УДК 519.6 + 530.1

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХСОЛИТОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

**Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров**

*Физико-технический институт им. С. У. Умарова АН Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию 20.10.2017 г.

**Аннотация**. Методами численного моделирования исследованы процессы трех солитонных взаимодействий 180-градусных доменных стенок с топологическим вихрем белавин-поляковского типа в фазовом пространстве (2+1)-мерной анизотропной O(3) инвариантной нелинейной сигма-модели. Показано, что при взаимодействии топологических структур в конфигурации кинк-вихрь-антикинк происходит парная аннигиляция доменных стенок и полный распад топологического вихря на локализованные возмущения, обладающие единичным значением индекса Хопфа. Определены параметры системы трехсолитонных взаимодействий обуславливающие поглощение аннигилирующими доменными стенками энергии топологического вихря эквивалентной нулевому, половинному, а также единичному значению индекса Хопфа.

**Ключевые слова**: трехсолитонное взаимодействие, топологический вихрь, доменная стенка, нелинейная сигма-модель, численное моделирование, индекс Хопфа.

# NUMERICAL SIMULATION OF THREE-SOLITON INTERACTIONS IN A TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR SIGMA MODEL

**Kh. Kh. Muminov, F. Sh. Shokirov**

**Abstract**. The processes of three-soliton interactions of 180-degree domain walls with a topological vortex of the Belavin-Polyakov type in the phase space of the (2+1)-dimensional anisotropic O(3) invariant nonlinear sigma model are investigated by numerical simulation methods. It is shown that in the interaction of topological structures in the kink-vortex-antikink configuration, pair annihilation of the domain walls occurs and the complete decay of the topological vortex onto localized perturbations that have a single value of the Hopf index. The parameters of a system of three-soliton interactions that causing absorption by the annihilating domain walls the energy of a topological vortex equivalent to zero, half, and also the unit value of the Hopf index are determined.

**Keywords**: three-soliton interaction, topological vortex, domain wall, nonlinear sigma model, numerical simulation, Hopf index.

## ВВЕДЕНИЕ

Топологические солитоны (вихри, скирмионы) и межфазные границы магнитных доменов (доменные стенки) представляют собой уникальные топологические спиновые конструкции, обладающие большим практическим потенциалом при разработке многомерных ячеек магнитной памяти и логических устройств в качестве наноразмерных функциональных элементов [1, 2]. В настоящей работе в рамках (2+1)-мерной O(3) инвариантной нелинейной сигма-модели (НСМ) проведено численное исследование динамики трехсолитонных взаимодействий топологических вихрей с доменными стенками. O(3) суперсимметричная подгруппа хорошо известной НСМ ($n$-поле, A3-поле) описывает киральное поле на сфере Блоха

$$S^2 = SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2) \tag{1}$$

и обладает интересными топологическими свойствами, где теория взаимодействующих полей получается наложением простейшей квадратичной связи $n^2 - 1 = 0$ ($n$-поле). В данном случае $n$-поле принимает значения в нелинейном многообразии — двумерной сфере, задаваемой в трехмерном пространстве: $S^2 \in \mathbb{R}^3$. Функцию Лагранжа и гамильтониан (2+1)-мерной анизотропной O(3) НСМ можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{L} = g\left[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a + s_\gamma^2 - 1\right], \tag{2}$$

$$\mathcal{H} = g\left[\sum\nolimits_\mu (\partial_\mu s_a)^2 + 1 - s_\gamma^2\right], \tag{3}$$

$$g = 1/2; \mu = 0,1,2; a = 1,2,3; \gamma = 3; s_a s_a - 1 = 0,$$

где $s_a$ — параметры единичного изовектора

$$\boldsymbol{S}(s_1,s_2,s_3) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta). \tag{4}$$

Таким образом, состояния исследуемой модели (2) описывается точкой на единичной двумерной сфере (1), эквивалентной эволюции конца вектора изоспина (4) в расслоенном пространстве. В рамках модели (2) проведено исследование процессов трехсолитонных взаимодействий белавин-поляковского топологического солитона-вихря (ТС) [3] следующего вида

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \left(\frac{R}{r}\right)^{Q_t}, \quad Q_t = \chi^{-1}(\varphi - \omega\tau), \tag{5}$$

с известными решениями типа $\pi$-кинк ($\pi$-антикинк) уравнения синус-Гордона (УСГ) в виде 180-градусных доменных стенок (ДС)

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{B_1\left(\frac{w}{k_1}x - \frac{w}{k_1}x_0\right) + B_2\left(\frac{w}{k_2}y - \frac{w}{k_2}y_0\right)}, \ \varphi(x,y,t) = \varepsilon, \tag{6}$$

где $\theta(x,y,y)$ и $\varphi(x,y,t)$ — углы Эйлера, $R = (x^2+y^2)^{1/2}$ — радиус локализации ТС, $\chi = \cos^{-1} x/R = \sin^{-1} x/R$ — угловой параметр. При $\varepsilon = 0$, $\pi$ и $\varepsilon \pm \pi/2$ решение (6) описывает соответственно динамику так называемых нееловских (N) и блоховских (B) ДС

$$\boldsymbol{S}_{N(0,\pi)}(s_1,s_2,s_3) = (1+e^{2x})^{-1}(\pm 2e^x, 0, 1-e^{2x}), \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{S}_{B(\pm\pi/2)}(s_1,s_2,s_3) = (1+e^{2x})^{-1}(0, \pm 2e^x, 1-e^{2x}), \tag{7.2}$$

