АНГАРМОНИЗМОМ

Рассмотрим теперь случай отрицательного значения параметра нелинейности среды в полупространстве, когда $\gamma < 0$ для всех $x > 0$. Вблизи границы раздела линейной и нелинейной сред существует локализованное состояние при $E > \Omega_2$ и $E < \Omega_1$, что возможно при условии $\Omega_1 > \Omega_2$. Такое состояние описывается решением уравнений (2) и (3), удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5):

$$\psi_s(x) = \begin{cases} A_s^{(-)}e^{\kappa x},\ x < 0 \\ A_s^{(+)}\mathrm{sn}(q_s(x - x_0),k),\ x > 0 \end{cases} \tag{32}$$

где декремент затухания κ определяется прежним выражением (8), а волновое число:

$$q_s^2 = 2m(E - \Omega_2)/(1 + k^2), \tag{33}$$

амплитуды:

$$A_s^{(-)} = -q_s/(mg)^{1/2}\mathrm{sn}(q_s x_0,k), \quad A_s^{(+)} = q_s(mg)^{-1/2}, \tag{34}$$

$g = -\gamma > 0$. Уровни энергии определяются из дисперсионного соотношения:

$$\Delta_s + \kappa = 0, \tag{35}$$

где обозначено $\Delta_s = 2mU_0 - k_1 q_s \mathrm{cn}(q_s x_0,k)/\mathrm{cn}(q_s x_0 + K(k),k)$, $k_1^2 = 1 - k^2$ — дополнительный модуль эллиптических функций.

В предельном случае малых значений параметров кноидальной волны при $q_s x_0 \ll 1$ из (35) получается декремент затухания:

$$\kappa = -(2mU_0 + 1/x_0), \tag{36}$$

откуда следует выражение для энергии в явном виде:

$$E_s = \Omega_1 - (2mU_0 + 1/x_0)^2/2m. \tag{37}$$

Так как локализация волны происходит в полупространстве $x < 0$, то данный декремент затухания (36) должен быть отрицательным. Поэтому для существования такого состояния должно выполняться ограничение: $U_0 < 1/2mx_0$.

ТРАНСФОРМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕД С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ АНГАРМОНИЗМОМ

В диапазоне $E > \max\{\Omega_{1,2}\}$ для случая отрицательного ангармонизма существует состояние, аналогичное по своей структуре (20) (26). Такое состояние решением уравнений (2) и (3), удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5):

$$\psi_s(x) = \begin{cases} B_s^{(-)}\cos(px + \varphi),\ x < 0 \\ B_s^{(+)}\mathrm{sn}(q_s(x - x_0),k),\ x > 0 \end{cases} \tag{38}$$

где q_s определяется выражением (33), волновое число p такое же, как и для волновой функции (20), амплитуды решения $B_s^{(+)} = A_s^{(+)}$ и

$$B_s^{(-)} = q_s \mathrm{sn}(q_s x_0,k)(p^2 + \Delta_s^2)^{1/2}/p(mg)^{1/2}. \tag{39}$$

Связь между волновыми числами:

$$q_s^2 = \{2m(\Omega_1 - \Omega_2) + p^2\}/(1 + k^2). \tag{40}$$

Энергия состояния (38) определяется из дисперсионного соотношения, полученного после подстановки (38) в граничные условия (4) и (5):

$$\mathrm{tg}\varphi = \Delta_s/p. \tag{41}$$

В предельном случае малых значений параметров кноидальной волны при $q_s x_0 \ll 1$ из (35) определяется волновое число:

$$p = (2mU_0 + 1/x_0)\mathrm{ctg}\varphi, \tag{42}$$

которое позволяет получить выражение для энергии в явном виде:

$$E_s(\varphi) = \Omega_1 + \mathrm{ctg}^2\varphi(2mU_0 + 1/x_0)^2/2m. \tag{43}$$

Состояния с энергией (43) реализуются не при всех значениях параметра φ.

Состояние (38) в диапазоне $E > \max\{\Omega_{1,2}\}$ помимо модуля эллиптической функции k, зависят от дополнительного свободного параметра — фазы φ, и поэтому, также могут назваться двухпараметрическими.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены различные типы решений контактной краевой задачи для системы линейного и нелинейного уравнений Шредингера, описывающие взаимодействие возбуждений на границы раздела линейной и нелинейной сред. В зависимости от соотношения энергии возбуждения и значений краев зоны сплошного спектра собственных стационарных линейных состояний возникают как локализованные по одну сторону от границы раздела состояния, так волны различной частоты и амплитуды.

Показано, что в широком диапазоне энергий нелинейная волна при переходе из полупространства с нелинейной средой может при одних соотношениях между параметрами системы становится монотонно затухающей при удалении от границы раздела в полупространстве с линейной средой, а при других — претерпевать трансформацию в линейную волну.

