УДК 517.9

МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

И. А. Тришина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07.12.2016 г.

Аннотация. Введен в рассмотрение класс медленно меняющихся на бесконечности функций и изучаются их свойства. Понятие медленно меняющейся функции (в разных смыслах) используется в работах И. Н. Пака, М. Караматы, М. Р. Шмидта. В известной монографии Ю. Г. Далецкого и М. Г. Крейна рассматривается близкий класс функций который называется стационарный на бесконечности. Введенный в рассмотрение класс функций является более широким чем стационарные на бесконечности функции. Для исследования этого класса существенно используется теория банаховых пространств и спектральная теория операторов. В работе, изучаются свойства медленно меняющихся на бесконечности функций и получены критерии медленного изменения ограниченных решений разностных уравнений.

Ключевые слова: медленно меняющиеся на бесконечности функции, интегрально убывающие на бесконечности функции, разностные уравнения.

FUNCTIONS SLOWLY VARYING AT INFINITY

I. A. Trishina

Abstract. The following paper represents the results of our study of a class of functions slowly varying at infinity. The is a similar class of functions called stationary at infinity which was an object of study in the well-known monograph by G. Daletskii and G. Krein. The class of functions under our study is wider than class functions stationary at infinity. As a result of our research we discovered some criteria for a slow change of bounded solutions of difference equations.

Keywords: functions slowly varying at infinity, functions integrated decreasing at infinity, difference equations.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $C_b(\mathbb{J}, X)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Пусть $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b$, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

Через $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ обозначим множество функций $x : \mathbb{R} \to X$ со свойством

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\| ds = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_t^{t+\alpha} \|x(s)\| ds = 0,$$

т. е. равномерный предел средних сдвигов функции x по t равен нулю.

Лемма 1. Подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ содержится в $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Утверждение 1. Имеет место равенство

$$C_{0,int}(\mathbb{J},X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J},X) : \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds = 0, N \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ и $N = [\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α и $\{\alpha\}$ — его дробная часть. Поскольку $|\ \|a\| - \|b\|\ | \leqslant \|a-b\|$ для любых векторов a и b из X, получаем, что имеют место оценки:

$$|\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{N})\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\frac{\{\alpha\}}{\alpha N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + \frac{1}{\alpha}\int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N^2}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + \frac{1}{N}\int\limits_N^{N+1} \|x(t+s)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N}(\frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + \|x\|_\infty) \leqslant \frac{1}{N} 2\|x\|_\infty \to \infty, \alpha \to \infty.$$

Пример 1. Построим четную функцию y из $C_{0,int}(\mathbb{R},X)$, не принадлежащую $C_0(\mathbb{R},X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность положительных чисел, обладающих свойствами

1) $t_{n+1} - t_n \geqslant 2, n \geqslant 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \infty$;

и любую ограниченную последовательность (α_n) чисел из $\mathbb{R}$ не сходящуюся к нулю, причем $|\alpha_n| \leqslant 1, n \in \mathbb{N}$.

Функцию y из $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) $y(t_n) = \alpha_n$, $n \geqslant 2$;

2) $y(t_{n-1}) = y(t_{n+1}) = 0$, $n \geqslant 2$;

3) на промежутке $[t_n - 1; t_n + 1]$ функция y линейна и непрерывна;

4) $y = 0$ на $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (t_n - 1; t_n + 1)$.

Докажем, что построенная функция y (рис. 1) (полагается что $y(-t) = y(t), t \geqslant 0$) принадлежит $C_{0,int}(\mathbb{R})$. Ясно, что она не принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R})$. Используя лемму 2, получаем, что для любого $t \geqslant 0$

$$\int\limits_0^N y(s+t)ds \leqslant \int\limits_t^{t+N} y(s)ds \leqslant k_N,$$

где k_N — число точек из последовательности (α_N), содержащихся на промежутке $[t, t+N]$. Из свойства 2) последовательности (t_n) следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{k_n}{N} = 0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int\limits_t^{t+N} y(s)ds = 0$ равномерно по $t\in\mathbb{R}$. Таким образом, $y\in C_{0,int}(\mathbb{R})$.

В частности, приведенным условиям удовлетворяют следующие две последовательности: $t_n = n^2, n\geqslant 2$ и $\alpha_n = 1$. График такой функции представлен на рис. 1.