где в наших экспериментах $B_1 = 1$, $B_2 = 0$. Для численных экспериментов мы использовали ТС вида (5), обладающих значениями индекса Хопфа (инвариант Хопфа, топологический заряд) в диапазоне $Q_t = 1, \ldots, 4$. В данном случае параметры единичного изовектора $\boldsymbol{S}_{V(Q_t)}(s_1,s_2,s_3)$ (4) для вихрей (5) можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{S}_{V(Q_t=1)} = \lambda_1(x\cos\tau + y\sin\tau, y\cos\tau - x\sin\tau, 2^{-1}(1-r^2)), \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{S}_{V(Q_t=2)} = \lambda_2(\xi_1\cos\tau + 2xy\sin\tau, 2xy\cos\tau - \xi_1\sin\tau, 2^{-1}(1-r^4)), \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{S}_{V(Q_t=3)} = \lambda_3(\xi_2\cos\tau - \xi_3\sin\tau, -\xi_3\cos\tau - \xi_2\sin\tau, 2^{-1}(1-r^6)), \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{S}_{V(Q_t=4)} = \lambda_4(\xi_4 \cos\tau + 4xy\xi_1 \sin\tau, 4xy\xi_1 \cos\tau - \xi_4 \sin\tau, 2^{-1}(1-r^8)), \tag{8.4}$$

$\lambda_q = 2(1+r^2q)^{-1}, q = 1, \ldots, 4, \xi_1 = x^2 - y^2, \xi_2 = x^3 - 3xy^2, \xi_3 = y^3 - 3x^2y, \xi_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены следующие конфигурации трехсолитонных топологических взаимодействий:

$$\boldsymbol{S}_{N(0,\pi)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{N(0,\pi)}, \tag{9.1}$$

$$\boldsymbol{S}_{B(\pm\pi/2)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(\pm\pi/2)}, \tag{9.2}$$

$$\boldsymbol{S}_{N(0,\pi)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(\pm\pi/2)}. \tag{9.3}$$

Получены эволюционные модели процессов распада вихрей (5) на локализованные возмущения (ЛВ), сопровождающиеся парной аннигиляцией ДС (6) и исследованы их свойства.

## МЕТОДИКА ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Численные модели в настоящей работе построены на основе методов теории конечных разностных схем [4], использованием свойств стереографической проекции, с учетом теоретико-групповых особенностей конструкций класса O(N) НСМ теории поля. Для построения численной схемы мы использовали комбинацию трех видов параметризаций – изоспиновой $(s_1, s_2, s_3)$, комплексной $(z = x + iy)$ и эйлеровой $(\theta, \varphi)$. Взаимосвязь между параметризациями осуществляется особым применением стереографической проекции блоховской сферы (1) на комплексную плоскость $z$, где

$$z(x,y) = x + iy = \frac{s_1 + is_2}{1 \pm s_3} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}. \tag{10}$$

Использован специально разработанный алгоритм, который позволяет преодолеть сингулярности, возникающие на полюсах изосферы (1) при обычной стереографической проекции [5]. С более подробным описанием разработанного алгоритма и численной схемы можно ознакомиться в [6]. С учетом (10) уравнения Лагранжа-Эйлера для O(3) НСМ(2) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\partial_\mu \partial^\mu s_i + s_i(\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a) - s_\gamma(\delta_i \gamma - s_i s_\gamma) = 0; \tag{11.1}$$

$$(1 + z^* z)\partial_\mu \partial^\mu z - 2z^* \partial_\mu z \partial^\mu z + z(1 - z^* z) = 0; \tag{11.2}$$

$$2\partial_\mu \partial^\mu \theta + \sin(2\theta)(1 - \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) = 0, 2\cos\theta \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \sin\theta \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0; \tag{11.3}$$

$$\mu = 0, 1, 2; i = 1, 2, 3; s_a s_a - 1 = 0; a = 1, 2, 3; \gamma = 3.$$

Заметим, что O(3) НСМ (11.3) в специальной параметризации $2\theta$ меридианного сечения $\varphi(x, y, t) = 0$ изотопического пространства блоховской сферы $S^2(1)$ сводится [6] к вполне интегрируемому УСГ следующего вида:

$$2\Box\theta = -2\sin(2\theta). \tag{12}$$

По периметру двумерной области моделирования $L(x, y)$ установлены специально разработанные граничные условия [56], поглощающие линейные волны возмущений, излучаемые взаимодействующими солитонными полями. Разработан программный модуль, позволяющий проведение комплексного анализа процессов многосолитонных взаимодействий в рамках НСМ теории поля, с учетом ее групповых особенностей в двумерном псевдоевклидовом пространстве [56]. Использована трехслойная разностная схема второго порядка точности

$O(r^2 + h^2)$ на пятиточечном шаблоне с весами явного типа [4–6]. Аппроксимация проведена на прямоугольной сетке $L(x, y) - 2.5E^3 \times 2E^3$, в кубе $(h_{xy}, t_\tau)$: $\tau_{\max}(2E^{+4})$. Устойчивость разностной схемы удовлетворяет требованиям для гиперболических систем уравнений: $\tau \leqslant \min(h/|\Delta|_{\max})$. Для численной схемы, применен алгоритм, где использованы свойства стереографической проекции, позволяющие осуществление взаимно однозначной проекции (компактификация $S^2 - R^2_{comp}$) всех точек комплексной плоскости $z$ (5.2) включая $(x, y) = \infty$ и сферы $S^2 : s_i s_i = 1$, $(i = 1, 2, 3)$.

