УДК 517.955.8

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ НА СТЫКЕ ДВУХ МАТЕРИАЛОВ

А. С. Рябенко, А. С. Черникова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.09.2016 г.

Аннотация. Рассматривается задача для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными, описывающая стационарное распределение тепла в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных различными неоднородными материалами. Коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют экспоненциальный вид и могут быть различными в каждой из полуплоскостей. В качестве дополнительных условий для системы дифференциальных уравнений заданы скачки температуры и теплового потока через линию раздела материалов. Вид дополнительных условий моделирует наличие трещины на линии раздела материалов. Обнуление дополнительных условий вне некоторого отрезка моделирует наличие конечной трещины на этом отрезке. В работе дается определение классического решения рассмотренной задачи и доказывается единственность решения.

Ключевые слова: задача трансмиссии, краевые условия, обобщенная задача, уравнение стационарной теплопроводности, трещина.

ABOUT THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM WHICH IMPLIES THE HEAT DISTRIBUTION IN A PLANE WITH A CRACK AT AN INTERFACE BETWEEN TWO MATERIALS

A. S. Ryabenko, A. S. Chernikova

Abstract. The problem for the system of linear partial differential equations is examined which describes the stationary heat distribution in the plane consisting of two half-planes filled with different non-homogeneous materials. The coefficients of the internal thermal conductivity of materials have an exponential form and can be different in each of the half-planes. The jumps of the temperature and the heat flux through the line of division of the materials are given as additional conditions for the system of partial differential equations. Type of additional conditions models a crack between the materials. Zeroing additional conditions outside the some segment models a finite crack on this segment. A definition of the classical solution of this problem is given in this paper. Uniqueness of the solution is proved.

Keywords: transmission problem, boundary conditions, general problem, steady heat conduction equation, crack.

1. ВВЕДЕНИЕ

На протяжении последних лет ведется активное исследование тепловых процессов в материалах с трещинами. Так, например, в работе [1] рассматривалась задача в биматериале с системой частично теплопроницаемых трещин и тепловым источником; в работе [2] изучалось распределение тепла в материале с ориентированной трещиной; в работах [3]-[9] изучалось распределение тепла в функционально-градиентных материалах, заполняющих всю плоскость, с одной конечной трещиной; работы [10]-[14] были посвящены изучению стационарного распределения тепла в функционально-градиентном биматериале, заполняющем всю плоскость с конечной или полуограниченной трещиной.

В статье рассматривается задача, описывающая стационарное распределение тепла в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных различными неоднородными материалами. В качестве дополнительных условий заданы скачки температуры и теплового потока через линию раздела материалов. Вид дополнительных условий моделирует конечную трещину на линии раздела материалов.

Описанная задача ранее изучалась в работе [10], в которой было дано определение классического решения задачи и построены явные формулы представления решения задачи, однако вопрос единственности решения не был рассмотрен. Данная работа посвящена изучению единственности решения задачи из работы [10].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается пространство $\mathbb{R}^2$ и его подобласти $\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1,x_2)|\ x_1 \in \mathbb{R};\ x_2 > 0\}$ и $\mathbb{R}^2_- = \{x = (x_1,x_2)|\ x_1 \in \mathbb{R};\ x_2 < 0\}$. Предполагается, что полуплоскости R^2_+ и $\mathbb{R}^2_-$ заполнены различными неоднородными материалами с коэффициентами внутренней теплопроводности $k_1(x) = c_1 e^{k_1 x_2}$ и $k_2(x) = c_2 e^{k_2 x_2}$ соответственно, где c_1, c_2 — произвольные, отличные от нуля константы, а k_1, k_2 — произвольные положительные константы.

Уравнения $div\,(k_{1,5\mp 0,5}(x)\,grad\,u_{1,5\mp 0,5}(x)) = 0$ описывают стационарное распределение тепла в полуплоскостях $\mathbb{R}^2_\pm$. С учетом вида коэффициентов внутренней теплопроводности в $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ уравнения стационарного распределения тепла примут вид

$$\Delta u_p(x) + k_p \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_{sgn\,(3-2p)},\ p = 1;2, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа.

