УДК 004.7:519.872:519.23

АНАЛИЗ СМО С РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ И СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Д. С. Крылова, Н. И. Головко, Т. А. Жук

Дальневосточный Федеральный Университет

Поступила в редакцию 30.12.2015 г.

Аннотация. В данной работе проводится анализ системы массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем; основным и резервным прибором с экспоненциальным обслуживанием на каждом; скачкообразной интенсивность входного дважды стохастического пуассоновского потока. Исследуется стационарный и нестационарный режимы в СМО с помощью функционально-аналитического метода или метода производящих функций, который позволяет привести задачу Коши для бесконечной системы интегро-дифференциальных уравнений к задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с оператором сдвига. Найдены нестационарные и стационарные характеристики, приводится доказательство существования, единственности нестационарного, стационарного режимов и стабилизации нестационарного к стационарному при любых начальных условиях.

Ключевые слова: система массового обслуживания, бесконечный накопитель, резервный прибор, скачкообразная интенсивность, нестационарный режим, стационарный режим, стабилизация.

ANALYSIS OF SMO BACKUP DEVICE AND THE ABRUPT INTENSITY OF THE INPUT STREAM

D. S. Krylova, N. I. Golovko, T. A. Zhuk

Abstract. In this work the analysis of a Queuing system (QS) with infinite storage; the primary and reserve device with exponential service at each; spasmodic intensity doubly stochastic Poisson input stream. Examines stationary and non-stationary regimes in the SMO, using a functional-analytical method or method of generating functions, which allows one to reduce the Cauchy problem for an infinite system of integro-differential equations to the Cauchy problem for a differential equation of first order shift operator. Found non-stationary and stationary characteristics, is proof of the existence, uniqueness of non-stationary, stationary regimes and the stabilization of non-stationary to stationary for any initial conditions.

Keywords: queuing systems, infinite storage, reserve device, spasmodic intensity of input stream, stationary and non-stationary regime, stabilization.

ВВЕДЕНИЕ

Широкое практическое применение моделей систем массового обслуживания (СМО) осуществляется в социальных системах, например, таких как информационные сети [5], в медицинском обслуживании, в страховом деле, применяются они при эксплуатации различных транспортных систем, профилактическом обслуживании технических устройств и так далее [2].

Практическая значимость данной работы заключается в том, что рассмотренная модель СМО применяется в таких социальных системах, как информационные сети [6, 15]. В работе [5] исследованы модели СМО для библиотечных серверов, серверов баз данных, proxy и web серверов в информационных сетях с количеством рабочих станций в сети более 600, классифицированы типы возможных входных потоков, законы распределения обслуживания. С применением статистических методов показано, что функционирование библиотечного сервера описывается моделью СМО, рассмотренной в данной работе, с бесконечным накопителем, входным пуассоновским потоком со скачкообразной интенсивностью, с экспоненциальным законом обслуживания на основном и резервном приборах. При достижении определенного порогового числа заявок библиотечный сервер применяет дополнительную интенсивность обслуживания, т.е. включается резервный прибор.

В настоящее время в литературе большое внимание уделяется моделированию СМО с входными дважды стохастическими пуассоновскими потоками [9, 11]. Пуассоновский поток (ПП) называется дважды стохастическим (ДС), если его интенсивность является случайным процессом [11].

В литературе хорошо изучены СМО с входными потоками, интенсивность которых представляет собой марковскую цепь или полумарковский процесс с дискретным пространством состояний, например, в работах [6, 8, 16]. В работе [4] изучались скачкообразные процессы и ДС СМО со скачкообразной интенсивностью входного потока.

Следует отметить, что результаты, полученные в данной работе, а также авторами других работ, согласуются с предсказанием эволюции исследования стохастических систем [12], при которой пространство состояний параметров систем расширяется от дискретного до непрерывного, вслед за изучением матричных инфинитезимальных операторов следует изучение интегро-дифференциальных операторов.

Целью данной работы является анализ стабилизации, существования и единственности нестационарного и стационарного режимов в рассматриваемой СМО. В работе предлагается функционально-аналитический метод, впервые примененный в работах [4, 9, 10]. Суть метода заключается в построении 1-й и 2-й модели СМО, преобразовании соответствующих уравнений для производящих функций и дальнейшего анализа этих уравнений, сведении задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений (ДУ) к задаче Коши для ДУ 1-го порядка. Указанный метод позволяет проанализировать в нестационарном режиме характеристики числа заявок в СМО. Приводится доказательство существования, единственности нестационарного и стационарного режимов, стабилизации нестационарного режима. Доказано, что стабилизация нестационарного режима к стационарному осуществляется независимо от начальных условий СМО.

ОПИСАНИЕ СМО

Рассмотрим СМО с бесконечным накопителем, скачкообразной интенсивностью входного потока $\lambda(t)$ [3], с основным и резервным прибором, с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ на основном приборе и Δ на резервном. Резервный прибор включается, если число заявок превысит или будет равняться ν. Интенсивность $\lambda(t)$ меняется на промежутке $[a, b]$, интервалы постоянства Т имеют экспоненциальное распределение с параметром α. Значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва справа не зависят от значений процесса в точках разрыва слева и имеют плотность распределения $\varphi(x)$, $x \in [a, b]$.

Введем обозначения: $Q_k(t, x) = P\{\xi(t) = k,\, x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$, где $\xi(t)$ — число заявок в СМО в момент t; $q_k(x) = P\{\xi = k,\, x < \lambda < x + dx\}/dx$, где ξ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $Q_k(t, x), q_k(x)$ – характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(t, x) = P\{x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$ — нестационарная плотность $\lambda(t)$; $f(x) = P\{x < \lambda < x + dx\}/dx$ — стационарная плотность λ, где λ – интенсивность входного потока в стационарном режиме,

$x \in [a, b]$.