**Конфигурация $\boldsymbol{S}_{N(0,\pi)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{N(0,\pi)}$.**

В случае однополярных ДС иллюстрация исходного состояния ($t = 0$) по конфигурации (9.1) взаимодействующих топологических полей (5) при $Q_t = 1$ (8.1) и (6) при $\varepsilon_{12} = 0$ (7.1) приведена на рис. 1. На рис. 2 приведены результаты проведенных экспериментов по конфигурации (9.1) для движущихся со скоростью $\boldsymbol{v}(t_0) \approx \pm 0.0995$ в противоположных $\pm x$-направлениях 180-градусных нееловских ($\varepsilon = 0$) ДС (7.1) и неподвижных ТС с $Q_t = 2, 3, 4$ (8.2)–(8.4).

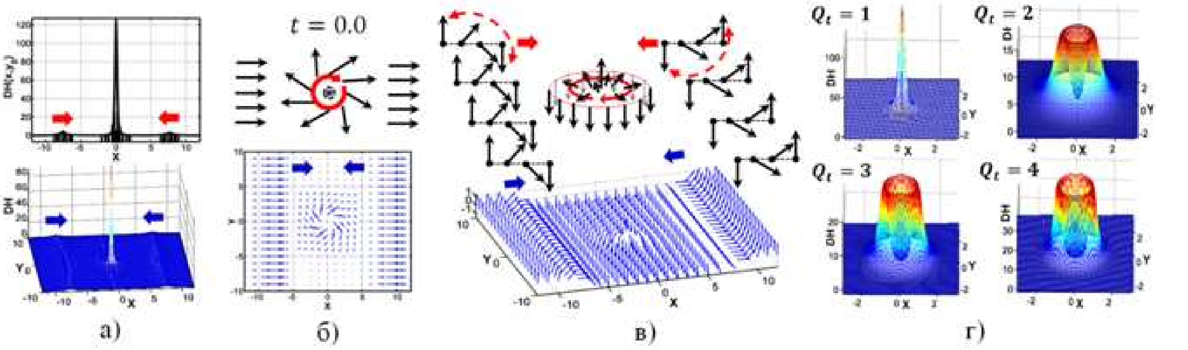


Рис. 1. *Трехсолитонное поле конфигурации (9.1) в случае $Q_t = 1$ и $\varepsilon_{12} = 0$ при $t = 0$ (а–в); г) плотность энергии (DH) решения (5) для $Q_t = 1, \ldots, 4$.*

В процессе взаимодействия происходит распад ТС (5) на $Q_t$ ЛВ, каждое из которых обладает единичным значением топологического заряда $Q_t = 1$. Заметим, что в наших предыдущих работах (см., например, [7]) для двухсолитонных взаимодействий типа "вихрь-кинк" во всех экспериментах наблюдался распад ТС вида (5) на $2Q_t$ ЛВ с $Q_t = 1/2$. При этом ДС сохраняла устойчивость независимо от значения скорости движения взаимодействующих солитонных решений. В отличие от результатов, полученных для двухсолитонных взаимодействий [7] в данном, трехсолитонном случае (9.1) наблюдается также процесс парной аннигиляции ДС. На месте распада ТС $(x_0, y_0)$ происходит разрыв поля каждой из ДС с последующим попарным "кинк+антикинк" объединением ("замыкание"). Далее наблюдается распространение процесса аннигиляции (свертка) ДС в $\pm y$-направлениях со скоростью $c = 1$ (рис. 2). Аналогичные результаты были получены также при $\varepsilon_{12} = \pi$. Таким образом, в случае однополярных ($\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{12} = \pi$) ДС во всех экспериментах конфигурации (9.1) наблюдается распад ТС (5) на $Q_t$ ЛВ и парная аннигиляция ДС, которые поглощают определенную часть энергии ТС, эквивалентной индексу Хопфа $Q_t = 2$ в виде пары ЛВ с $Q_t = 1$.

Во второй серии экспериментов по конфигурации (9.1) были проведены аналогичные численные расчеты, но в случае разнополярных ДС: $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \pi$. Получены модели, обладающие свойствами аналогичными предыдущей серии экспериментов (см. рис. 2), но с единственным отличием — ДС при аннигиляции поглощают часть энергии ТС (5) эквивалентной $Q_t = 1$ в виде пары ЛВ с $Q_t = 1/2$.