В качестве дополнительных условий задаются скачки температуры и теплового потока через линию раздела материалов:

$$u_1(x_1,\ +0) - u_2(x_1,\ -0) = q_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,\ +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1,\ -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Предполагается, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C\,(\mathbb{R})$.

Дополнительные условия (2) и (3) моделируют наличие трещины на стыке полуплоскостей $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$.

Приведем определение решения задачи (1)–(3), сформулированное в [10].

Определение 1. Решением задачи (1)–(3) назовем пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных соответственно на $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ и $\overline{\mathbb{R}^2_-}$, таких что $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $u_2(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_-) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_-})$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (1), условиям (2) и (3), и таких что функции $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$, $e^{0,5k_1x_2}\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_1x_2}\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$, функции $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$, $e^{0,5k_2x_2}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_2x_2}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_-$, функции $e^{0,5k_1x_2}\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_1x_2}\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \geqslant \delta > 0$, функции $e^{0,5k_2x_2}\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_2x_2}\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \leqslant -\delta < 0$, функция $e^{0{,}5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, функция $e^{0{,}5k_2x_2}u_2(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_-)$, а функции $u_1(x_1,+0)$, $u_2(x_1,-0)$, $\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Аналогично тому, как было сделано в работе [10], с помощью замен

$$u_p(x_1,x_2)=e^{-0{,}5k_px_2}v_p(x_1,x_2),\quad p=1;2,\quad v_2(x_1,x_2)=z(x_1,-x_2) \tag{4}$$

задача (1)–(3) сводится к задаче относительно функций $v_1(x)$ и $z(x)$:

$$\Delta v_1(x)-0{,}25k_1^2v_1(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^2_+, \tag{5}$$

$$\Delta z(x)-0{,}25k_2^2z(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^2_+, \tag{6}$$

$$v_1(x_1,+0)-z(x_1,+0)=q_0(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

$$-\frac{k_1}{2}v_1(x_1,+0)+\frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}z(x_1,+0)+\frac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

В работе [10] дано определение решения последней задачи, приведем его.

Определение 2. Решением задачи (5)–(8) назовем пару функций $v_1(x)$ и $z(x)$, заданных на $\overline{\mathbb{R}^2_+}$, таких что $v_1(x),z(x)\in C^2(\mathbb{R}^2_+)\cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (5), (6), а также условиям (7), (8), и таких что функции $v_1(x)$, $z(x)$, $\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial z(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$, функции $\frac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2\geqslant\delta>0$, функции $v_1(x)$, $z(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, а функции $v_1(x_1,+0)$, $z(x_1,+0)$, $\frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2}$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (5)–(8)

Будем доказывать единственность решения задачи (5)–(8). Отметим, что из единственности решения задачи (5)–(8) и равенств (4) будет следовать единственность решения задачи (1)–(3).

Предположим, что решение задачи (5)–(8) не единственно, то есть имеются две вектор-функции $\big(v_1^1(x),z^1(x)\big)$ и $\big(v_1^2(x),z^2(x)\big)$, удовлетворяющие равенствам (5)–(8) и дополнительным условиям, сформулированным в определении задачи (5)–(8), то есть при $p=1;2$

$$\Delta v_1^p(x)-0{,}25k_1^2v_1^p(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^2_+, \tag{9}$$

$$\Delta z^p(x)-0{,}25k_2^2z^p(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^2_+, \tag{10}$$

$$v_1^p(x_1,+0)-z^p(x_1,+0)=q_0(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

$$-\frac{k_1}{2}v_1^p(x_1,+0)+\frac{\partial v_1^p(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}z^p(x_1,+0)+\frac{\partial z^p(x_1,+0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Вычтем из равенств (9)–(12) при $p=1$ соответствующие равенства (9)–(12) при $p=2$ и введем обозначения

$$\omega_1(x)=v_1^1(x)-v_1^2(x),\quad \omega_2(x)=z^1(x)-z^2(x), \tag{13}$$

тогда относительно функций $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ получим следующую задачу:

$$\Delta\omega_p(x)-0{,}25k_p^2\omega_p(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^2_+,\ p=1;2, \tag{14}$$

$$\omega_1(x_1,+0)-\omega_2(x_1,+0)=0,\ x_1\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

$$-\frac{k_1}{2}\omega_1(x_1,\,+0)+\frac{\partial\omega_1(x_1,\,+0)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}\omega_2(x_1,\,+0)+\frac{\partial\omega_2(x_1,\,+0)}{\partial x_2}=0,\ x_1\in\mathrm{R}. \tag{16}$$

