УДК 519.624.3

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ*

С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.07.2016 г.

Аннотация. В работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения граничной задачи, возникающей при описании малых поперечных деформаций системы, которая состоит из стержня, один конец которого защемлён, а ко второму прикреплена растянутая струна, а её другой конец закреплён. Весь объект находится во внешней среде с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения. Кроме того, возникающие трудности обусловлены ещё и тем, что возникающая граничная задача оказывается разнопорядковой. При анализе решений мы используем поточечный метод Ю. В. Покорного, показавший свою эффективность. Доказана оценка погрешности.

Ключевые слова: граничная задача, метод конечных элементов, производная по мере, интеграл по мере, оценка погрешности.

ADAPTATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR DIFFERENT ORDER MATHEMATICAL MODEL WITH NONSMOOTH SOLUTIONS

S. A. Shabrov, N. I. Bugakova, F. V. Golovaneva

Abstract. In the article the method of finite element adapted to finding an approximate solution of the boundary value problem, arises when describing the small transverse deformation of the system, which consists of a rod, one end of which is fixed, and to the other one a stretched string was affixed and it's other end was fixed. The whole object is in an external medium with localized singularities leading to losing of smoothness of the solution. Besides, the difficulties that arise are also due to the fact that the arising boundary value problem turns out to be of a different order. For analysis of the solutions we use the pointwise method of Yu. V. Pokorny, which proved to be effective. The estimate of the error was proved.

Keywords: the boundary problem, finite element method, derivative with measure, integral with measure, estimate of the error.

В работе метод конечных элементов адаптируется для разнопорядковой математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf\limits_{[0,\xi)} p > 0$, $p(x) \equiv 0$ на $[\xi;1]$, $r(x) \geqslant 0$ на всем $[0;1]$ и $r(x) > 0$ на $[\xi;1]$. Эта модель описывает малые деформации механической системы, состоящей из стержня, один из концов которого защемлён, а к свободному — прикреплена растянутая струна, второй конец которой закреплён.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,1]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0,\xi)$, имеет конечное изменение на $[0,\xi-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0,\xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0,1]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0,1]$ функция и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x)>0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,1]} r(x)>0$.

Обозначим через $S(\sigma)$ множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Уравнение в (1) определено на специальном расширении $\overline{[0,1]}_\sigma$ отрезка $[0,1]$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$.

Множество $\overline{[0,1]}_\sigma$ строится следующим образом. На $[0,1]$ вводим метрику $\rho(x,y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Если $S(\sigma)\neq\varnothing$, то $([0,1],\rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0,1]}_\sigma$.

В последнее десятилетие особое внимание уделяется построению и изучению математических моделей малых деформаций струнных, стержневых и струнно-стержневых систем. Это объясняется их актуальностью во многих отраслях естествознания и техники. В то же время, наличие особенностей (как внутренних, так и внешних) у таких систем приводит к потере свойства гладкости решения соответствующих им математических моделей. Этот факт исключает возможность использования классических производных. Применение теории обобщенных функций к таким моделям не дает требуемого эффекта, так как возникает ряд трудноразрешимых проблем. Во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную; во-вторых, удается доказать только слабую разрешимость возникающих граничных задач, что не достаточно для приложений. В данной работе к изучаемому объекту мы применим поточечный подход, берущий начало в работе Стилтьеса о колебании нити с бусинами и получивший дальнейшее развитие в работах М. Г. Крейна, Ф. Р. Гантмахера, О. Келлога. Данный подход был расширен Ю. В. Покорным и его учениками при изучении одномерных объектов [1]–[8]. Последнее позволило исследовать задачи о деформациях струны, стержня, помещенных во внешнюю среду с локализованными особенностями, наличие которых приводят к потере гладкости у решения.