Таким образом, при трехсолитонном взаимодействии вихря (5) с нееловскими разнополярными ДС вида (6) происходит распад ТС на $Q_t - 1$ ЛВ, обладающих единичным значением

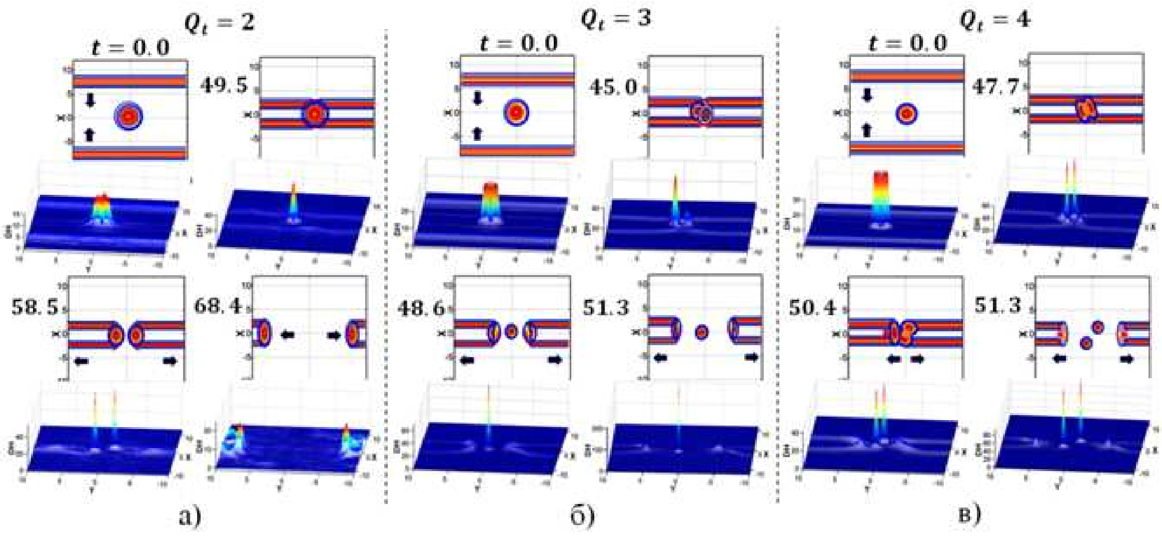

Рис. 2. *Эволюция плотности энергии (DH) и ее контурная проекция для трехсолитонных взаимодействий конфигурации (9.1) при* $\varepsilon_{12} = 0$*: а)* $Q_t = 2$*; б)* $Q_t = 3$*; в)* $Q_t = 4$*. Общее время моделирования:* $t \in [0, 70]$.

индекса Хопфа ($Q_t = 1$) и пары ЛВ с $Q_t = 1/2$, которые поглощаются аннигилирующими ДС.

**Конфигурация** $\boldsymbol{S}_{B(\pm\pi/2)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(\pm\pi/2)}$.

Рассмотрим результаты экспериментов по конфигурации (9.2) для случая однополярных блоховских ($\varepsilon_{12} = \pm\pi/2$) ДС (6). Численные эксперименты показали, что в данном случае процесс распада ТС и последующая аннигиляция ДС происходит без поглощения образовавшихся ЛВ, обладающих единичными значениями индекса Хопфа: $Q_t = 1$ (см. рис. 3 для случая $\varepsilon_{12} = +\pi/2$). При взаимодействии топологических солитонов (5) и (6) происходит вышеописанный процесс разрыва и объединения ДС с последующей их аннигиляцией. При этом вихрь, обладающий единичным топологическим зарядом $Q_t = 1$ не поглощается аннигилирующими ДС (рис. 3а). Аналогичные процессы наблюдаются для $Q_t = 2, 3, 4$ (см., рис. 3б–3г).