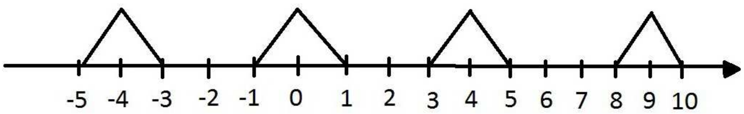

Рис. 1. *Функция y*

Введем в рассмотрение функционал $p:\mathbb{C}_{b,u}\to\mathbb{R}_+$, определенный формулой

$$p(x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds.$$

Замечание 1. Непосредственно из определения подпространства $C_{0,int}$ и определения функционала p следует, что $C_{0,int}$ совпадает с его ядром $Ker p = \{x\in C_{b,u}(\mathbb{J},X) : p(x) = 0\}$.

Лемма 2. Функционал $p:\mathbb{C}_{b,u}\to\mathbb{R}_+$ является полунормой и удовлетворяет оценке $p(x)\leqslant\|x\|, x\in\mathbb{C}_{b,u}$.

Доказательство. Проверим аксиомы полунормы.

1). Очевидна неотрицательность функционала p.

2). Докажем свойство однородности функционала p.

Для любого числа β из $\mathbb{C}$ имеют место равенства

$$p(\beta x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|\beta x(s+t)\|ds =$$

$$= |\beta|\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds = |\beta|p(x), x\in C_{b,u}(\mathbb{R},X).$$

3). Докажем неравенство $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$, для любых $x,y\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$;

$$p(x+y) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|(x(s+t)+y(t+s))\|ds\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}(\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds + \|\int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|ds)\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds + \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\|\int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|ds = p(x)+p(y).$$

4). Из оценок

$$p(x)=\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds\leqslant\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_0^\alpha \|x\|ds\leqslant\|x\|,$$

следует, что $p(x)\leqslant\|x\|, x\in\mathbb{C}_{b,u}$. Лемма доказана.

Лемма 3. Множество функций $C_{0,int}$ обладает следующими свойствами :

1) является замкнутым линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J},X)$;

2) инвариантно относительно сдвигов, т.е. $S(t)x\in C_{0,int}$, для любой функции $x\in C_{0,int}$ и любого $t\in\mathbb{J}$;

3) является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ — модулем (см. [1], [2]), если $\mathbb{J}=\mathbb{R}$.

Доказательство. 1) Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J},X)$. Пусть x,y — любые две функции из $C_{0,int}$ и $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|(\beta x(s+t)+\gamma y(t+s))\|ds\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}(\int\limits_0^\alpha \|\beta x(s+t)\|ds+\int\limits_0^\alpha \|\gamma y(t+s)\|ds)\leqslant$$

$$\leqslant|\beta|\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds+|\gamma|\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|y(t+s)\|ds=0.$$

Докажем замкнутость подпространства $C_{0,int}$.

Пусть последовательность функций (x_n) из $C_{0,int}$ сходится к x_0 из $\mathbb{C}_{b,u}(\mathbb{J},X)$, т.е. $\|x_n-x_0\|_\infty=0$.

Поскольку

$$p(x_0)=p(x_n+x_0-x_n)\leqslant p(x_n)+p(x_0-x_n)=0+\|x_0-x_n\|_\infty\to 0,$$

то $p(x_0)=0$, т. е. $x_0\in C_{0,int}$ согласно замечанию 1.

2) Докажем, что множество функций $C_{0,int}$ инвариантно относительно сдвигов. Для любого $\tau\in\mathbb{J}$ рассмотрим сдвиг $S(\tau)x$ функции $x\in C_{0,int}$ и тогда

$$p(S(\tau)x)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\|\int\limits_0^\alpha x(t+s+\tau)ds\|\leqslant p(x)=0.$$

3) Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$–модулем. Поскольку функция $x\in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$ равномерно непрерывна, то и равномерно непрерывна функция $\tau\mapsto S(-\tau)x:\mathbb{R}\to C_{0,int}(\mathbb{R},X)$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существуют числа $\alpha_1,...,\alpha_2\in\mathbb{C}$ и $\tau_1,...,\tau_2\in\mathbb{R}$ такие, что

$$\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)S(-\tau)xd\tau-\sum_{i=1}^n\alpha_iS(-\tau_i)x\|<\varepsilon$$

.