Продолжим функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ четным образом на R^2_-:

$$W_1(x)=\begin{cases}\omega_1(x_1,x_2), & x_2>0,\\ \omega_1(x_1,-x_2), & x_2<0;\end{cases}\qquad W_2(x)=\begin{cases}\omega_2(x_1,x_2), & x_2>0,\\ \omega_2(x_1,-x_2), & x_2<0,\end{cases} \tag{17}$$

и введем обозначения

$$[W_p(x)]_{x_2=0}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(W_p(x_1,\varepsilon)-W_p(x_1,\,-\varepsilon)\right),$$

$$\left[\frac{\partial W_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\partial W_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\frac{\partial W_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right),$$

где $p=1;2$.

В силу представлений (17) имеем:

$$[W_p(x)]_{x_2=0}=0,\quad p=1;2;\quad \left[\frac{\partial W_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}=2\frac{\partial W_p(x_1,\,+0)}{\partial x_2},\quad p=1;2. \tag{18}$$

Замечание 1. Так как вектор-функции $\left(v_1^1(x),z^1(x)\right)$ и $\left(v_1^2(x),z^2(x)\right)$ являются решениями задачи (5)–(8), то из (13) и (17) следует, что при $p=1;2$:

1) функции $W_p(x)\in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbb{R}\times 0\})\cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$;

2) функции $W_p(x)$, $\frac{\partial W_p(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial W_p(x)}{\partial x_2}$ ограничены в $\mathbb{R}^2$;

3) функции $\frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $|x_2|\geqslant\delta>0$;

4) функции $W_p(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$;

5) функции $W_p(x_1,+0)$, $\frac{\partial W_p(x_1,+0)}{\partial x_2}$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Из замечания 1 следует, что функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ являются функциями медленного роста (см. [15]). Таким образом, их можно рассматривать как регулярные обобщенные функции в $S'(\mathbb{R}^2)$ (см. [15]).

Лемма 1. При $p=1;2$ функции, заданные равенствами (17), являются решениями следующих уравнений в $S'(\mathbb{R}^2)$:

$$\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x)=2\frac{\partial W_p(x_1,\,+0)}{\partial x_2}\cdot\delta(x_2), \tag{19}$$

где $\delta(x_2)$ — дельта-функция Дирака.

Доказательство. Легко заметить, что для произвольной функции $\psi(x)\in S(\mathbb{R}^2)$ существует такая положительная постоянная c, что при $x\in\mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$|\psi(x)|\leqslant c\,(1+|x_1|)^{-2}\,(1+|x_2|)^{-2}. \tag{20}$$

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная основная функция из $S(\mathbb{R}^2)$. Выясним, как действует функционал $\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x)$ на функцию $\varphi(x)$. Воспользовавшись определением обобщенной производной, получаем, что

$$\begin{gathered}\left(\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x),\varphi(x)\right)=\\=\left(W_p(x),\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1^2}\right)+\left(W_p(x),\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_2^2}\right)-0{,}25k_p^2\left(W_p(x),\varphi(x)\right).\end{gathered} \tag{21}$$

Очевидно, что при $j=1;2$ справедливы представления

$$\begin{aligned}\left(W_p(x),\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(&\int_{\mathbb{R}\times[-\varepsilon;\varepsilon]}W_p(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2}dx+\int_{\mathbb{R}^2_+\setminus\{\mathbb{R}\times[0;\varepsilon]\}}W_p(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2}dx+\\&+\int_{\mathbb{R}^2_-\setminus\{\mathbb{R}\times[-\varepsilon;0]\}}W_p(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2}dx\Bigg).\end{aligned} \tag{22}$$

Из замечания 1 и (20) следует, что при $j = 1; 2$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\mathbb{R} \times [-\varepsilon; \varepsilon]} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j^2} dx = 0. \tag{23}$$

С учетом замечания 1 и (20) несложно проверить, что справедлива оценка $\int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |W_p(x)| \left| \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} \right| dx_1 \right) dx_2 \leqslant c$, где c — некоторая положительная константа.