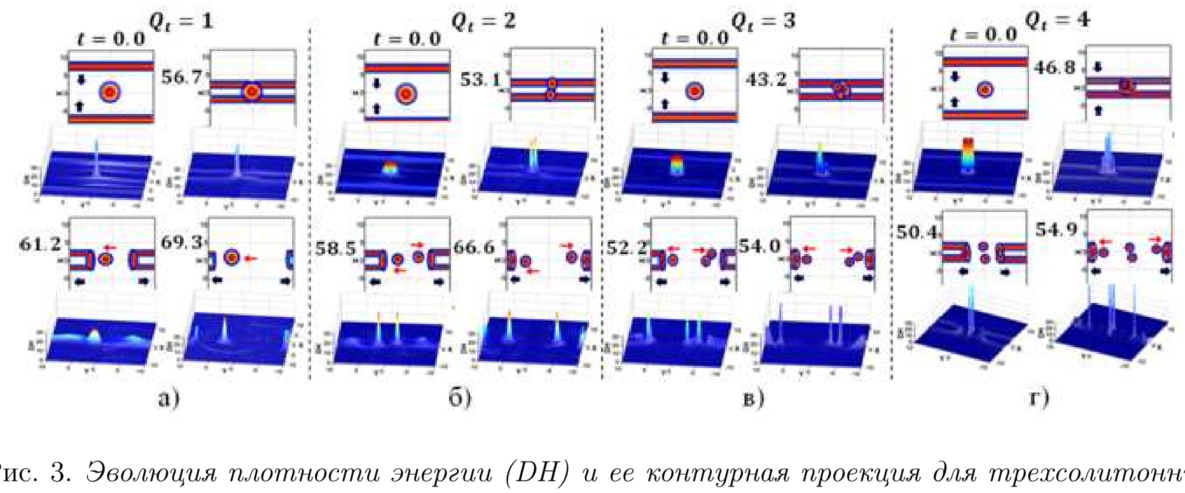

Рис. 3. *Эволюция плотности энергии (DH) и ее контурная проекция для трехсолитонных взаимодействий конфигурации (9.2) при* $\varepsilon_{12} = \pi/2$*: а)* $Q_t = 1$*; б)* $Q_t = 2$*; в)* $Q_t = 3$*; г)* $Q_t = 4$*. Общее время моделирования:* $t \in [0, 70]$.

В случае разнополярных ($\varepsilon_1 = \pm\pi/2$, $\varepsilon_2 = \mp\pi/2$) блоховских ДС иллюстрация исходного состояния ($t = 0$) трехсолитонной конфигурации (9.2) приведена на рис. 4. Для случая $Q_t = 3$ (8.3) плотность энергии ($DH$) ТС (5) локализована в кольцеобразной форме (см. рис. 4а). Изоспиновая структура поля (9.2) в виде проекций единичного изовектора (4) на комплексную плоскость $z$, (10), а также в двумерном пространстве дискретной решетки $L(x, y)$ приведена соответственно на рис. 4б и 4в. Проекция изоспиновой структуры топологического вихря (5) на плоскость $z$ для значений $Q_t = 1, \dots, 4$ (8.1)–(8.4) приведена на рис. 4г.

Для конфигурации, описанной на рис. 4, аналогично случаю разнополярных нееловских ДС при трехсолитонном взаимодействии вихря (5) с блоховскими разнополярными ДС вида (6) происходит распад ТС на $Q_t - 1$ ЛВ, обладающих единичным значением индекса Хопфа ($Q_t = 1$) и пары ЛВ с $Q_t = 1/2$, которые поглощаются аннигилирующими ДС.

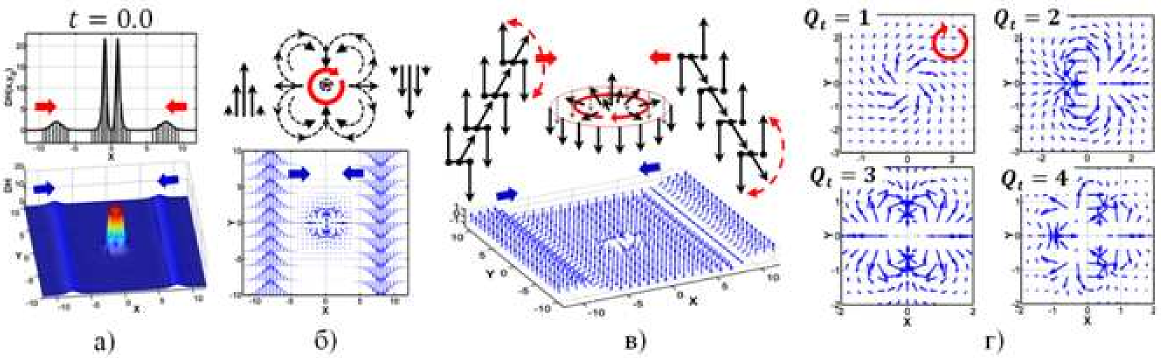


Рис. 4. *Трехсолитонное поле конфигурации (9.2) в случае $Q_t = 3$ и $\varepsilon_{12} = \pm\pi/2$ при $t = 0$ (а–в); г) проекция $\boldsymbol{S}(s_1, s_2, s_3)$ решения (5) на плоскость $z$ для $Q_t = 1, \dots, 4$.*

**Конфигурация $\boldsymbol{S}_{N(0,\pi)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(\pm\pi/2)}$.**

В этой серии экспериментов были исследованы процессы трехсолитонных взаимодействий разнотипных ДС (7.1), (7.2) с ТС (5) по конфигурации (9.3).Иллюстрация исходного состояния ($t = 0$) для случая $Q_t = 2$ (8.2) данной конфигурации приведена на рис. 5. Плотность энергии ($DH$) ТС (5) при $Q_t \geqslant 2$ локализована в кольцеобразной форме (см. рис. 5а). Изоспиновая структура поля (9.3) в виде проекций единичного изовектора (4) на комплексную плоскость $z$ (10), а также в двумерном пространстве дискретной решетки $L(x, y)$ приведена соответственно на рис. 5б и 5в. Изоспиновая структура ТС (5) для значений $Q_t = 1, \dots, 4$ приведена на рис. 5г, где в частности, обозначены центры изоспиновых вихревых структур.