Тогда имеет место оценка

$$p(f*x)=p(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)S(-\tau)xd\tau-\sum_{i=1}^n\alpha_iS(-\tau_i)x+\sum_{i=1}^n\alpha_iS(-\tau_i)x)\leqslant$$

$$\varepsilon + p(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(-\tau_i)x) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(S(-\tau_i)x) = \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности ε получаем, что $p(f*x) = 0$, т.е. $f*x \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Лемма доказана.

Отметим что в работах [2] и [3] давалось определение медленно меняющейся функции с использованием подпространства $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$.

Символом $\mathcal{C}_0$ будем обозначать одно из двух подпространств $C_0(\mathbb{J}, X)$ и $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Далее используется запись $\mathcal{C}_0 \in \{C_0, C_{0,int}\}$.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности функцией*, относительно подпространства $\mathcal{C}_0$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{J}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0$.

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_{0,int}$ будем обозначать через $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ и через $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$ — относительно подпространства C_0 Из леммы 1 следует, что $C_{sl}(\mathbb{J}, X) \subset C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. Непосредственно из определения следует, что $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантным относительно сдвигов функций.

Лемма 4. Если $y \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$, то для любого числа $t \in \mathbb{R}$ функция $z(s) = \int\limits_{s}^{s+t} y(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R}$, также принадлежит $C_{0,int}$.

Доказательство. Представим функцию z в виде $z = f * y$, где $f = \chi_{[-1,0]}$, тогда

$$z(t) = (\chi_{[-t,0]} * y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(s)y(s-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{t}^{0} y(s-\tau)d\tau = \int\limits_{s}^{s+t} y(u)du.$$

Тогда из свойства 3) леммы 3 следует что функция $z \in C_{0,int}$. Лемма доказана.

Пример 2. Приведем пример медленно меняющейся в силу определения 1 функцию, которая строится по последовательности (см. пример 1) $t_n = n^2$ и

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четное} \\ -1, & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases}$$

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формулой

$$z = \int\limits_{0}^{s} y(\tau)d\tau,$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{R})$ — функция из примера 1, построенная по рассматриваемым последовательностям (α_n) и (t_n) Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int\limits_{0}^{s+t} y(\tau)d\tau - \int\limits_{0}^{s} y(\tau)d\tau = \int\limits_{s}^{s+t} y(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R},$$

и свойства 3) леммы 3 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т.е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

1. СВОЙСТВА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе используются ранее введенные пространства. Рассмотрим пространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, подпространство $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ и факторпространство $\mathcal{X} = C_{b,u}/C_{0,int}$. Напомним, что символом $C_{sl,int}$ обозначаем пространство медленно меняющиеся на бесконечности функции относительно подпространства $C_{0,int}$.

Свойства медленно меняющихся функций относительно подпространства C_0 так же были отмечены в работах [4], [5].

Пример 3. Построим четную функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность (t_n) положительных чисел, обладающих свойствами

1) $t_{n+1} - t_n \geqslant 2, n \geqslant 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \infty$;

и любую последовательность (t'_n) чисел из $\mathbb{R}$ такую, что:

1) $t_n < t'_n$, для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) $t'_n < t_n + 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (t'_n - t_n) = \infty$.

Функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) на промежутке $[t_n; t'_n]$ функция $y = 1$, $n \geqslant 0$;

2) на промежутке $(t'_n; t_n + 1)$ и $(t'_n + 1; t_n + 2)$ функция линейна и непрерывна;

3) на промежутке $[t_n + 1; t'_n + 1]$ функция $y = -1$.

Докажем что построенная функция y (полагается что $y(-t) = y(t), t \geqslant 0$) принадлежит $C_{sl,int}$.

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формулой

$$z = \int\limits_0^s y(\tau) d\tau.$$

Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int\limits_0^{s+t} y(\tau)d\tau - \int\limits_0^{s} y(\tau)d\tau = \int\limits_s^{s+t} y(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R},$$

и свойства 3) леммы 5 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т.е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

Определение 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом функции* $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, если существует функция $x_0 \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$, такая что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$ Множество ε-периодов функции x обозначим через $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$.

Замечание 1. Непосредственно из определения медленно меняющейся на бесконечности функции относительно подпространства $C_{0,int}$ следует, что любое число $\omega \in \mathbb{J}$ является ее ε–периодом.