Согласно теореме Фубини (см. [15]) интеграл $\int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [0; \varepsilon]\}} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} dx$ можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [0; \varepsilon]\}} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} dx = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} dx_1 \right) dx_2. \tag{24}$$

Преобразуем отдельно интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} dx_1$, где $x_2 \geqslant \varepsilon$. Применив дважды интегрирование по частям и воспользовавшись замечанием 1 и (20), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_1^2} \varphi(x) dx_1.$$

Воспользовавшись последним равенством, замечанием 1 и теоремой Фубини, приходим к тому, что равенство (24) можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [0; \varepsilon]\}} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} dx = \int\limits_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathrm{R} \times [0; \varepsilon]\}} \frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_1^2} \varphi(x) dx. \tag{25}$$

Аналогично равенству (25) можно доказать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_-^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [-\varepsilon; 0]\}} W_p(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} dx = \int\limits_{\mathbb{R}_-^2 \setminus \{\mathrm{R} \times [-\varepsilon; 0]\}} \frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_1^2} \varphi(x) dx. \tag{26}$$

С учетом равенств (22), (23), (25) и (26), получаем следующее представление:

$$\left(W_p(x), \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} \right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [0; \varepsilon]\}} \frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_1^2} \varphi(x) dx + \int\limits_{\mathbb{R}_-^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [-\varepsilon; 0]\}} \frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_1^2} \varphi(x) dx \right). \tag{27}$$

Рассуждая так же, как при получении представления (27), можно показать, что

$$\left(W_p(x), \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_2^2} \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [0; \varepsilon]\}} \frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_2^2} \varphi(x) dx + \int\limits_{\mathbb{R}_-^2 \setminus \{\mathbb{R} \times [-\varepsilon; 0]\}} \frac{\partial^2 W_p(x)}{\partial x_2^2} \varphi(x) dx - \right.$$
$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(W_p(x_1, \varepsilon) \frac{\partial \varphi(x_1, \varepsilon)}{\partial x_2} - W_p(x_1, -\varepsilon) \frac{\partial \varphi(x_1, -\varepsilon)}{\partial x_2} \right) dx_1 +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial W_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,\varepsilon)-\frac{\partial W_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,-\varepsilon)\right)dx_1\Bigg). \quad (28)$$

С учетом представлений (27) и (28), равенство (21) примет вид

$$\big(\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x),\varphi(x)\big)=\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2_+\setminus\{\mathbb{R}\times[0;\varepsilon]\}}(\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x))\varphi(x)dx+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^2_-\setminus\{\mathbb{R}\times[-\varepsilon;0]\}}(\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x))\varphi(x)dx-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(W_p(x_1,\varepsilon)\frac{\partial\varphi(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-W_p(x_1,-\varepsilon)\frac{\partial\varphi(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right)dx_1+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial W_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,\varepsilon)-\frac{\partial W_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,-\varepsilon)\right)dx_1\Bigg). \quad (29)$$

Согласно (14) и (17), функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ в $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x)=0,\ p=1;2.$$

С учетом последних равенств, равенство (29) примет вид

$$\big(\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x),\varphi(x)\big)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(W_p(x_1,\varepsilon)\frac{\partial\varphi(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-W_p(x_1,-\varepsilon)\frac{\partial\varphi(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right)dx_1+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial W_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,\varepsilon)-\frac{\partial W_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,-\varepsilon)\right)dx_1\Bigg). \quad (30)$$