Разработаны эволюционные модели следующих конфигураций:

$$\boldsymbol{S}_{N(0)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(+\pi/2)}, \quad \boldsymbol{S}_{N(0)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(-\pi/2)},$$

$$\boldsymbol{S}_{N(\pi)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(+\pi/2)}, \quad \boldsymbol{S}_{N(\pi)} \to \boldsymbol{S}_{V(Q_t)} \leftarrow \boldsymbol{S}_{B(-\pi/2)},$$

Во всех полученных моделях данной серии экспериментов, аналогично предыдущим случаям наблюдается парная аннигиляция ДС (7.1) и (7.2) и распад ТС (5) на ЛВ. При этом происходит распад ТС на $Q_t - 1$ ЛВ, обладающих единичным значением индекса Хопфа ($Q_t = 1$) и пары ЛВ с $Q_t = 1/2$, которые поглощаются аннигилирующими ДС.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

180-градусные ДС вида (6) ($\pi$-кинк, $\pi$-антикинк) являются точными решениями исследуемой сигма-модели (2) и соответствующей меридианному сечению блоховской сферы (1) при $\varphi(x, y, t) = 0$ УСГ вида (12). Динамика двухсолитонных взаимодействий (2+1)-мерных ТС

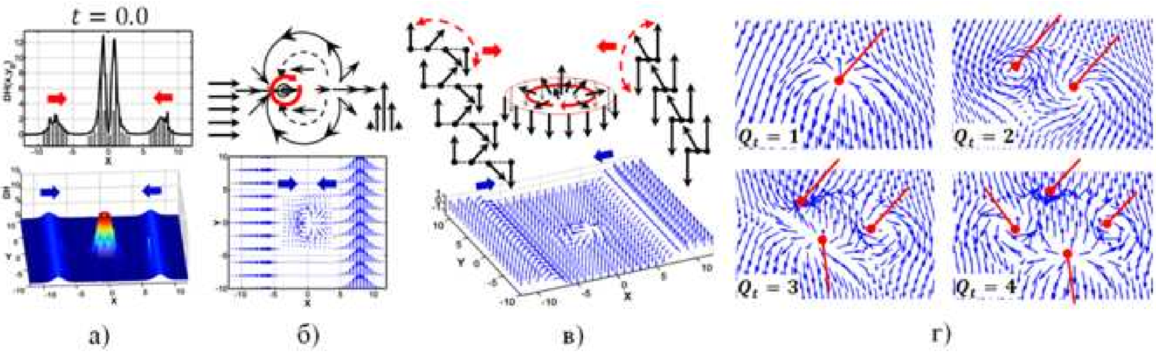


Рис. 5. *Трехсолитонное поле конфигурации (9.3) в случае* $Q_t = 2$ *и* $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \pi/2$ *при* $t = 0$ *(а–в); г) изоспиновая структура* $\boldsymbol{S}(s_1, s_2, s_3)$ *решения (5) для* $Q_t = 1, \ldots, 4$.

вида (5) исследованы нами ранее (см., например, [8]), где были получены модели их дальнодействующих взаимодействий, столкновений и отражений, а также модели с поэтапной аннигиляцией ТСВ работе [7] проведено численное исследование моделей двухсолитонных взаимодействий топологических решений вида (5) и (6) (при $\varepsilon = 0$), где были получены модели с поэтапным распадом ТС (5) на ЛВ, обладающие половинными ($Q_t = 1/2$) значениями топологического заряда (индекса Хопфа).Аналогичные процессы наблюдались и в случае двухсолитонного взаимодействия вихрей (5) с блоховскими ДС (см. рис. 6). При этом ДС сохраняли устойчивость [8, 10] независимо от динамических параметров конфигурации двухсолитонных взаимодействийтипа "вихрь-кинк".

В двухсолитонных экспериментах (см., например, рис. 6) ЛВ (с $Q_t = 1/2$), распространяющимся вдоль плоскости ДС соответствует движущаяся со скоростью $c = 1$ область перехода между локальными вакуумными состояниями $\theta(x, y, t) = 0, \pm\pi$: $\boldsymbol{S}(\uparrow) \leftrightarrow \boldsymbol{S}(\downarrow)$. В этом случае определенный интерес представляет рассмотрение процессов взаимодействия ТС (5) с 360-градусными ДС ($2\pi$-кинк, $2\pi$-антикинк). В экспериментах настоящей работы изоспиновая структура двух 180-градусных ($\pi$-кинк $\rightarrow\leftarrow$ $\pi$-антикинк) ДС вида (6) при непосредственном взаимодействии в некоторый момент времени образуют 360-градусную топологическую структуру.

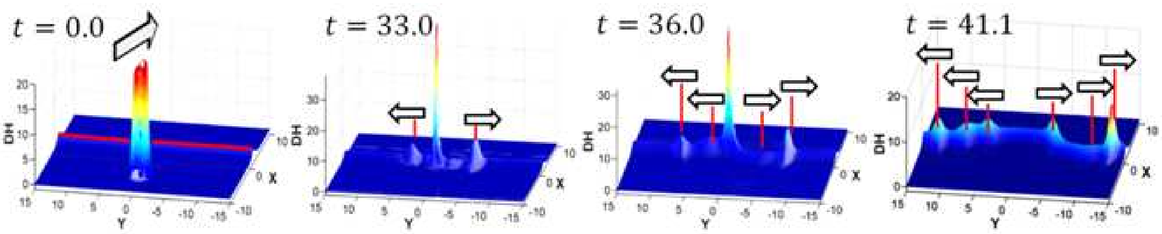


Рис. 6. *Плотность энергии (DH) процесса взаимодействия топологического вихря (5) при* $Q_t = -3$, *движущегося со скоростью* $\boldsymbol{v}(t_0) \approx 0.196$ *с неподвижной* ($\boldsymbol{v}(t_0) = 0$) *доменной стенкой (7.2) при* $\varepsilon = -\pi/2$.