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Для нахождения приближенного решения граничной задачи (1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. В качестве базисных функций $\varphi_i(x)$ возьмем следующие функции. Каждый из отрезков $[0;\xi]$ и $[\xi;1]$ мы разобьем на N равных частей; точки разбиения мы обозначим через $\overline{x}_i\in[0;\xi]$ и $\overline{\overline{x}}_i\in[\xi;1]$, и назовем, как это принято, узловыми. Тогда

$$\varphi_{2i-1}(x)=\begin{cases} 1-3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i-\overline{x}_{i-1}}\right)^2-2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i-\overline{x}_{i-1}}\right)^3, & \text{для } x\in[\overline{x}_{i-1},\overline{x}_i]\\ 1-3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1}-\overline{x}_i}\right)^2+2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1}-\overline{x}_i}\right)^3, & \text{для } x\in[\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1}]\\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x)=\begin{cases} (x-\overline{x}_i)\left(1+\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i-\overline{x}_{i-1}}\right)^2, & \text{для} \quad x\in[\overline{x}_{i-1},\overline{x}_i]\\ (x-\overline{x}_i)\left(1-\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1}-\overline{x}_i}\right)^2, & \text{для} \quad x\in[\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1}]\\ 0, & \text{для} \quad \text{остальных } x, \end{cases}$$

$$\varphi_{2N-1}(x) = \begin{cases} 1-3\left(\dfrac{x-\xi}{\xi-\overline{x}_{N-1}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x-\xi}{\xi-\overline{x}_{N-1}}\right)^3, & \text{для } x\in[\overline{x}_{N-1},\xi] \\ \dfrac{x-\overline{\overline{x}}_1}{\xi-\overline{\overline{x}}_1} & \text{для } x\in[\xi,\overline{\overline{x}}_1] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2N}(x) = \begin{cases} (x-\xi)\left(1+\dfrac{x-\xi}{\xi-\overline{x}_{N-1}}\right)^2, & \text{для} \quad x\in[\overline{x}_{N-1},\xi] \\ 0, & \text{для} \quad \text{остальных } x, \end{cases}$$

$$\varphi_{i+2N}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\overline{\overline{x}}_{i-1}}{\overline{\overline{x}}_i-\overline{\overline{x}}_{i-1}}, & \text{для} \quad x\in[\overline{\overline{x}}_{i-1},\overline{\overline{x}}_i] \\ \dfrac{x-\overline{\overline{x}}_{i+1}}{\overline{\overline{x}}_i-\overline{\overline{x}}_{i+1}}, & \text{для} \quad x\in[\overline{\overline{x}}_i,\overline{\overline{x}}_{i+1}] \\ 0, & \text{для} \quad \text{остальных } x, \end{cases}$$

$i=1,2,\ldots,N-1$.

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в узловых точках и в связи с этим будем использовать в уравнениях вместо $u(x)$ функцию

$$v(x) = \sum_{i=1}^{3N-1} v_i\varphi_i(x), \tag{2}$$

где v_i — ее значение в узловой точке x_i (при этом $x_i=\overline{x}_i$, если $i\leqslant 2N$ и $x_i=\overline{\overline{x}}_{i-2N}$ в противном случае), если $i=1,\,3,\ldots,\,2N-1,\,2N+1,\,2N+2,\,\ldots,\,3N-2,\,3N-1$, и значение ее производной, если $i=2,\,4,\ldots,\,2N-2,\,2N$.

Уравнение $(pu''_{xx})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=F'_\sigma$ умножим на базисную функцию $\varphi_j(x)$ и проинтегрируем по мере σ по всему $[0;1]$:

$$\int_0^1 \left(\left(pu''_{xx}\right)''_{x\sigma}-\left(ru'_x\right)'_\sigma+uQ'_\sigma\right)\varphi_j\,d\sigma = \int_0^1 \varphi_j F'_\sigma\,d\sigma.$$

Разбивая интеграл в левой части последнего равенства на три, и проинтегрировав первый интеграл дважды по частям, второй — один раз, будем иметь

$$\int_0^1 pu''_{xx}{\varphi_j}''_{xx}\,dx + \int_0^1 ru'_x{\varphi_j}'_x\,dx + \int_0^1 u\varphi_j\,dQ = \int_0^1 \varphi_j\,dF,$$