Лемма 5. $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое линейное подпространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$, инвариантное относительно операторов сдвига $S(t) : C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \to C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для любых $\alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{R}$ и любых функций $x, y \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ справедливо равенство

$$S(\alpha)(\gamma x + \beta y) - (\gamma x + \beta y) = \gamma(S(\alpha)x - x) + \beta(s(\alpha)y - y) \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X).$$

Таким образом, $(\gamma x + \beta y) \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$. Покажем теперь, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$ функция $S(t_0)x$ принадлежит $C_{sl}(\mathbb{R})$. Из представления

$$S(\alpha)S(t_0)x - S(t_0)x = S(t_0)(S(\alpha)x - x), t_0, t \in \mathbb{R},$$

и сильной непрерывности оператора сдвига $S(t_0)x$ следует, что $S(t_0)x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$, а значит, пространство $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ инвариантно относительно оператора сдвига.

Пусть последовательность $(x_n), n \in \mathbb{N}$, из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ сходится к $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha)x_0 - x_0 = \lim_{n\to\infty}(S(\alpha)x_n - x_n) \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X).$$

В силу замкнутости подпространства функций $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $x_0 \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$.

Лемма 6. Пространство медленно меняющихся функций $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+, X)$ несепарабельно.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций

$\{x_\alpha, \alpha \geqslant 0\}$ из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ вида: $x_\alpha(t) = e^{i\alpha \ln(1+t)}, \alpha \geqslant 0, t \geqslant 0$.

Покажем, что $\{x_\alpha, \alpha \geqslant 0\} \subset C_{sl}(\mathbb{R}_+) \subset C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ имеют место равенства:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|x_\alpha - x_\beta\| = \sup_{t\geqslant 0}\|e^{i\alpha ln(1+t)} - e^{i\beta ln(1+t)}\| =$$

$$= \sup_{t\geqslant 0}\|e^{iln(1+t)\frac{\alpha}{\beta}} - 1| = \sqrt{2}, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+.$$

Таким образом, в пространстве $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+, X)$ содержится семейство функций $\{x_\alpha, \alpha \geqslant 0\}$, состоящее из континуума линейно независимых функций, расстояние между которыми не меньше 2. Это значит, что пространство $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$ несепарабельно.

Лемма 7. Пространство $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ -полное банахово пространство.

Доказательство. Возьмем последовательность функций $(x_n) \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, сходящуюся в $C_{b,u}$ к x_0. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S(\alpha)x_n - x_n) = S(\alpha)x_0 - x_0.$$

Так как $S(\alpha)x_n - x_n \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ и $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство, то $S(\alpha)x_0 - x_0 \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Следовательно $x_0 \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$.

Лемма 8. Пространство $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ — модулем, структура которого определяется формулой свертки:

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)ds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X).$$

Доказательство. Покажем корректность определения свертки, т.е. докажем включение $f * x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$, для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$. Из представления $(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)ds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in C_{sl}(\mathbb{R})$, непрерывности отображения $\tau \mapsto S(-\tau)x : \mathbb{R} \to C_{b,u}(\mathbb{R})$ и определения интеграла следует, что функция $f * x$ является пределом в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции x. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любой функции $x_0 \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ функция y_0, определяемая равенствами $y_0 = S(\alpha)f * x_0 - f * x_0 = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)(S(\alpha)x_0 - x_0)d\tau = (f * (S(\alpha)x_0 - x_0))(t)$, есть предел в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции $S(\alpha)x_0 - x_0$, принадлежащей $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. В силу замкнутости подпространства $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$, функция y_0 принадлежит $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Далее через $(e_\alpha, \alpha \in \Omega)$, где Ω — некоторое направленное множество, обозначим ограниченную аппроксимативную единицу (о.а.е.) в алгебре $L^1(\mathbb{R})$, для которой $\widehat{e}_\alpha(0) = 1$, $\alpha \in \Omega$. Отметим следующий результат.