Следует отметить, что первые исследования процессов взаимодействия фермионных частиц с доменными стенками было проведено в работе [9], где обсуждаются свойства масс-спектров частиц в псевдоскалярном поле с доменной структурой вакуума и взаимодействующих с ним фермионов. Заметим также, что аналогичные исследования процессов взаимодействия скирмионных решений (ТС при $Q_t = 1$) с нееловскими ДС в рамках (2+1)мерной O(3) НСМ для двухсолитонного случая (скирмион-кинк)были проведены также в работе [10].

В указанной работе методами численного моделирования, в частности, было показано, что движущийся скирмион (ТС), обладающий единичным индексом Хопфа при столкновении с ДС распадается на два ЛВ с $Q_t = 1/2$. При этом образовавшиеся ЛВ распространяются вдоль ДС со скоростью $c = 1$ в противоположных направлениях. Результаты работы [10] были также получены нами в работе [7] в том числе для более высоких значений индекса Хопфа $Q_t \geqslant 1$. Численное моделирование взаимодействия скирмионного решения с парой ДС проведено также в работе [1], где методом введения планарного перехода осуществляется механизм свободного прохождения скирмиона сквозь пары ДС.

В конце заметим, что наши эксперименты описывают физические процессы, где состояние поля в данной точке характеризуется тремя переменными $s_1, s_2, s_3$. Этими переменными описаны две функции, прежде всего лагранжиан (2), который дает уравнение, и гамильтониан (3), являющийся суммой кинетической и потенциальной энергий. Поскольку в данном случае идет дискуссия о сохранении энергии, то гамильтониан присутствует здесь как сохранение энергии, т. е. связь между переменными $s_1, s_2, s_3$ это как связь к лагранжиану. Во всех экспериментах настоящей работы топологические солитоны (5) и (6) до процессов взаимодействия сохраняют устойчивость — интеграл их энергии сохраняется с высокой точностью: $\Delta En(t_0)/En(t) \leqslant 10^{-5}$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования настоящей работы показали, что в (2+1)-мерной O(3) НСМ трехсолитонные взаимодействия 180-градусных ДС ($\pi$-кинков) с топологическим вихрем белавин-поляковского типа приводят к аннигиляции ДС и полному распадувихря на ЛВ. В частности, определены следующие свойства процессов трехсолитонного взаимодействия типа “кинк$\rightarrow$вихрь$\leftarrow$антикинк”:

— во всех экспериментах происходит аннигиляция ДС (в отличие от двухсолитонных “вихрь-кинк” взаимодействий, где ДС сохраняют устойчивость);

— в зависимости от типа межфазных границ при распаде топологического вихря происходит поглощение определенной части его энергии аннигилирующими ДС (в отличие от двухсолитонных “вихрь-кинк” взаимодействий, где топологический вихрь полностью распадается вдоль устойчивой ДС [6, 7]);

— во всех экспериментах топологические вихри распадаются на устойчивые ЛВ с единичными индексами Хопфа: $Q_t = 1$ (в отличие от двухсолитонных “вихрь-вихрь” взаимодействий, где образовавшиеся ЛВ обладают произвольными значениями $Q_t$ [6, 8]);

— при взаимодействии топологического вихря с разнополярными ДС нееловского ($\varepsilon = 0, \pi$) и блоховского ($\varepsilon = \pm\pi/2$) типов аннигиляция ДС происходит с поглощением энергии вихря, эквивалентнойединичному значению индекса Хопфа: $Q_t = 1$;

— в случае взаимодействия вихря с однополярными ДС нееловского типа ($\varepsilon = 0/\varepsilon = \pi$) аннигиляция ДС происходит с поглощением энергии вихря, эквивалентной значению индекса Хопфа: $Q_t = 2$;

— в случае взаимодействия вихря с однополярнымиДС блоховского типа ($\varepsilon_{12} = \pi/2$, $\varepsilon = -\pi/2$) аннигиляция ДС происходит без поглощения ЛВ, что является совершенно новым результатом в наших экспериментах.

Разработаны численные схемы и комплексы компьютерных программ для исследования динамики взаимодействия системы трехсолитонных взаимодействий, состоящей из топологического вихря и двух 180-градусных ДСв (2+1)-мерной анизотропной O(3) НСМ. Достоверность полученных моделей обеспечивается положительными результатами апробации используемых методов для известных задач (солитонных решений УСГ), высокой точностью сохранения интеграла энергии системы взаимодействующих солитонов и сопоставления построенных моделей с результатами других работ, а также с практическими экспериментами (см., например, [9, 10]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Xing, X. Skyrmion Domain Wall Collision and Domain Wall-gated Skyrmion Logic / X. Xing, Ph. W. T. Pong, Y. Zhou // Phys. Rev. B 94. — 2016. — P. 054408 (1–11).