Из замечания 1 и (20) следует, что подынтегральные функции в правой части равенства (30) имеют интегрируемую мажоранту, не зависящую от ε, тогда из очевидных равенств

$$W_p(x_1,\varepsilon)\tfrac{\partial\varphi(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-W_p(x_1,-\varepsilon)\tfrac{\partial\varphi(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}=(W_p(x_1,\varepsilon)-W_p(x_1,-\varepsilon))\tfrac{\partial\varphi(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}+$$
$$+W_p(x_1,-\varepsilon)\left(\tfrac{\partial\varphi(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\tfrac{\partial\varphi(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right),$$

$$\tfrac{\partial W_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,\varepsilon)-\tfrac{\partial W_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\varphi(x_1,-\varepsilon)=\left(\tfrac{\partial W_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\tfrac{\partial W_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right)\varphi(x_1,\varepsilon)+$$
$$+\tfrac{\partial W_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\left(\varphi(x_1,\varepsilon)-\varphi(x_1,-\varepsilon)\right),$$

(18) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что (30) примет вид

$$\big(\Delta W_p(x)-0{,}25k_p^2W_p(x),\varphi(x)\big)=\left(2\frac{\partial W_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\delta(x_2),\varphi(x)\right).$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Пусть $f(x_1) \in L_1(\mathbb{R})$, а $\widetilde{f}(x) \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Будем использовать следующие обозначения: $F_{x_1 \to s_1}[f(x_1)]$ — преобразование Фурье функции $f(x_1)$ по переменной x_1; $F_{x_1,x_2 \to s_1,s_2}[\widetilde{f}(x)]$ — преобразование Фурье функции $\widetilde{f}(x)$ по переменным x_1, x_2, то есть

$$F_{x_1 \to s_1}[f(x_1)] = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix_1 s_1} f(x_1) dx_1, \quad F_{x_1,x_2 \to s_1,s_2}[\widetilde{f}(x)] = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1 s_1 + x_2 s_2)} \widetilde{f}(x) dx_1 dx_2.$$

В дальнейшем, если не оговорено противного, под преобразованием Фурье будем понимать преобразование Фурье в смысле замечания 2.

Из замечания 1 получаем, что от функций $W_p(x)$, $W_p(x_1,\, +0)$, $\frac{\partial W_p(x_1,+0)}{\partial x_2}$, где $p = 1;\, 2$, существует преобразование Фурье.

Применив к (19) обобщенное преобразование Фурье по переменным x_1, x_2 и воспользовавшись свойствами обобщенного преобразования Фурье (см. [15]), получим следующие уравнения, эквивалентные уравнениям (19) в $S'(\mathrm{R}^2)$:

$$-\left(s_1^2 + s_2^2 + 0{,}25k_p^2\right) F_{x_1,x_2 \to s_1,s_2}\left[W_p(x)\right] = 2F_{x_1 \to s_1}\left[\frac{\partial W_p(x_1,\, +0)}{\partial x_2}\right], \quad p = 1; 2. \qquad (31)$$

В [15] доказано, что если функция $W(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathrm{R}^n)$, то преобразование Фурье от регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $W(x)$, также будет регулярной обобщенной функцией, которая порождается преобразованием Фурье функции $W(x)$, вычисленной в смысле замечания 2. Таким образом, равенство (31) можно рассматривать как равенство для регулярных функций.

Введем обозначения

$$w_p^0(s_1) = F_{x_1 \to s_1}\left[W_p(x_1,\, +0)\right], \quad w_p^1(s_1) = F_{x_1 \to s_1}\left[\frac{\partial W_p(x_1,\, +0)}{\partial x_2}\right]. \qquad (32)$$

Действуя так же, как в лемме 1 работы [10], из равенств (31) можно получить соотношения

$$w_p^1(s_1) = -\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_p^2} \cdot w_p^0(s_1), \quad p = 1; 2. \qquad (33)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. У задачи (5)–(8) может существовать не более одного решения.