Лемма 9. Для того что бы функция $x \in \mathcal{X}$ принадлежала пространству $C_{sl,int}$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x \in C_{0,int}$, для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ вида $f = S(t)\tau - \tau$, где $\tau \in L^1(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$. Эта функция обладает свойством $\widehat{f}(0) = 0$. По тауберовой теореме Винера множество таких функций плотно в максимальном идеале $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(0) = 0\}$. Следовательно достаточно доказать утверждение леммы для функции f рассматриваемого вида. Пусть $x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$. Так как $S(t)x - x \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$, получим

$$f * x = (S(t)\tau - \tau) * x = \tau(S(t)x - x) \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X).$$

Достаточность. Пусть $t \in \mathbb{R}$ и (e_α) — ограниченная аппроксимационная единица из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Так как

$$e_\alpha * (S(t)x - x) = (S(t)e_\alpha - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$$

и $\widehat{f_\alpha}(0) = 0$, то $e_\alpha * (S(t)x - x) \in C_{0,int}$. Поскольку $C_{0,int} \subset \mathcal{X}$, тогда

$$S(t)x - x = \lim_\alpha e_\alpha * (S(t)x - x) \in C_{0,int}.$$

Используемые результаты из гармонического анализа, функций и векторов, содержаться в работах [1]–[3], [6]–[10].

2. ПРИЛОЖЕНИЕ К РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, где X конечномерное банахово пространство, рассмотрим разностное уравнение

$$x(t+1) = Bx(t) + y(t), t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X), B \in End\mathcal{X}$ со свойством $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{1\}$ — простое собственное значение и $\sigma(B)$ — спектр оператора B.

Пусть P_0 — проектор, построенный по спектру оператора B и $BP_0 = P_0$.

Теорема 1. Каждое ограниченное, равномерно непрерывное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (1) является медленно меняющейся на бесконечности функцией $x \in C_{sl,int}$.

Доказательство. Спектр оператора $B \in End\mathcal{X}$ представим в виде

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out},$$

где $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{1\}$, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$;

$\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности;

$\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| > 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих вне окружности. В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_{in}$, $\mathcal{P}_{out}$, которые соответственно построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_{in}, \sigma_{out}$. Таким образом, $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{in} + \mathcal{P}_{out}$. Эти проекторы индуцируют разложение $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$ пространства X, где $X_0 = Im\mathcal{P}_0, X_{in} = Im\mathcal{P}_{in}, X_{out} = Im\mathcal{P}_{out}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B. Обозначим $B_0 = B|X_0, B_{in} = B|X_{in}, B_{out} = B|X_{out}$. Таким образом, $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$ относительно построенного разложения пространства X. Применяя проектор $\mathcal{P}_{in}$ к обеим частям уравнения (1), получим функцию $x_{in} = \mathcal{P}_{in}x$, удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{in}(t) = B_{in}x_{in}(t) + y_{in}(t), y_{in} = \mathcal{P}_{in}y \in C_{0,int}, t \in \mathbb{J} \qquad (2).$$

Из (2) следует, что

$$(I - B_{in}S(-1))x_{in} = S(-1)y_{in}. \tag{3}$$

Поскольку $\|S(-1)\| = 1$, $B_{in}S(-1)x_{in}(t) = S(-1)B_{in}x_{in}(t)$, $t \in \mathbb{J}$, и спектральный радиус $r(B_{in})$ оператора B_{in} меньше единицы, то оператор $I - B_{in}S(-1)$ обратим и из (3) следует, что $x_{in} = (I - B_{in}S(-1))^{-1}S(-1)y_{in} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{in}^k S(-k-1)y_{in}$. Ясно, что $x_{in} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathcal{P}_{out}$ к уравнению (1):

$$(S(1)x_{out})(t) = B_{out}x_{out}(t) + y_{out}(t), y_{out} = \mathcal{P}_{out}y \in C_{0,int}. \tag{4}$$

Оператор B_{out} обратим и $\sigma(B_{out}^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma_{out}\}$, т.е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора S_N с B_{out} из (4), получим равенства

$$S(1)B_{out}^{-1}x_{out}(t) = x_{out}(t) + B_{out}^{-1}y_{out}(t),\ t \in \mathbb{J},$$

или

$$(I - S(1)B_{out}^{-1})x_{out}(t) = -B_{out}^{-1}y_{out}(t),\ t \in \mathbb{J}.$$

Таким образом,

$$x_{out} = -(I - S(1)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out} =- \sum_{k=0}^{\infty}(B_{out}^{-1}S(1))^k B_{out}^{-1}y_{out},\ y_{out} \in C_{0,int}.$$

Из этой формулы следует, что $x_{out} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Для P_0 справедливо

$$BP_0 = P_0.$$

Применяя проектор P_0 к разностному уравнению (1), получим

$$x_0(t+1) - x_0(t) = y_0(t), t \in \mathbb{J},$$

где $x_0(t) = P_0x(t)$ и $y_0(t) = P_0y(t)$, где $t \in \mathbb{J}$. Таким образом установлено, что функция $S(1)x_0 - x_0$ принадлежит пространству $C_{0,int}$. Поскольку $y_0 \in C_{0,int}$, то $x_0 \in C_{sl,int}$.