или, так как $u(x)$ и $\varphi_j(x)$ удовлетворяют граничным условиям и $p(x)\equiv 0$ при $x\geqslant\xi$,

$$\int_0^\xi pu''_{xx}{\varphi_j}''_{xx}\,dx + \int_0^1 ru'_x{\varphi_j}'_x\,dx + \int_0^1 u\varphi_j\,dQ = \int_0^1 \varphi_j\,dF,$$

$j=1,2,\ldots,3N-1$. Поставив сюда вместо $u(x)$ функцию (2), мы получим систему из $3N-1$ уравнением с $3N-1$ неизвестной

$$\sum_{i=1}^{3N-1} v_i\int_0^\xi p{\varphi_i}''_{xx}{\varphi_j}''_{xx}\,dx + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i\int_0^1 r{\varphi_i}'_x{\varphi_j}'_x\,dx + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i\int_0^1 \varphi_i\varphi_j\,dQ = \int_0^1 \varphi_j\,dF, \tag{3}$$

$j = 1, 2, \ldots, 3N - 1$.

Следующая величина

$$\langle \varphi,\psi \rangle = \int\limits_0^\xi p\varphi''_{xx}\psi''_{xx}\,dx + \int\limits_0^1 r\varphi'_x\psi'_x\,dx + \int\limits_0^1 \varphi\psi\,dQ$$

является билинейным симметричным функционалом в пространстве E — абсолютно непрерывных на $[0;1]$ функций, первая производная которых суммируема с квадратом на $[0;1]$ и абсолютно непрерывна на $[0;\xi]$, вторая производная (определенная только на $[0;\xi]$) суммируема с квадратом на $[0;\xi]$, кроме того, эти функции удовлетворяют условиям $u(0) = u'_x(0) = u(1) = 0$.

Очевидно, что из положительности $p(x)$ на $[0;\xi)$ и неотрицательности $r(x)$, положительности $r(x)$ на $(\xi;1]$ и неубывания $Q(x)$, $\langle \varphi,\varphi \rangle$ является неотрицательным и невырожденным:

$$\langle \varphi,\varphi \rangle \geqslant 0 \text{ для всякой } \varphi, \quad \langle \varphi,\varphi \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

Поэтому $\langle \varphi,\psi \rangle$ может служить скалярным произведением; коэффициенты матрицы системы (3) образуют матрицу Грамма системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$. Поэтому определитель системы отличен от нуля. Отсюда следует, что (3) имеет единственное решение.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Здесь доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (1), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей каждого из отрезков $[0;\xi]$ и $[\xi;1]$. Тогда справедлива оценка*

$$a(u-v,u-v) \leqslant C \cdot h,$$

где $h = \max\left\{\left(\dfrac{\xi}{N}\right)^2; \dfrac{1-\xi}{N}\right\}$, C не зависит от h, и $a(u,u)$ — энергетическая норма:

$$a(u,u) = \int\limits_0^\xi u''^2\,dx + \int\limits_0^1 ru'^2\,dx + \int\limits_0^1 u^2\,dQ.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что задача поиска решения математической модели (1) эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала $I(v) = (Lv,v) - 2(F'_\sigma,v)$, где $Lu = (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma$ и $(u,v) = \int\limits_0^1 uv\,d\sigma$, на множестве $H_0^{4,2}$ — абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,1]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0,\xi)$, имеет конечное изменение на $[0,\xi-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0,\xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, и таких, что $u(0) = u'(0) = u(1) = 0$.

Перепишем выражение (Lv,v) в виде

$$(Lv,v) = \left(pv''_{xx}\right)'_x v\Big|_0^1 - \left(pv''_{xx}\right)v'_x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 pv''^2_{xx}\,dx - \left(rv'_x\right)v\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 rv'^2_x\,dx + \int\limits_0^1 v^2 Q'_\sigma\,d\sigma.$$

Таким образом, функционал, который необходимо минимизировать, принимает вид

$$I(v) = \int\limits_0^1 p{v''_{xx}}^2\,dx + \int\limits_0^1 r{v'_x}^2\,dx + \int\limits_0^1 v^2 Q'_\sigma\,d\sigma - \int\limits_0^1 vF'_\sigma\,d\sigma, \tag{4}$$

так как внеинтегральные слагаемые пропадут в силу граничных условий $u(0) = u'(0) = u(1) = 0$ и $p(1) = 0$.