Обозначим: $\bar{\lambda} = \int\limits_a^b x\varphi(x)\, dx$ — среднее значение интенсивности входного потока в точках разрыва. В работе [4] получено

$$f(t, x) = \varphi(x) + [f(0, x) - \varphi(x)]\; e^{-\alpha t},$$

откуда следует

$$f(x) = \varphi(x).$$

Следовательно, $\bar{\lambda}$ — среднее значение интенсивности входного потока $\lambda(t)$ в стационарном режиме.

Считаем, что выполняется условие:

$$\bar{\lambda} < \mu + \Delta, \tag{1}$$

которое, как будет показано ниже, является необходимым условием существования стационарного режима в СМО.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

С применением динамики Колмогорова-Чепмена в работе [1] авторами получены уравнения относительно нестационарных характеристик числа заявок в СМО $Q_k(t, x), k \geqslant 0$. Полученные уравнения относительно нестационарных характеристик числа заявок в СМО $Q_k(t, x), k \geqslant 0$,образуют вместе с начальными условиями и условием нормировки задачу Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений, которую будем называть 1-й нестационарной моделью СМО.

1) Функции $Q_k(t, x), k \geqslant 0$, удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_0(t, x) = -(x + \alpha) Q_0(t, x) + \mu Q_1(t, x) + \alpha\varphi(x) \int\limits_a^b Q_0(t, y) dy, \quad k = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_k(t, x) = x Q_{k-1}(t, x) - (x + \mu + \alpha) Q_k(t, x) + \mu Q_{k+1}(t, x) + \\ + \alpha\varphi(x) \int\limits_a^b Q_k(t, y) dy, \quad 1 \leqslant k \leqslant \nu - 1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_\nu(t, x) = x Q_{\nu-1}(t, x) - (x + \mu + \alpha) Q_\nu(t, x) + (\mu + \Delta) Q_{\nu+1}(t, x) + \\ + \alpha\varphi(x) \int\limits_a^b Q_\nu(t, y) dy, \quad k = \nu, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_k(t, x) = x Q_{k-1}(t, x) - (x + \mu + \Delta + \alpha) Q_k(t, x) + (\mu + \Delta) Q_{k+1}(t, x) + \\ + \alpha\varphi(x) \int\limits_a^b Q_k(t, y) dy, \quad k \geqslant \nu + 1, \tag{5}$$

2) заданы начальные условия с начальными плотностями $\widetilde{Q}_k(x)$:

$$Q_k(0,x) = \widetilde{Q}_k(x),\ k \geqslant 0; \qquad (6)$$

3) выполняется условие нормировки:

$$\sum_{k\geqslant 0} Q_k(t,x) = f(t,x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in [a,b]\ , \quad \int\limits_a^b f(t,x)dx = 1. \qquad (7)$$

Уравнения (2)–(5) отличаются от классических уравнений Колмогорова–Чепмена для СМО M/M/2 с постоянной интенсивностью входного потока x, резервным прибором и бесконечным накопителем наличием интегрального оператора

$$-\alpha Q_k(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_k(t,y)dy, \quad k \geqslant 0.$$

Введем производящую функцию $R(t,x,z)$:

$$R(t,x,z) = \sum_{k\geqslant 0} z^k Q_k(t,x), \quad z \in C.$$

Для функции $R(t,x,z)$ выполняется начальное условие

$$R(0,x,z) = \sum_{k\geqslant 0} z^k Q_k(0,x), \quad z \in C. \qquad (8)$$

Обозначим области

$$D_{xz} = \{(x,z)\ :\ x \in [a,b],\ |z| \leqslant 1, z \in C\}, \quad D_{txz} = \{(t,x,z)\ :\ t \geqslant 0, x, z \in D_{xz}\}.$$

Заметим, что ряд $R(t,x,z)$ равномерно сходится, во всяком случае, в области $|z| \leqslant 1$, так как

$$\left|\sum_{k\geqslant 0} z^k Q_k(t,x)\right|\Bigg|_{|z|\leqslant 1} \leqslant \sum_{k\geqslant 0}\left|z^k Q_k(t,x)\right|\Bigg|_{|z|\leqslant 1} = \sum_{k\geqslant 0}\left|z^k\right| \cdot |Q_k(t,x)|\Bigg|_{|z|\leqslant 1} =$$

$$= \sum_{k\geqslant 0}|z|^k Q_k(t,x)\Big|_{|z|\leqslant 1} \leqslant \sum_{k\geqslant 0}|z|^k Q_k(t,x)\Big|_{|z|=1} = \sum_{k\geqslant 0} Q_k(t,x) = f(t,x).$$

Для решения неоднородной задачи Коши (2)-(7) рассмотрим замену переменных: $G_{n-1}(t,x) = \sum\limits_{k\geqslant n} Q_k(t,x), \quad n \geqslant 1$, где $G_n(t,x)$ — новые неизвестные функции, которая позволяет перейти от однородной системы к неоднородной системе уравнений.