Доказательство. Применим преобразование Фурье по переменной x_1 к равенствам (15), (16), тогда из замечания 1, (17) и (32) получим

$$w_1^0(s_1) - w_2^0(s_1) = 0,$$
$$-0{,}5k_1 w_1^0(s_1) + w_1^1(s_1) + 0{,}5k_2 w_2^0(s_1) + w_2^1(s_1) = 0.$$

С учетом равенств (33) функции $w_1^0(s_1)$ и $w_2^0(s_1)$ будут решениями системы

$$w_1^0(s_1) - w_2^0(s_1) = 0,$$
$$-0{,}5k_1 w_1^0(s_1) - \sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_1^2} \cdot w_1^0(s_1) + 0{,}5k_2 w_2^0(s_1) - \sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_2^2} \cdot w_2^0(s_1) = 0.$$

Решениями последней системы являются функции $w_1^0(s_1) = w_2^0(s_1) \equiv 0$. Из (31), (32) и (33) получаем, что $F_{x_1,\, x_2 \to s_1,\, s_2}\left[W_p(x)\right] = 0$, где $p = 1; 2$.

Следовательно, при $p = 1; 2$ в $\mathbb{R}^2$

$$W_p(x) \equiv 0. \qquad (34)$$

Напомним, что ранее через $v_1^1(x)$, $v_1^2(x)$, $z^1(x)$, $z^2(x)$ были обозначены компоненты вектор-функций $\left(v_1^1(x),z^1(x)\right)$ и $\left(v_1^2(x),z^2(x)\right)$, являющихся решениями задачи (5)–(8). Из обозначений (13), (17) и (34) следует, что при $x \in \mathbb{R}_+^2$

$$v_1^1(x) \equiv v_1^2(x),\ z^1(x) \equiv z^2(x).$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ордян, М. Г. Задача теплопроводности для биматериала с системой частично теплопроницаемых трещин и тепловым источником / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестн. Самар. гос. ун-та (Естественнонауч. сер.). — 2009. — № 4 (70). — С. 154–170.

2. Chiu, Tz-Cheng. Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack / Tz-Cheng Chiu, Shang-Wu Tsai, Ching-Hwei Chue // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2013. — V. 67. — P. 514–522.

3. Глушко, А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 47–50.

4. Логинова, Е. А. Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 157–161.

5. Рябенко, А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с трещиной / А. С. Рябенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 187–194.

6. Glushko, A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19^{th} European Conference on Fracture "Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety": Book of Abstracts, 26–31 August. — Kazan, 2012. — P. 269.

7. Логинова, Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. — 2012. — Вып. 1. — С. 40–47.

8. Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности / А. В. Глушко, Е. А. Логинова, В. Е. Петрова, А. С. Рябенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 695–703.

9. Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko, V. E. Petrova, E. A. Loginova // Asymptotic Analysis. — 2016. — V. 98, № 4. — P. 285–307.

10. Глушко, А. В. О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 111–134.

11. Черникова, А. С. Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины / А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 188–206.

12. Черникова, А. С. Свойства решения задачи о распределении тепла в биматериале с межфазной трещиной / А. С. Черникова // Науч.-практич. журнал "Аспирант". — 2015. — № 3. — С. 5–9.

13. Черникова, А. С. Задача о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной / А. С. Черникова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. — 2014. — Вып. 3. — С. 66–81.

14. Черникова, А. С. Распределение тепла в плоском биматериале с трещиной / А. С. Черникова // Науч.-практич. журнал "Аспирант". — 2015. — № 3. — С. 10–18.

15. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 527 с.

REFERENCES

1. Ordyan M.G., Petrova V.E. The task of thermal conductivity for a bimaterial with a system of partially heat permeable cracks and a heat source. [Ordyan M.G., Petrova V.E. Zadacha teploprovodnosti dlya bimateriala s sistemoy chastichno teplopronitsaemykh treshchin i teplovym istochnikom]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta (Estestvennonauchnaya seriya) — Proceedings of Samara State University (Nature scientific series)*, 2009, no. 4 (70), pp. 154–170.

2. Chiu Tz-Cheng, Tsai Shang-Wu, Chue Ching-Hwei. Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, vol. 67, pp. 514–522.

3. Glushko A.V., Loginova E.A. Asymptotic properties of problem solution on the stationary distribution of heat in an inhomogeneous plane with a crack. [Glushko A.V., Loginova E.A. Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 47–50.