Решение математической модели (1) и дает минимум функционалу (4) на $H_0^{4,2}$.

Функционал (4) можно определить на функциях $u(x)$, у которых вторая производная $u''_{xx}(x)$, определенная на $[0;\xi]$, суммируема с квадратом на $[0;\xi]$, а первая производная $u'_x(x)$ суммируема с квадратом на $[0;1]$, т. е. на $\widehat{H}_0^{2,1}$ — пополнении $H_0^{4,2}$ по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{H}_0^{2,1}} = \int\limits_0^\xi p{v''_{xx}}^2\,dx + \int\limits_0^1 r{v'_x}^2\,dx + \int\limits_0^1 v^2 Q'_\sigma\,d\sigma$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимума: каждое новое значение $I(v)$ есть предел $I(v_n)$, где $v_n \in H_0^{4,2}$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{H}_0^{2,1}} \to 0$, если u — функция из $\widehat{H}_0^{2,1}$, на которой функционал $I(v)$ принимает наименьшее значение, и если $u \in H_0^{4,2}$ доставляет минимум $I(v)$, то она становится минимизирующей на $\widehat{H}_0^{2,1}$.

Доказательство в обратную сторону достаточно очевидно: минимизация $I(v)$ на $\widehat{H}_0^{2,1}$ приводит к математической модели (4).

Таким образом, $I(v)$ мы можем минимизировать на $\widehat{H}_0^{2,1}$. Другими словами, в качестве базисных функций мы можем действительно брать $\{\varphi_i(x)\}$.

Оценим разность между точным решением $u(x)$ и полученным приближенным решением $v(x)$.

Сначала оценим разность между точным решением и ее интерполянтом в энергетической норме (модуль разности между $u(x)$ и $v(x)$ будет еще меньше). Последнее основано на аналоге классического результата теории конечным элементов [9], а именно:

предположим, что $u_0(x)$ минимизирует $I(u)$ на множестве $\widehat{H}_0^{2,1}$, H_N — конечномерное его подпространство. Тогда

1) *минимум $I(v_h)$ и минимум $\langle u - v_h, u - v_h\rangle$, где v_h пробегает подпространство H_N, достигается на одной и той же функции u_h;*

2) *по отношению к энергетическому скалярному произведению u_h есть проекция u на H_N, или, что то же самое, ошибка $u - u_h$ ортогональна H_N:*

$$\langle u - u_h, v_h\rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in H_N; \tag{5}$$

3) *функция u_h, на которой достигается минимум, удовлетворяет условию*

$$\langle u_h, v_h\rangle = (F'_\sigma, v_h) \text{ для всех } v_h \in \widehat{H}_0^{2,1} \tag{6}$$

и

$$\langle u, v\rangle = (F'_\sigma, v) \text{ для всех } v \in H_N. \tag{7}$$

Как и в классической теории, для нас эта теорема является ключевой. Более того, все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве со скалярным произведением функция из подпространства H_N, ближайшая к заданной функции u, всегда является ее проекцией на H_N. Наоборот,