С учетом указанной замены получается следующая система уравнений относительно $G_n(t,x)$, названная в данной работе 2-й нестационарной моделью СМО:

$$xf(t,x) - (x+\mu+\alpha)G_0(t,x) + \mu G_1(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b G_0(t,y)dy = \frac{\partial}{\partial t}G_0(t,x), \qquad (9)$$

$$xG_{n-1}(t,x) - (x+\mu+\alpha)G_n(t,x) + \mu G_{n+1}(t,x) +$$
$$+ \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b G_n(t,y)dy = \frac{\partial}{\partial t}G_n(t,x), \quad 1 \leqslant n \leqslant \nu - 2, \qquad (10)$$

$$xG_{\upsilon-1}(t,x) - (x+\mu+\alpha)G_\nu(t,x) + \mu G_{\nu+1}(t,x) + \Delta G_{\nu+1}(t,x) +$$

$$+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b G_\nu(t,y)dy = \frac{\partial}{\partial t}G_\nu(t,x),\ n=\nu-1, \quad (11)$$

$$xG_{n-1}(t,x)-(x+\mu+\alpha+\Delta)G_n(t,x)+\mu G_{n+1}(t,x)+\Delta G_{n+1}(t,x)+$$
$$+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b G_n(t,y)dy = \frac{\partial}{\partial t}G_n(t,x), \quad n\geqslant\nu. \quad (12)$$

Для решения этой системы введем производящие функции $F(t,x,z)$ и $G(t,z)$:

$$F(t,x,z)=\sum_{n\geqslant 0} z^n G_n(t,x),\ G(t,z)=\sum_{n\geqslant 0} z^n \bar{G}_n(t),\ \bar{G}_n(t)=\int\limits_a^b G_n(t,y)dy,\ |z|\leqslant 1, z\in C,$$

где области сходимости степенных рядов $F(t,x,z)$ и $G(t,z)$представляют собой области D_{txz}, D_{xz}, соответственно.

Введем оператор K сдвига коэффициентов степенного ряда:

$$KF(t,x,z)=\frac{F(t,x,z)-G_0(t,x)}{z}=\sum_{n\geqslant 0} z^n G_{n+1}(t,x), \quad (13)$$

а также оператор интегрирования

$$\Phi:\ \Phi F(t,x,z)=\varphi(x)\int\limits_a^b F(t,y,z)dy,$$

одинаково действующие на нестационарные и стационарные абсолютно сходящиеся степенные ряды. Через I обозначим единичный оператор.

Из определения производящей функции $F(t,x,z)$ и системы уравнений относительно $G_n(t,x)$ следует уравнение относительно производящей функции $F(t,x,z)$

$$\left[(xz-(x+\mu+\alpha+\Delta))I+\mu K+\alpha\Phi+\Delta(1-z)z^{\nu-1}(K^\nu)\right]\ F(t,x,z)=F'_t(t,x,z)-xf(t,x), \quad (14)$$

с начальным условием

$$F(0,x,z)=\sum_{n\geqslant 0} z^n \sum_{k\geqslant n+1}\widetilde{Q}_k(x). \quad (15)$$

Обозначим операторы

$$A_s=\frac{1}{x+\mu+\alpha+\Delta-xz}\left(\mu K+\alpha\Phi-sI+\Delta(1-z)z^{\nu-1}(K^\nu)\right),$$

$$\tau_s=I-A_s, \quad \tau=(xz-(x+\mu+\alpha+\Delta))\tau_0.$$

С учетом введенных обозначений из (14) следует уравнение

$$F'_t(t,x,z)=\tau\, F(t,x,z)+xf(t,x), \quad (16)$$

с начальным условием (15).

Обозначим через L пространство нестационарных и стационарных степенных рядов $F(t,x,z) : F(t,x,z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n G_n(t,x)$, сходящихся равномерно по t,x,z в области D_{txz}, суммируемых по Лебегу на промежутке $[a,b]$, имеющих неотрицательные коэффициенты $G_n(t,x)$, интегралы от которых по $x \in [a,b]$ строго больше 0, то есть $\int\limits_a^b G_n(t,x)dx > 0$.

Согласно обозначению считаем, что L содержит также аналогичное пространство стационарных степенных рядов.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для значений $\alpha > 0$ в СМО существует и единственно нестационарное решение $F(t,x,z) \in L$ уравнения (16) непрерывное по $t,x,z \in D_{txz}$ при заданном начальном условии (15):

$$F(t,x,z) = e^{t\tau}\left[F(0,x,z) + \int\limits_0^t e^{-u\tau} x f(u,x)du\right], \tag{17}$$

где согласно [17] оператор $e^{t\tau}$ равен

$$e^{t\tau} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}(t\tau)^n.$$

Доказательство. Нестационарное решение (17) получается из линейного неоднородного дифференциального уравнения (16) 1-го порядка по переменной t. Уравнение (16) рассматривается как линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка по переменной t, при этом остальные переменные x,z рассматриваются как параметры. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений 1-го порядка может быть найдено, например, с применением метода вариации произвольных постоянных [14]. Это решение с применением операторных обозначений представлено в формуле (17).

Покажем, что решение в (17) существует и единственно. Рассмотрим правую часть уравнения (16) как функцию аргументов t,F,x,z и обозначим ее через $\psi \equiv \psi(t,F,x,z) = \tau F + xf$, $F \in C$.

Производная функции ψ по аргументу F равна $\psi'_F = (\tau F + xf)'_F = \tau 1$. Заметим, что оператор τ, примененный к 1, представляет собой непрерывную функцию аргументов t,x,z.

Непрерывность функции ψ и производной ψ'_F по переменным t,F при любых значениях параметров $x,z \in D_{xz}$ следует из непрерывности функции $f(x,z)$ и оператора τ. Из непрерывности функций ψ и ψ'_F, согласно теореме Коши, следует существование и единственность решения $F(t,x,z)$ уравнения (13) при заданном начальном условии (15).

Непрерывность решения $F(t,x,z)$ в (17) следует из непрерывности всех функций и операторов, входящих в правую часть (17). *Теорема 1 доказана.*

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

Обозначим стационарные характеристики СМО:

$$g_n(x) = \lim_{t\to\infty} G_n(t,x)\ , n \geqslant 0. \tag{18}$$

Ниже будет доказано существование пределов в (18).