4. Loginova E.A. Asymptotic properties of problem solution on the stationary distribution of heat in an inhomogeneous plane with a crack. [Loginova E.A. Asimptoticheskoe povedenie teplovogo potoka dlya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 157–161.

5. Ryabenko A.S. Asymptotic properties of problem solution on the stationary distribution of heat in a homogeneous plane with a crack. [Ryabenko A.S. Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v odnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 187–194.

6. Glushko A.V., Ryabenko A.S. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips. 19^{th} European Conference on Fracture “Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety” : Book of Abstracts, 26–31 August, Kazan, 2012, p. 269.

7. Loginova E.A. Heat distribution in an inhomogeneous material with a crack. [Loginova E.A. Postroenie resheniya zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshchinoy]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, astronomiya — Proceedings of St. Petersburg State University. Series 1. Mathematics, mechanics, astronomy*, 2012, iss. 1, pp. 40–47.

8. Glushko A.V., Loginova E.A., Petrova V.E., Ryabenko A.S. The study of the stationary heat distribution in the plane of with a crack when coefficient of internal heat conductivity is changed. [Glushko A.V., Loginova E.A., Petrova V.E., Ryabenko A.S. Izuchenie statsionarnogo raspredeleniya tepla v ploskosti s treshchinoy pri peremennom koeffitsiente vnutrenney teploprovodnosti]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i-matematicheskoy fiziki — Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 4, pp. 695–703.

9. Glushko A.V., Ryabenko A.S., Petrova V.E., Loginova E.A. Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity. Asymptotic Analysis, 2016, vol. 98, no. 4, pp. 285–307.

10. Glushko A.V., Ryabenko A.S., Chernikova A.S. About the stationary heat distribution in the two adjacent half-planes with a crack on the boundary. [Glushko A.V., Ryabenko A.S., Chernikova A.S. O statsionarnom raspredelenii tepla v dvukh svyaznykh poluploskostyakh s treshchinoy na granits]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 1,

pp. 111–134.

11. Chernikova A.S. Asymptotic representations of the solution and its first derivatives of the problem of the stationary heat distribution in a bimaterial near an interphase crack. [Chernikova A.S. Asimptoticheskie predstavleniya resheniya i ego pervykh proizvodnykh zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v bimateriale vblizi mezhfaznoy treshchiny]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 188–206.

12. Chernikova A.S. Properties of the solution of the problem of the heat distribution in a bimaterial with an interphase crack. [Chernikova A.S. Svoystva resheniya zadachi o raspredelenii tepla v bimateriale s mezhfaznoy treshchinoy]. *Nauchno-prakticheskiy zhurnal "Aspirant" — Scientific and practical journal "Postgraduate Student"*, 2015, no. 3, pp. 5–9.

13. Chernikova A.S. The problem of the heat distribution in a plane which consists of two different non-homogeneous materials with a semi-bounded interphase crack. [Chernikova A.S. Zadacha o raspredelenii tepla v ploskosti, sostoyashchey iz dvukh razlichnykh neodnorodnykh materialov, s poluogranichennoy mezhfaznoy treshchinoy]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika, informatika, protsessy upravleniya — Proceedings of St. Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics, computer science, control processes*, 2014, iss. 3, pp. 66–81.

14. Chernikova A.S. The heat distribution in a flat bimaterial with a crack. [Chernikova A.S. Raspredelenie tepla v ploskom bimateriale s treshchinoy]. *Nauchno-prakticheskiy zhurnal "Aspirant" — Scientific and practical journal "Postgraduate Student"*, 2015, no. 3, pp. 10–18.

15. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1976, 527 p.

Рябенко А. С., кандидат физико-математических наук; доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: alexr-83@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Ryabenko A. S., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of partial differential equations and probability theory department, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: alexr-83@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–86–18

Черникова А. С., кандидат физико-математических наук; преподаватель кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: chernikova-an@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Chernikova A. S., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, lecturer of partial differential equations and probability theory department, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: chernikova-an@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–18