1) вытекает из 2): $\langle u-u_h-v_h, u-u_h-v_h\rangle = \langle u-u_h, u-u_h\rangle - 2\langle u-u_h, v_h\rangle + \langle v_h, v_h\rangle$. Если справедливо равенство (5), то

$$\langle u-u_h, u-u_h\rangle \leqslant \langle u-u_h-v_h, u-u_h-v_h\rangle.$$

Равенство возможно только тогда, когда $\langle v_h, v_h\rangle = 0$, т. е. $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция на которой $\langle u-u_h, u-u_h\rangle$ достигает минимума, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (7) справедливо для всех $v \in \widehat{H}_0^{2,1}$, то оно справедливо и для $v_h \in H_N$; вычитая из него (6), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3) — из него вытекает 2), а из него следует 1). Если u_h минимизирует $I(u)$ на H_N, то $I(u_h) \leqslant I(u_h + \varepsilon v_h)$ для всех ε и v_h, или, вспоминая выражение $I(u)$ через $\langle u, u\rangle$ и (F'_σ, u):

$$\langle u_h, u_h\rangle - 2(F'_\sigma, u_h) \leqslant \langle u_h, u_h\rangle - 2(F'_\sigma, u_h) + 2\varepsilon\Big[\langle u_h, v_h\rangle - (F'_\sigma, v_h)\Big] + \varepsilon^2\langle v_h, v_h\rangle.$$

Поэтому

$$0 \leqslant 2\varepsilon\Big[\langle u_h, v_h\rangle - (F'_\sigma, v_h)\Big] + \varepsilon^2\langle v_h, v_h\rangle.$$

Так как это верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h\rangle = (F'_\sigma, v_h)$, которое и означает равенство нулю первой вариации функционала $I(u)$ в точке u_h в направлении v_h. Таким образом, утверждение 3) доказано.

Интерполянт $u_I(x)$ точного решения $u(x)$ математической модели (1) можно выразить через базисные функции следующим образом

$$u_I(x) = \sum_{k=1}^{N} u(x_k)\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N} u'_x(x_k)\varphi_{2k}(x) + \sum_{k=2N+1}^{3N-1} u(x_k)\varphi_k(x).$$

Через $w(x)$ обозначим разность $u(x) - u_I(x)$. Оценим $|w(x)|$ в энергетической норме

$$a(u,u) = \int\limits_0^{\xi} u''^2\,dx + \int\limits_0^1 ru'^2\,dx + \int\limits_0^1 u^2\,dQ.$$

Для оценки $|w(x)|$ и $|w'(x)|$ нам понадобятся оценки $|w'''_{xxx}(x+0)|$ и $|w''_{xx}(x_k)|$.

Для $|w'''(x_k+0)|$ имеем:

$$w'''(x_k+0) = u'''(x_k+0) + u(x_{k+1})\frac{12}{h^3} - u'(x_{k+1})\frac{6}{h^2} - u(x_k)\frac{12}{h^3} - u'(x_k)\frac{6}{h^2},$$

или, после несложных преобразований,

$$w'''(x_k+0) = \frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\frac{h^3}{6} + \frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s} u''(t)\,dt\,ds -$$

$$-\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_k} u''(t)\,dt\,ds = \frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\left(-\frac{h^3}{6}\right) +$$

$$+\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k+0}^{t} u'''(\tau)\,d\tau\,dt\,ds + \frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\frac{h^3}{3} - \frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k+0}^{t} u'''(\tau)\,d\tau\,dt\,ds =$$

$$= \frac{6}{h^3} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{x_k}^{s} \int\limits_{x_k+0}^{t} (u'''(\tau) - u'''(x_k+0))\, d\tau dt ds + \frac{6}{h^3} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{s}^{x_{k+1}} \int\limits_{x_k+0}^{t} (u'''(x_k+0) - u'''(\tau))\, d\tau\, dt\, ds.$$

Из последнего равенства находим

$$|w'''(x_k+0)| \leqslant \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3. \tag{8}$$

Далее, оценим $|w''(x_k)|$. Из равенства

$$w''_{xx}(x_k) = u''(x_k) - \frac{6}{h^2} u(x_{k+1}) + \frac{2}{h} u'(x_{k+1}) + \frac{6}{h^2} u(x_k) + \frac{4}{h} u'(x_k)$$