Из системы уравнений (9)–(12) следует, что стационарные характеристики числа заявок $g_n(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$xf(x) - (x+\mu+\alpha)g_0(x) + \mu g_1(x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b g_0(y)dy = 0, \quad n = 0, \tag{19}$$

$$xg_{n-1}(x) - (x+\mu+\alpha)g_n(x) + \mu g_{n+1}(x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b g_n(y)dy = 0,\ 1 \leqslant n \leqslant \varsigma - 2, \qquad (20)$$

$$xg_{\varsigma-1}(x) - (x+\mu+\alpha)g_\varsigma(x) + \mu g_{\varsigma+1}(x) + \Delta g_{\varsigma+1}(x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b g_\varsigma(y)dy = 0, n = \varsigma - 1, \qquad (21)$$

$$xg_{n-1}(x) - (x+\mu+\alpha)g_n(x) - \Delta g_n(x) + \mu g_{n+1}(x) + \Delta g_{n+1}(x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b g_n(y)dy = 0, \quad n \geqslant \varsigma, \ (22)$$

так как согласно определению стационарного режима в стационарном режиме выполняется: $\frac{\partial}{\partial t}G_n(t,x) = 0$.

Решение данной системы будем искать в пространстве неотрицательных функций интегрируемых на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим пространство стационарных степенных рядов L: $h(x,z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} h_n(x)z^n$, сходящихся равномерно по x, z в области D_{xz}, суммируемых по Лебегу на интервале $[a,b]$, имеющих неотрицательные коэффициенты $h_n(x)$, интегралы от которых по $x \in [a,b]$ строго больше нуля: $\int\limits_a^b h_n(x)dx > 0$, $n \geqslant 0$.

Рассмотрим оператор интегрирования Φ:

$$\Phi h = \varphi(x)\int\limits_a^b h(y,z)dy = \sum_{n\geqslant 0} z^n \varphi(x)\int\limits_a^b h_n(y)dy,$$

и оператор сдвига коэффициентов степенного ряда

$$K\sum_{n\geqslant 0} h_n(x)\, z^n = \sum_{n\geqslant 0} h_{n+1}(x)\, z^n.$$

Операторы Φ и K отображают элементы пространства L обратно в пространство L.

Введем следующие нормы в пространстве L:

$$\|h\|_{L,1} = \sum_{n\geqslant 0} |z|^n \int\limits_a^b h_n(x)\frac{1}{b-a}dx,$$

$$\|h\|_{L,2} = \sum_{n\geqslant 0} |z|^n \int\limits_a^b h_n(x)\varphi(x)dx.$$

По каждой из введенных норм L является банаховым пространством.

Обозначим через $F(x,z)$ стационарную производящую функцию

$$F(x,z) = \lim_{t\to\infty} F(t,x,z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n g_n(x), \quad g_n(x) = \sum_{k\geqslant n+1} q_k(x), \quad n \geqslant 0.$$

Обозначим также функцию

$$f_0(x,z) = \frac{xf(x)}{x+\mu+\alpha+\Delta-xz}$$

и оператор

$$A_0 = \frac{1}{x+\mu+\alpha+\Delta - xz}\left[\mu K + \alpha\Phi + \Delta I + \Delta(1-z)z^{\nu-1}(K^{\nu})\right].$$

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 2. Стационарная производящая функция $F(x,z)$ удовлетворяет уравнению:

$$(I - A_0)F(x,z) = f_0(x,z). \tag{23}$$

Доказательство. Относительно стационарной производящей функции $F(x,z)$ из (14) следует стационарное уравнение:

$$\left[(xz - (x+\mu+\alpha+\Delta))\, I + \mu K + \alpha\Phi + \Delta I + \Delta(1-z)z^{\nu-1}(K^{\nu})\right] F(x,z) = -xf(x), \tag{24}$$

или

$$\tau_0 F(x,z) = f_0(x,z).$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$\left[I - \frac{1}{(x+\mu+\alpha - xz)}\left(\mu K + \alpha\Phi + \Delta(1-z)z^{\nu-1}K^{\nu}\right)\right] F(x,z) = \frac{xf(x)}{(x+\mu+\alpha-xz)},$$

откуда с учетом обозначения A_0 следует уравнение (23). *Теорема 2 доказана.*

С учетом доказанной теоремы из уравнения (23) выражается стационарная производящая функция

$$F(x,z) = \tau_0^{-1} f_0(x,z), \tag{25}$$

и следует формальное представление для нее

$$F(x,z) = \tau_0^{-1} f_0(x,z) = (I - A_0)^{-1} f_0(x,z) = \sum_{n\geqslant 0} A_0^n f_0(x,z). \tag{26}$$

Заметим, что при условии $\|A_0\|_{J(L)} < 1$, выполнение которого будет показано ниже, степенной ряд

$$f_0(x,z) = \frac{xf(x)}{x+\mu+\alpha+\Delta}\cdot\frac{1}{1-\rho z} = \frac{xf(x)}{x+\mu+\alpha+\Delta}\sum_{n\geqslant 0}\rho^n z^n, \rho = \rho(x) = \frac{x}{x+\mu+\alpha+\Delta},$$

принадлежит пространству L. Так как $\forall\, h \in L \Rightarrow (x+\mu+\alpha+\Delta - xz)^{-1}h,\ Kh, K^{\nu}h, \Phi h \in L$, то $\forall h \in L \Rightarrow A_0 h \in L$. Следовательно, степенные ряды $A_0^n f_0(x,z) \in L$, $\forall n \geqslant 1$.

Обозначим через $J(L)$ пространство линейных ограниченных в L операторов, отображающих пространство L само в себя. По операторной норме

$$\|U\|_{J(L)} = \sup_{\|h\|_{L,1}\neq 0}\frac{\|Uh\|_{L,1}}{\|h\|_{L,1}} = \sup_{\|h\|_{L}=1}\|Uh\|_{L,1}$$

оно является банаховым пространством.