В итоге получаем, что функция x представима в виде $x = x_0 + x_{in} + x_{out}$. Следовательно $x \in C_{sl,int}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.

2. Баскаков, А. Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // Математические заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 643–661.

3. Баскаков, А. Г. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов / А. Г. Баскакаов, Н. С. Калужина, Д. М. Поляков // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — № 7. — С. 3–14.

4. Рыжкова, А. А. О периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия : Математика. Физика. — 2014. — Т. 36, № 19 (190). — С. 71–75.

5. Тришина, И. А. Алгебраические свойства почти периодических на бесконечности функций / И. А. Тришина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. — 2016. — № 12. — С. 223–227.

6. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : Изд–во МГУ, 1978. — 204 с.

7. Баскаков, А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Математические заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174–190.

8. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3–54.

9. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Воронежский гос. ун–т, 1987. — 164 с.

10. Рыжкова, А. А. О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 45–49.

REFERENCES

1. Baskakov A.G. Theory of representations of Banach algebras, and Abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Teoriya predstavlenij banahovyh algebr, abelevyh grupp i polugrupp v spektral'nom analize linejnyh operatorov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 9, pp. 3–151.

2. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Beurling's Theorem for Functions with Essential Spectrum from Homogeneous Spaces and Stabilization of Solutions of Parabolic Equations. [Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Teorema Berlinga dlya funkcij s sushchestvennym spektrom iz odnorodnyh prostranstv i stabilizaciya reshenij parabolicheskih uravnenij]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 643–661.

3. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S., Polyakov D.M. Slowly varying at infinity operator semigroups. [Baskakov A.G., Kaluzhina N.S., Polyakov D.M. Medlenno menyayushchiesya na beskonechnosti polugruppy operatorov]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2014, no. 7, pp. 3–14.

4. Ryzhkova A.A., Trishina I.A. About periodic functions at infinity. [Ryzhkova A.A., Trishina I.A. O periodicheskih na beskonechnosti funkciyah]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika — Scientific statements Belgorod State University*, 2014, vol. 36, no. 19 (190), pp. 71–75.

5. Trishina I.A. Algebraic properties of almost periodic functions at infinity. [Trishina I.A. Algebraicheskie svojstva pochti periodicheskih na beskonechnosti funkcij]. *Vestnik fakul'teta prikladnoj matematiki, informatiki i mexaniki — Vestnik of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics*, 2016, no. 12, pp. 223–227.

6. Levitan B.M., Zikov V.V. Almost-periodic functions and differential equations. [Levitan B.M., Zikov V.V. Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya]. Moskow, 1978, 204 p.

7. Baskakov A.G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. [Baskakov A.G. Garmonicheskij i spektral'nyj analiz operatorov s ogranichennymi stepenyami i ogranichennyh polugrupp operatorov na banahovom prostranstve]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 174–190.

8. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. [Baskakov A.G., Krishtal I.A. Garmonicheskij analiz kauzal'nyh operatorov i ih spektral'nye svojstva]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 3–54.

9. Baskakov A.G. Harmonic Analysis of Linear Operators. [Baskakov A.G. Garmonicheskij analiz linejnyh operatorov]. Voronezh, Voronezh State University, 1987, 164 p.

10. Ryzhkova A.A., Trishina I.A. Almost periodic at infinity solutions of difference equations. [Ryzhkova A.A., Trishina I.A. O pochti periodicheskih na beskonechnosti resheniyah raznostnyh uravnenij]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 45–49.

Тришина Ирина Алевтиновна, аспирант факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: i.a.trishina@mail.ru

Trishina Irina Alevtinovna, graduate student, Departament of applied mathematics informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: i.a.trishina@mail.ru