последовательно находим

$$w''_{xx}(x_k) = u''(x_k) - \frac{2}{h^2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (2u'(s) - 2u'(x_k) + u'(s) - u'(x_{k+1}))\, ds =$$

$$= u''(x_k) - \frac{2}{h^2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left(2 \int\limits_{x_k}^{s} u''(t)\, dt - \int\limits_{s}^{x_{k+1}} u''(t)\, dt \right) ds =$$

$$= \frac{2}{h^2} u''(x_k) h^2 - \frac{2}{h^2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} 2 \int\limits_{x_k}^{s} u''(t)\, dt\, ds - \frac{2}{h^2} u''(x_k) \frac{h^2}{2} + \frac{2}{h^2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{s}^{x_{k+1}} u''(t)\, dt\, ds =$$

$$= \frac{2}{h^2} \cdot 2 \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{x_k}^{s} (u''(x_k) - u''(t))\, dt\, ds + \frac{2}{h^2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{s}^{x_{k+1}} (u''(t) - u''(x_k))\, dt\, ds.$$

Отсюда вытекают оценки:

$$|w''_{xx}(x_k)| \leqslant \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} (u'') \cdot 3 \quad \text{и} \quad |w''_{xx}(x_k)| \leqslant \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''| \cdot 6. \tag{9}$$

Оценим теперь $|w(x)|$, когда $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Так как $w(x_k) = w'_x(x_k) = 0$, то

$$w(x) = \int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{x_k}^{s} \left(w''_{xx}(x_k) + \int\limits_{x_k+0}^{t} w'''_{xxx}(x_k+0) + \int\limits_{x_k+0}^{\tau} u''''_{xxx\sigma}\, d\sigma \right) d\tau\, dt\, ds =$$

$$= w''_{xx}(x_k) \frac{(x-x_k)^2}{2} + w'''_{xxx}(x_k+0) \frac{(x-x_k)^3}{6} + \int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{x_k}^{s} \int\limits_{x_k+0}^{t} \int\limits_{x_k+0}^{\tau} u''''_{xxx\sigma}\, d\sigma\, d\tau\, dt\, ds.$$

Поэтому, с учетом полученных ранее оценок для $|w''_{xx}(x_k)|$ и $|w'''_{xxx}(x_k+0)|$,

$$|w(x)| \leqslant |w''_{xx}(x_k)| \cdot \frac{h^2}{2} + |w'''_{xxx}(x_k+0)| \cdot \frac{h^3}{6} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6} \leqslant$$

$$\leqslant 6 \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h^3}{6} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6}.$$

А так как h — малая величина, то можно записать

$$|w(x)| \leqslant C_{k,1} \cdot \frac{h^2}{2},$$

где

$$C_{k,1} = 6 \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Так как

$$w'(x) = w''_{xx}(x_k)(x - x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0)\frac{(x - x_k)^2}{2} + \int_{x_k}^{x} \int_{x_k+0}^{s} \int_{x_{k+0}}^{t} u'''_{xxx\sigma} d\sigma dt ds,$$

то

$$|w'(x)| \leqslant |w''_{xx}(x_k)| \cdot h + |w'''_{xxx}(x_k + 0)|\frac{h^2}{2} + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u'''_{xxx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma),$$

или, с учётом оценок (9), (8),

$$|w'(x)| \leqslant 6 \cdot \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''(x)| \cdot h + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3 \cdot \frac{h^2}{2} + \\ + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u'''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^2}{2} \leqslant C_{k,1} \cdot h.$$

Далее, из равенства

$$w''_{xx}(x) = w''_{xx}(x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0)(x - x_k) + \int_{x_k+0}^{x} \int_{x_k+0}^{s} u''''_{xxx\sigma} \, d\sigma \, ds$$

вытекает оценка для вариации:

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_k-0} (w''_{xx}) \leqslant |w'''_{xxx}(x_k + 0)| \cdot h + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}} (\sigma) \cdot h \leqslant C_{k,2} \cdot h,$$