Лемма 1. Из определения линейных операторов Φ K, A_0 заданных на элементах пространства L, следует, что:

1. норма оператора Φ равна единице

$$\|\Phi\|_{J(L)} = 1, \quad \forall x,z \in D_{xz},$$

2. норма оператора K ограничена

$$\|K\|_{J(L)} \leqslant \frac{1}{|z|}, \quad z \in \{z : |z| > 0\} ,$$

3. при выполнении условия

$$\bar{\lambda} < \mu + \Delta, \tag{27}$$

существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu, \Delta, b, a, \alpha) > 0$, что $\forall z \in \{z : |z| \in (1, 1+\varepsilon_0)\}$ норма оператора A_0 ограничена в пространстве $J(L)$:

$$\|A_0\|_{J(L)} < 1.$$

Доказательство. 1. Норма оператора интегрирования $\Phi h(x,z) = \varphi(x) \int\limits_a^b h(y,z)dy$, $h \in L$, равна:

$$\|\Phi\|_{J(L)} = \sup_{\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{\|Uh\|_{L,1}}{\|h\|_{L,1}} = \sup_{h:\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{\int\limits_a^b \varphi(x) \int\limits_a^b \sum\limits_{n\geqslant 0} |z|^n h_n(y)dydx}{\sum\limits_{n\geqslant 0} |z|^n \int\limits_a^b h_n(x)dx} =$$

$$= \sup_{h:\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{\sum\limits_{n\geqslant 0} \int\limits_a^b \varphi(x)dx \int\limits_a^b h_n(y)dy\, |z|^n}{\sum\limits_{n\geqslant 0} \int\limits_a^b h_n(x)dx\, |z|^n} = \sup_{h:\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{\sum\limits_{n\geqslant 0} \int\limits_a^b h_n(y)dy\ |z|^n}{\sum\limits_{n\geqslant 0} \int\limits_a^b h_n(x)dx\ |z|^n} = 1,$$

где $h(y,z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} h_n(y) z^n$, $\quad \int\limits_a^b \varphi(x)dx = 1$.

2. Для нормы оператора K сдвига коэффициентов степенного ряда, определенного на элементах пространства L, выполняется оценка:

$$\|K\|_{J(L)} = \sup_{\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{\|Uh\|_{L,1}}{\|h\|_{L,1}} = \sup_{\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{\sum\limits_{n\geqslant 0} |z|^n \int\limits_a^b h_{n+1}(x) \frac{1}{b-a} dx}{\sum\limits_{n\geqslant 0} |z|^n \int\limits_a^b h_n(x) \frac{1}{b-a} dx} = \sup_{\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{\sum\limits_{n\geqslant 0} d_{n+1} |z|^n}{\sum\limits_{n\geqslant 0} d_n\, |z|^n} =$$

$$= \sup_{\|h\|_{L,1} \neq 0} \frac{1}{|z|} \frac{\sum\limits_{n\geqslant 1} d_n\, |z|^n}{(d_0 + \sum\limits_{n\geqslant 1} d_n\, |z|^n)} \leqslant \frac{1}{|z|},$$

где $d_n = \int\limits_a^b h_n(y) \frac{1}{b-a} dy > 0, n \geqslant 0$.

3. Докажем, что $\|A_0\|_{J(L)} < 1$. Обозначим $q = |z|$, $\rho = \rho(x) = \frac{x}{x+\mu+\Delta+\alpha}$. Для нормы оператора $A_0 = (x+\mu+\alpha+\Delta-xz)^{-1} \cdot (\mu K + \alpha\Phi + \Delta I + \Delta(1-z)z^{\nu-1}(K^\nu))$, определенного на элементах пространства L, получим оценку:

$$\|A_0\|_{J(L)} = \left\|(x+\mu+\Delta+\alpha-xz)^{-1} \cdot (\mu K + \alpha\Phi + \Delta I + \Delta(1-z)z^{\nu-1}(K^\nu))\right\|_{J(L)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{1}{x+\mu+\Delta+\alpha-xz} \right\|_L \cdot \left\|\mu K + \alpha\Phi + \Delta I + \Delta(1-z)z^{\nu-1}(K^\nu)\right\|_{J(L)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{1}{(x+\mu+\Delta+\alpha-xz)} \right\|_L \cdot (|\mu| \cdot \|K\|_{J(L)} + \alpha \cdot \|\Phi\|_{J(L)} + |\Delta|\, \|I\|_{J(L)} + |\Delta| \cdot |1-z| \cdot \left|z^{\nu-1}\right| \cdot \|K^\nu\|_{J(L)}) \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{1}{x+\mu+\Delta+\alpha-xz} \right\|_L \cdot (\mu\cdot|z|^{-1}+\alpha\cdot 1+\Delta\cdot 1+\Delta\cdot|1-q|\cdot|z|^{-1}) =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{\frac{1}{b-a}dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\cdot(\frac{\mu}{q}+\alpha+\Delta+\Delta\,|1-q|\,\frac{1}{q}) = \int\limits_a^b \frac{\frac{1}{b-a}dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\cdot\eta(q),$$

где $\eta = \frac{\mu}{q}+\alpha+\Delta+\Delta\,|1-q|\,\frac{1}{q}$. Заметим

$$\eta(q) = \begin{cases} \frac{\mu}{q}+\alpha+\Delta+\Delta(1-q)\frac{1}{q} = \frac{\mu+\Delta}{q}+\alpha, & q<1, \\ \frac{\mu}{q}+\alpha+\Delta+\Delta(q-1)\frac{1}{q} = \frac{\mu-\Delta}{q}+\alpha+2\Delta, & q>1. \end{cases}$$

Введем в оценку нормы оператора $\|A_0\|_{J(L)}$ вторую норму элементов $\|h\|_{L,2}$.
Выше получили

$$\|A_0\|_{J(L)} \leqslant \int\limits_a^b \frac{\frac{1}{b-a}dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\cdot\eta(q).$$

Если для фиксированной функции $\varphi(x)$ выполняется:

$$\int\limits_a^b \frac{\frac{1}{b-a}dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq} \leqslant \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq},$$

то $\|A_0\|_{J(L)} \leqslant \int\limits_a^b \frac{\frac{1}{b-a}dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\cdot\eta(q) \leqslant \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\eta(q) = \theta(q)$.