2. Seidel, J. Topological Structures in Multiferroics – Domain Walls, Skyrmions and Vortices / J. Seidel, R. K. Vasudevan, N. Valanoor // Adv. Electron. Mater. — 2016. — V. 2. — P. 1500292 (1–14).

3. Белавин, А. А. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика / А. А. Белавин, А. М. Поляков // ЖЭТФ. — 1975. — Т. 22, № 10. — С. 503–506.

4. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский — М. : Наука, 1977. — 657 с.

5. Муминов, Х. Х. Многомерные динамические топологические солитоны в нелинейной анизотропной сигма-модели / Х. Х. Муминов // ДАН РТ. — 2002. — Т. 45, № 10. — С. 28–36.

6. Муминов, Х. Х. Математическое моделирование нелинейных динамических систем квантовой теории поля: монография / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2017. — 375 с.

7. Муминов, Х. Х. Динамика взаимодействия топологических вихрей с доменной стенкой в (2+1)-мерной нелинейной сигма-модели / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров // ДАН РТ. — 2015. — Т. 58, № 4. — С. 302–308.

8. Муминов, Х. Х. Взаимодействие и распад двумерных топологических солитонов O(3) векторной нелинейной сигма-модели / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров // ДАН РТ. — 2011. — Т. 54, № 2. — С. 110–114.

9. Волошин, М. Б. О процессах на границе вакуумных доменов / М. Б. Волошин // Ядерная физика. — 1975. — Т. 21, № 6. — С. 1331–1336.

10. Kudryavtsev, A. Skyrmions and domain walls in (2+1) dimensions / A. Kudryavtsev, B. M. Piette, W. J. Zakrjewsky // Nonlinearity. — 1998. — V. 11, № 4. — P. 783–796.


## REFERENCES


1. Xing X., Pong Ph.W.T., Zhou Y. SkyrmionDomain Wall Collision and Domain Wall-gated Skyrmion Logic. Phys. Rev. B 94, 2016,pp. 054408 (1–11).

2. Seidel J., Vasudevan R.K., Valanoor N. Topological Structures in Multiferroics – Domain Walls, Skyrmions and Vortices. Adv. Electron. Mater., 2016, vol. 2, pp. 1500292 (1–14).

3. Belavin A.A., Polyakov A.M. Metastable States of aTwo-Dimensional Isotropic Ferromagnets. [Belavin A.A., Polyakov A.M. Metastabil'nye sostoyaniya dvumernogo izotropnogo ferromagnetika]. *Zhurnal e'ksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1975, vol. 22, no. 10, pp. 503–506.

4. Samarskii A.A. Theory of Difference Schemes. [Samarskij A.A. Teoriya raznostnyx sxem]. Moscow: Nauka, 1977, 657 p.

5. Muminov Kh.Kh. Multidimensional dynamic topological solitons in a nonlinear anisotropic sigma model. [Muminov Kh.Kh. Mnogomernyyedinamicheskiyetopologicheskiyesolitony v nelineynoyanizotropnoy sigma-modeli]. *DAN RT — Reports of the AS RT*, 2002, vol. 45, no. 10, pp. 28–36.

6. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Mathematical modeling of nonlinear dynamical systems of quantum field theory. [Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyx dinamicheskix sistem kvantovoj teorii polya: monografiya]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House, 2017, 375 p.

7. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Dynamics of the interaction of topological vortices with a domain wall in a (2+1)-dimensional nonlinear sigma model. [Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh.

Dinamikavzaimodeystviyatopologicheskikhvikhrey s domennoystenkoy v (2+1)-mernoynelineynoy sigma-modeli]. *DAN RT — Reports of the AS RT*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 302–308.

8. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Interaction and decay of two-dimensional topological solitons in O(3) non-linear vector sigma model. [Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Vzaimodejstvie i raspad dvumernyx topologicheskix solitonov O(3) vektornoj nelinejnoj sigma-modeli]. *DAN RT — Reports of the AS RT*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 110–114.

9. Voloshin M.B. On Processes at the Boundary of Vacuum Domens. [Voloshin M.B. O processax na granice vakuumnyx domenov]. *Yadernaya fizika — Physics of Atomic Nuclei*, 1975, vol. 21, no. 6, pp. 1331–1336.

10. Kudryavtsev A., Piette B.M., Zakrjewsky W.J. Skyrmions and Domain Walls in (2+1) Dimensions. Nonlinearity, 1998, vol. 11, no. 4, pp. 783–796.

*Муминов Хикмат Халимович, академик Академии наук Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., вице-президент АН РТ, Душанбе, Таджикистан*
*E-mail: khikmat@inbox.ru*
*Тел.: (+992)919042476*

*Muminov Khikmat Khalimovich, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Vice-President of the AS RT, Dushanbe, Tajikistan*
*E-mail: khikmat@inbox.ru*
*Tel.: (+992)919042476*

*Шокиров Фарход Шамсидинович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Физико-технического института им. С. У. Умарова АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан*
*E-mail: farhod0475@gmail.com*
*Тел.: (+992) 918963109*

*Shokirov Farkhod Shamsidinovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcherof the S. U. Umarov Physical-Technical Institute of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan*
*E-mail: farhod0475@gmail.com*
*Tel.: (+992) 918963109*