где

$$C_{k,2} = \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3 + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_{k+0}}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Оценим теперь близость $u_I(x)$ к $u(x)$ по энергетической норме, т. е. оценим $a(w, w)$:

$$a(w, w) = \int_0^{\xi} w''^2_{xx} \, dx + \int_0^1 r w'^2_x \, dx + \int_0^1 w^2 \, dQ.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям:

$$\int_0^{\xi} w''^2_{xx} \, dx = w''_{xx} w'_x \Big|_0^{\xi} - \int_0^{\xi} w'_x \, dw''_{xx} = -\int_0^{\xi} w' \, dw'',$$

так как $w'_x(0) = w'_x(\xi) = 0$. Далее,

$$\int\limits_0^\xi w'_x\, dw''_{xx} = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w'_x\, dw''_{xx} + w'_x(0)\Delta^+ w''_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{N-1} w'_x(x_k)\Delta w''_{xx}(x_k) + w'_x(\xi)\Delta^- w''_{xx}(\xi).$$

Все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $w'_x(x_k) = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots,$ N. На основании оценок, полученных ранее, получаем

$$\left|\int\limits_0^\xi w'_x\, dw''_{xx}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |w'_x(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (w''_{xx}) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}\cdot h\cdot C_{k,2}\cdot h = h^2 \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}\cdot C_{k,2},$$

или, вспоминая определения $C_{k,1}$ и $C_{k,2}$, будем иметь:

$$\left|\int\limits_0^\xi w'_x\, dw''_{xx}\right| \leqslant h^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(6\cdot \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \right.$$
$$\left. + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma)\right) \times \left(\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma)\right).$$

Так как

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \leqslant \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma)$$

(вытекает из равенства $u'''_{xxx} = u'''_{xxx}(x_k+0) + \int\limits_{x_k+0}^{x} u''''_{xxx\sigma}\, d\sigma$), то последнее неравенство принимает вид

$$\left|\int\limits_0^\xi w'_x\, dw''_{xx}\right| \leqslant h^2 \left(6\cdot \sup_{0<x<\xi} |u''_{xx}(x)| + 2\cdot \sup_{0<x<\xi} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_0^\xi (\sigma)\right) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{N-1} 4\cdot \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \leqslant$$
$$\leqslant h^2\cdot 8\cdot \left(3\cdot \sup_{0<x<\xi} |u''_{xx}(x)| + \sup_{0<x<\xi} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_0^\xi (\sigma)\right) \times \sup_{0<x<\xi} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_0^\xi (\sigma) \leqslant h^2\cdot \widehat{C}_1, \tag{10}$$

где $\widehat{C}_1$ зависит только от коэффициентов уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma} = (ru'_x)'_\sigma - uQ'_\sigma + F'_\sigma$.

Для слагаемого $\int\limits_0^1 r{w'_x}^2\, dx$ имеем

$$\int\limits_0^1 r{w'_x}^2\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} {w'_x}^2\, dR,$$

где $R(x) = \int\limits_0^x r(s)\,ds$. Отсюда последовательно находим

$$\left|\int\limits_0^1 r w_x'^2\,dx\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} w_x'^2(x)\cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}^2\cdot h^2\cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R)\cdot h^2\cdot \sum_{k=0}^{N-1}\left(6\cdot \sup_{(x_k,x_{k+1})} \mid u''_{xx}\mid \cdot h + 2h^2 \sup_{(x_k,x_{k+1})}\mid u'''_{xxx\sigma}\mid \cdot \bigvee_{x_{k+0}}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R)h^2\cdot 4\left(3\sup_{[0;1]}|u''_{xx}|\cdot h + h^2\sup_{[0;1]}|u''''_{xxx\sigma}|\cdot\bigvee_0^1(\sigma)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\left(3\sup_{(x_k;x_{k+1})}|u''_{xx}|\cdot h + h^2\sup_{(x_k;x_{k+1})}|u''''_{xxx\sigma}|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\right)\leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R)4h^3\left(3\sup_{[0;1]}|u''_{xx}| + h\sup_{[0;1]}|u''''_{xxx\sigma}|\cdot\bigvee_0^1(\sigma)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{N-1}3\sup_{[0;1]}|u''_{xx}|\cdot h + h^2\cdot\sup_{[0;1]}|u''''_{xxx\sigma}|\sum_{k=0}^{N-1}\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\right)\leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R)4h^3\left(3\sup_{[0;1]}|u''_{xx}| + \sup_{[0;1]}|u''''_{xxx\sigma}|\cdot\bigvee_0^1(\sigma)\right)\leqslant h^3\cdot\widehat{C}_2, \quad (11)$$