Если для фиксированной функции $\varphi(x)$ выполняется:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq} \leqslant \int\limits_a^b \frac{\frac{1}{b-a}dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq},$$

то $\|A_0\|_{J(L)} \leqslant \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\cdot\eta(q) = \theta(q) \leqslant \int\limits_a^b \frac{\frac{1}{b-a}dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\eta(q)$.

Выясним, при каких условиях $\theta(q)<1$.

Найдем предел функции $\theta(q)$ в точке $q=1$ справа и слева:

$$\lim_{q\to 1\pm 0}\theta(q) = \lim_{q\to 1\pm 0}\int\limits_a^b \varphi(x)\cdot\frac{dx}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}\cdot(\frac{\mu}{q}+\alpha+\Delta+\Delta\,|1-q|\,\frac{1}{q}) =$$

$$= \frac{\mu+\Delta+\alpha}{\mu+\Delta+\alpha} = 1, \text{ то есть } \theta(1)=1.$$

Найдем производную функции $\theta(q)$ в точке $q=1$ слева:

$$\lim_{q\to 1-0}\theta'(q) = \lim_{q\to 1-0}\left[\int\limits_a^b \frac{x\varphi(x)dx}{(x+\mu+\Delta+\alpha-xq)^2}\cdot\left(\frac{\mu}{q}+\alpha+\Delta+\Delta\,|1-q|\cdot\frac{1}{q}\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}dx\left(-\frac{\mu}{q^2}-\Delta(1-q)\frac{1}{q^2}\right)\right] =$$

$$= \bar{\lambda}\frac{\mu+\Delta+\alpha}{(\mu+\Delta+\alpha)^2} - \frac{\mu+\Delta}{\mu+\Delta+\alpha} = \frac{\bar{\lambda}-(\mu+\Delta)}{\mu+\Delta+\alpha}.$$

Найдем производную функции $\theta(q)$ в точке $q=1$ справа:

$$\lim_{q\to 1+0}\theta'(q) = \lim_{q\to 1+0}\left[\int\limits_a^b \frac{x\varphi(x)dx}{(x+\mu+\Delta+\alpha-xq)^2}\cdot\left(\frac{\mu}{q}+\alpha+\Delta+\Delta\left|1-q\right|\cdot\frac{1}{q}\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x+\mu+\Delta+\alpha-xq}dx\left(-\frac{\mu}{q^2}-\Delta(1-q)\frac{1}{q^2}\right)\right] =$$

$$= \bar{\lambda}\frac{\mu+\Delta+\alpha}{(\mu+\Delta+\alpha)^2} - \frac{\mu-\Delta}{\mu+\Delta+\alpha} = \frac{\bar{\lambda}-(\mu-\Delta)}{\mu+\Delta+\alpha}.$$

Потребуем, чтобы производная функции $\theta(q)$ в точке $q=1$ слева и справа была отрицательной. С учетом этого условия из оценки нормы $\|A_0\|_{J(L)}$ получим два условия на параметры СМО:

$$\bar{\lambda} < \mu+\Delta \text{ и } \bar{\lambda} < \mu-\Delta.$$

Из объединения этих двух условий следует указанное выше условие (27).

Таким образом, при выполнении условия (27) из того, что $\theta(1)=1$, $\theta'(1\pm 0)<0$ вытекает существование такого $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\mu,\Delta,b,a,\alpha)>0$, что выполняется $\theta(q)<1$, то есть $\|A_0\|_{J(L)}<1$.

Лемма 1 доказана.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 3. Существует единственное решение $F(x,z)$ уравнения (24), представленное в (26) в виде равномерно сходящегося ряда для $\forall\, x,z$ из области D_{xz}:

$$F(x,z)=\sum_{n\geqslant 1}A^n f_0(x,z). \tag{28}$$

Доказательство. Из (24) следует

$$F(x,z)=(I-A_0)^{-1}f_0(x,z), \tag{29}$$

а так как $\|A_0\|<1$ согласно лемме 1, то правая часть (28) может быть представлена в виде сходящегося ряда [7]

$$(I-A_0)^{-1}f_0(x,z)=\sum_{n\geqslant 0}A^n f_0(x,z). \tag{30}$$

Из (29), (30) следует (28). Так как $\|A_0\|<1$ равномерно $\forall\, x,z$ из областиD_{xz}, то отсюда следует равномерная сходимость ряда в (28). *Теорема 3 доказана.*

Таким образом, из формального представления $F(x,z)$ в (26) и оценки $\|A_0\|_{J(L)}<1$ леммы 1 следует существование и единственность стационарной производящей функции $F(x,z)$.

Заметим, что из формулы (26) следует, что условие (27) является необходимым условием существования стационарного режима в СМО, так как условие (27) является необходимым условием выполнения оценки $\|A_0\|_{J(L)}<1$.

СТАБИЛИЗАЦИЯ

В данном разделе покажем, что, в рассмотренной СМО, происходит стабилизация нестационарного режима к стационарному при любых начальных условиях.