Проанализированы случаи нелинейных сред с положительным и отрицательным знаками параметра нелинейности среды. Для контакта линейной среды и нелинейной среды с положительным ангармонизмом существует два вида состояний, описывающих локализацию нелинейных волн, энергии которых лежат в области ниже сплошного спектра линейных волн $E < \min\{\Omega_{1,2}\}$. В полосе сплошного спектра линейных волн в диапазоне $\Omega_1 < E < \Omega_2$ также существуют два вида состояний, описывающих трансформацию кноидальных волн в линейные волны при переходе через границу раздела сред.

Для контакта линейной среды и нелинейной среды с отрицательным ангармонизмом существует одно состояние, описывающие локализацию нелинейной волны с энергией, лежащей в полосе сплошного спектра линейных волн в диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$, то есть при противоположном соотношении между границами зон в сплошного спектра в линейном и нелинейном полупространствах. В области $E > \max\{\Omega_{1,2}\}$ существует одно состояние, описывающее трансформацию нелинейной волны в линейную при переходе через границу раздела сред.

Для каждого типа состояний получены дисперсионные соотношения, определяющие энергию как неявную функцию параметров системы. В частных предельных случаях получены значения энергии стационарных состояний в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar, Yu. S. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces / Yu. S. Kivshar, A. M. Kosevich, O. A. Chubykalo // Phys. Rev. A. — 1990. — V. 41, № 3. — P. 1677–1688.

2. Давыдов, А. С. Солитоны в молекулярных системах / А. С. Давыдов. — Киев : Наукова думка, 1984. — 288 с.

3. Косевич, А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. — Киев : Наукова думка, 1989. — 304 с.

4. Герасимчук, И. В. Локализация нелинейных волн в слоистых средах / И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев // ФНТ. — 2000. — Т. 26, № 8. — С. 799–809.

5. Савотченко, С. Е. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой / С. Е. Савотченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 51–59.

6. Богдан, М. М. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами / М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев // ФНТ. — 1997. — Т. 23, № 2. — С. 197–207.

7. Савотченко, С. Е. Локализация волн вблизи интерфейса нелинейных сред с пространственной дисперсией / С. Е. Савотченко // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2004. — Т. 47, № 5. — С. 79–84.

8. Савотченко, С. Е. Нелинейные коллективные возбуждения в квазиодномерных структурах при наличии пространственной дисперсии / С. Е. Савотченко // Известия вузов. Физика. — 2005. — Т. 48, № 9. — С. 24–27.

REFERENCES

1. Kivshar Yu.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces. Phys. Rev. A. 1990, vol. 41, no. 3, pp. 1677–1688.

2. Davydov A.S. Solitons in molecular systems. [Davydov A.S. Solitony v molekuljarnyh sistemah]. Kiev: NaukovaDumka, 1984, 288 p.

3. Kosevich A.M., Kovalev A.S. Introduction to nonlinear physical mechanics. [Kosevich A.M., Kovalev A.S. Vvedenie v nelinejnuju fizicheskuju mehaniku]. Kiev: Naukova Dumka, 1989, 304 p.

4. Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Localization of nonlinear waves in layered media. [Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Lokalizacija nelinejnyh voln v sloistyh sredah]. *FNT — Low. Temp. Phys.*, 2000, vol. 26, no. 8, pp. 799–809.

5. Savotchenko S.E. Peculiarities of localization of nonlinear excitations near the defect with an internal structure. [Savotchenko S.E. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh vozbuzhdenij vblizi defekta s vnutrennej strukturoj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 51–59.

6. Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Dynamics and stability of localized modes in nonlinear media with point defects. [Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Dinamika i ustojchivost' lokalizovannyh mod v nelinejnyhsredah s tochechnymi defektami]. *FNT — Low. Temp. Phys*, 1997, vol. 23, no. 2, pp. 197–207.

7. Savotchenko S.E. Localization waves near the interface with spatial dispersion of nonlinear media. [Savotchenko S.E. Lokalizacija voln vblizi interfejsa nelinejnyh sred s prostranstvennoj dispersiej]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika — Russian Physics Journal*, 2004, vol. 47, no. 5, pp. 79–84.

8. Savotchenko S.E. Nonlinear collective excitations in quasi-one-dimensional structures with spatial dispersion. [Savotchenko S.E. Nelinejnye kollektivnye vozbuzhdenija v kvaziodnomernyh strukturah pri nalichii prostranstvennoj dispersii]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika — Russian Physics Journal*, 2005, vol. 48, no. 9, pp. 915–918.

Савотченко Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова, г. Белгород, Российская Федерация
E-mail: savotchenkose@mail.ru
Тел.: +7(920)561–04–46

Savotchenko Sergey Evgenyevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of High Mathematics Department of Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russian Federation
E-mail: savotchenkose@mail.ru
Tel.: +7(920)561–04–46