так как $h\leqslant 1$ и $\sum\limits_{k=0}^{N-1} h = h\cdot N = 1$; $\widehat{C}_2$ не зависит от h.

Аналогично для слагаемого $\int\limits_0^1 w^2\,dQ$ последовательно находим:

$$\int\limits_0^1 w^2\,dQ = \sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2\,dQ + \sum_{k=1}^{N-1} w^2(x_k)\Delta Q(x_k) + w^2(0)\Delta^+Q(0) + w^2(1)\Delta^-Q(1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2\,dQ \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\left(6\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''_{xx}(x)|\cdot\frac{h^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u'''_{xxx})\cdot 3\cdot\frac{h^3}{6} + \right.$$

$$\left. + \sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\cdot\frac{h^3}{6}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant h^3\left(\sup_{0<x<1}|u''_{xx}| + \bigvee_0^1(u'''_{xxx})\cdot\frac{h}{2} + \sup_{0<x<1}|u''''_{xxx\sigma}|\bigvee_0^1(\sigma)\frac{h}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''_{xx}(x)|\cdot h + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u'''_{xxx})\frac{h^2}{2} + \sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\frac{h^2}{6}\right)\leqslant$$

$$\leqslant h^3 \left(\sup_{0<x<1} |u''_{xx}| + \bigvee_0^1 (u'''_{xxx}) + \sup_{0<x<1} |u''''_{xxx\sigma}| \bigvee_0^1 (\sigma) \right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{6} \right) \leqslant h^3 \cdot \widehat{C}_3, \quad (12)$$

так как $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(h + \dfrac{2h^2}{3} \right) = h \cdot N + 2h^2 \cdot N = 1 + 2h \leqslant 3$ (h мало и изначально может быть взято меньшим единице); константа $\widehat{C}_3$ от h не зависит.

Соединяя теперь неравенства (10), (11) и (12), мы получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

Замечание 1. *Следует отметить, что расположение точки ξ накладывает определенные ограничения на N — количество интервалов, на которые мы разбиваем каждый из отрезков $[0;\xi]$ и $[\xi;1]$: $N > \{1/\xi; 1/(1-\xi)\}$. Но слишком большое N приводит не только к увеличению времени вычисления, но и влияет на его погрешность.*

Замечание 2. *Для увеличения точности можно (а в ряде случаев и нужно) отрезок $[\xi;1]$ разбить на большее число интервалов, т. е. использовать большее количество базисных функций.*

Так разбиение отрезка $[\xi;1]$ на N^2 равных частей дает оценку погрешности

$$\langle u - v, u - v \rangle \leqslant \widetilde{C}_1 \cdot h_1,$$

где $h_1 = \max \left\{ \dfrac{\xi^2}{N^2}; \dfrac{1-\xi}{N^2} \right\}$. Однако, как отмечалось уже выше, это приводит к увеличению размерности системы, которая при этом получается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

8. Тимашова, Е. В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

9. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М. : Мир, 1977. — 351 с.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu. V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Ivannikova T.A., Timashova E.V, Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

9. Strang G., Fix G.J. An Alalysis of the Finite Element Method. [Streng G., Fiks Dzh. Teoriya metoda konechnyx e'lementov]. Moscow: Mir, 1977, 351 p.

Шабров Сергей Александрович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Бугакова Надежда Игоревна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: golovko_ nadezhda46@mail.ru

Bugakova Nadezhda Igorevna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: golovko_ nadezhda46@mail.ru

Голованёва Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, г. Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, , Russian Federation
E-mail: gfainav@mail.ru