После применения к уравнению (16) преобразования Лапласа

$$f^*(s,x)=\int\limits_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t,x)dt, F^*(s,x,z)=\int\limits_{0^-}^{\infty} e^{-st}F(t,x,z)dt, \quad Re\ s>0, \quad s\in C,$$

из (16) следует уравнение относительно $F^*(s,x,z)$:

$$\tau_s F^*(s,x,z)=\frac{xf^*(s,x)}{x+\mu+\alpha-xz}+\frac{F(0,x,z)}{x+\mu+\alpha-xz}. \tag{31}$$

Теорема 4. Для значений $\alpha>0$ при условии (1) отсутствия перегрузок в СМО имеет место равномерная по $x,z\in D_{xz}$ сходимость

$$\lim_{t\to\infty} F(t,x,z)=F(x,z), \tag{32}$$

причем для любых значений $x,z\in D_{xz}$ предел в (31) существует, единственен, ограничен по норме пространства L и не зависит от начальных условий.

Доказательство. Покажем, что имеет место равномерная сходимость в (31). Покажем, что существует единственный и ограниченный обратный оператор τ_s^{-1}. Так как $\tau_s = I-A_s$, то достаточно показать, что $\|A_s\|_{J(L)}<1$.

Из обозначений выше следует

$$A_s=A_0-\frac{s}{x+\mu+\alpha-xz}I\ .$$

Следовательно

$$\|A_s\|_{J(L)}=\left\|A_0-\frac{s}{x+\mu+\alpha-xz}I\right\|_{J(L)}\leqslant\|A_0\|_{J(L)}+\left\|\frac{s}{x+\mu+\alpha-xz}I\right\|_{J(L)}. \tag{33}$$

В *лемме 1* показано, что $\|A_0\|_{J(L)}<1$. Обозначим через $\delta=1-\|A_0\|_{J(L)}$, откуда $\|A_0\|_{J(L)}=1-\delta$. Обозначим $\varepsilon=\left\|\frac{s}{x+\mu+\alpha-xz}I\right\|_{J(L)}$. Так как $s\to0$, то $\varepsilon\to0$. Пусть выполняется условие $\varepsilon<\delta/2$, так как δ не зависит от s. С учетом введенных обозначений в правой части (32) получим $1-\delta+\varepsilon$, а так как $\varepsilon<\delta/2$, то $1-\delta+\varepsilon<1$. Таким образом получили $\|A_s\|_{J(L)}<1$.

К оператору $\tau_0=I-A_0$ существует единственный ограниченный обратный оператор τ_0^{-1}, так как $\|A_s\|_{J(L)}<1$.

В функциональном анализе [13] известно, что

$$\lim_{t\to\infty}F(t,x,z)=\lim_{s\to0}\ sF^*(s,x,z).$$

Из (30) следует

$$\lim_{t\to\infty}F(t,x,z)=\lim_{s\to0}\ sF^*(s,x,z)=\lim_{s\to0}s\tau_s^{-1}\left[\frac{xf^*(s,x)}{x+\mu+\alpha-xz}+\frac{F(0,x,z)}{x+\mu+\alpha-xz}\right]=$$

$$=\lim_{s\to0}\tau_s^{-1}\left[\frac{xsf^*(s,x)}{x+\mu+\alpha-xz}\right]+\lim_{s\to0}s\tau_s^{-1}\left[\frac{F(0,x,z)}{x+\mu+\alpha-xz}\right]=$$

$$=\tau_0^{-1}\left[\frac{x}{x+\mu+\alpha-xz}\lim_{s\to0}sf^*(s,x)\right]=\tau_0^{-1}\left[\frac{x}{x+\mu+\alpha-xz}\lim_{t\to\infty}f(t,x)\right]=$$

$$=\tau_0^{-1}\left[\frac{x}{x+\mu+\alpha-xz}f(x)\right]=F(x,z), \tag{34}$$

где последнее равенство следует из (25):

$$F(x,z) = \tau_0^{-1} f_0(x,z), \quad f_0(x,z) = \frac{xf(x)}{x+\mu+\alpha-xz}.$$

Кроме того, учитывалось, что

$$\lim_{s\to 0} s\tau_s^{-1} \left[\frac{F(0,x,z)}{x+\mu+\alpha-xz} \right] = 0,$$

так как оператор τ_s^{-1} существует, единственен и ограничен.

Согласно (34) для стационарной производящей функции следует второе утверждение теоремы. *Теорема 4 доказана.*

Из (31) следует существование пределов в (18):

$$\lim_{t\to\infty} G_n(t,x) = g_n(x), \quad n \geqslant 0, \tag{35}$$

то есть существование пределов

$$\lim_{t\to\infty} Q_n(t,x) = q_n(x),$$

так как

$$\lim_{t\to\infty} Q_n(t,x) = \lim_{t\to\infty} \left[G_{n-1}(t,x) - G_n(t,x) \right].$$

Можно сказать, что в СМО при условии отсутствия перегрузок (27) происходит стабилизация нестационарного режима независимо от начальных условий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье проведен теоретический анализ стационарного и нестационарного режимов СМО. Доказано существование и единственность стационарного и нестационарного режимов, стабилизация нестационарного режима к стационарному при любых начальных условиях. Получены нестационарные и стационарные характеристики числа заявок в СМО, производящие функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / О. В. Бондрова, Д. С. Крылова, Н. И. Головко, Т. А. Жук // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 89–100.

2. Гитман, М. Б. Управление социально-техническими системами с учетом нечетких предпочтений / М. Б. Гитман, В. Ю. Столбов, Р. Л. Гилязов. — Москва : Ленанд, 2011. — 272 с.

3. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М. : Наука, 1988. — 445 с.

4. Головко, Н. И. СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / Н. И. Головко, В. О. Каретник, О. В. Пелешок // Автоматика и вычислительная техника. — 2009. — № 10. — С. 75–96.

5. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головко, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сиб. журн. индустр. мат. — 2008. — Т. XI, № 2(34). — С. 50–64.

6. Горцев, А. М. Управление и адаптация в системах массового обслуживания / А. М. Горцев, А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. — Томск : Изд–во Том. ун–та, 1978. — 208 с.

7. Гурса, Э. Курс математического анализа. Т. 3 / Э. Гурса. — М. : Государственное технико-теоретическое изд-во, 1933. — 368 с.

8. Дудин, А. Н. Об обслуживающей системе с переменным режимом работы / А. Н. Дудин // Автоматика и вычислительная техника. — 1985. — № 2. — С. 27–29.

9. Катрахов, В. В. Введение в теорию марковских дважды стохастических систем массового обслуживания / В. В. Катрахов, Н. И. Головко, Д. Е. Рыжков. — Владивосток : Изд–во ДВГУ, 2005. — 212 с.

10. Катрахов, В. В. Введение в функционально-аналитический метод в динамической теории массового обслуживания / В. В. Катрахов, Д. Е. Рыжков. — Владивосток : Изд–во ДВГУ, 2004. — 102 с.

11. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. — М. : Мир, 1979. — 600 с.

12. Королюк, В. С. Стохастические модели систем / В. С. Королюк. – Киев : Наук. думка, 1989. — 207 с.

13. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 249 с.

14. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. — М. : Наука, 1985. — 448 с.

15. Шиндер, Д. Л. Основы компьютерных сетей / Д. Л. Шиндер. — М. : Вильямс, 2002. — 656 с.

16. Prabhu, N. U. Markov-modulated queueing systems / N. U. Prabhu, Z. Yixin // Queueing Syst. — 1989. — № 5. — P. 215–246.

REFERENCES

1. Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. The derivation of the equation for queueing systems with infinite storage and an intermittent intensity of the input stream. [Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Vyvod uravnenij s beskonechnym nakopitelem i skachkoobraznoj intensivnost'ju vhodnogo potoka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 89–100.

2. Gitman M.B., Stolbov V.Y., Gilyazov L.R. Management of socio-technical systems taking into account the fuzzy preferences. [Gitman M.B., Stolbov V.Y., Gilyazov L.R. Upravlenie social'no–tehnicheskimi sistemami s uchetom nechetkikh predpochtenii]. Moscow: Lenand, 2011, 272 p.

3. Gnedenko B.V. Course of probability theory. [Gnedenko B.V. Kurs teorii veroyatnostei]. Moscow: Science, 1988, 445 p.

4. Golovko N.I., Karetnik V.O., Peleshok O.V. Service systems with infinite storage and spasmodic input stream. [Golovko N.I., Karetnik V.O., Peleshok O.V. SMO s beskonechnym nakopitelem i skachkoobraznoj intensivnost'ju vhodnogo potoka]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and remote control*, 2009, no. 10, pp. 75–96.

5. Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonuyk I.I. Research of models of service systems in information networks. [Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonuyk I.I. Issledovanie modelej sistem massovogo obsluzhivanija v informacionnyh setjah]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki — Siberian journal of industrial mathematics*, 2008, vol. XI, no. 2 (34), pp. 50–64.

6. Gorchev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. Management and adaptation in systems of mass service. [Gorcev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. Upravlenie i adaptaciya v sistemax massovogo obsluzhivaniya]. Tomsk, 1978, 208 p.

7. Goursat E.A. Course of Mathematical Analysis. V. 3. [Goursat E. A. Kurs matematicheskogo analiza. T. 3]. Moscow, 1933.

8. Dudin A.N. On the serving system with variable mode of operation. [Dudin A.N. Ob obsluzhivayushhej sisteme s peremennym rezhimom raboty]. *Avtomatika i vychislitel'naya texnika — Automatic Control and Computer Sciences*, 1985, no. 2, pp. 27–29.

9. Katrakhov V.V., Golovko N.I., Ryzhkov D.E. Introduction to the theory of Markov's doubly stochastic queuing systems. [Katrakhov V.V., Golovko N.I., Ryzhkov D.E. Vvedenie v teoriju markovskih dvazhdy stohasticheskih system massovogo obsluzhivanija]. Vladivostok: FESU Publishing House, 2005, 212 p.

10. Katrakhov V.V. Introduction to functional-analytic method in dynamic theory of mass service. [Katrakhov V.V., Ryzhkov D.E. Vvedenie v funkcional'no-analiticheskij metod v dinamicheskoj teorii massovogo obsluzhivanija]. Vladivostok: publishing house of FESU, 2004, 102 p.

11. Cleinrock L. Queuing theory. [Cleinrock L. Teorija massovogo obsluzhivanija]. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p.

12. Koroljuk V.S. Stochastic models of systems. [Korolyuk V.S. Stoxasticheskie modeli sistem]. Kiev, 1989, 207 p.

13. Trenogin V.A. Functional analysis. [Trenogin V.A. Funkcional'nyj analiz]. M.: Nauka, 1980, 249 p.

14. Fedoryuk M.V. Ordinary differential equations. [Fedoruk M.V. Obyknovennye differencial'nye uravneniya]. M.: Science, 1985, 448 p.

15. Shinder D.L. Fundamentals of computer networks. [Shinder D.L. Osnovy kompjuternyh setej]. M.: Williams, 2002, 656 p.

16. Prabhu N.U., Yixin Zhu. Markov-modulated queueing systems. Queueing Syst., 1989, no. 6, pp. 215–246.

Крылова Д. С., старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, г. Владивосток, Россия
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Тел.: 89147064152

Головко Н. И., доктор технических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, г. Владивосток, Россия
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Тел.: 89146768992

Жук Т. А., доцент кафедры высшей математики Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета, г. Владивосток, Россия
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Тел.: 89029540034

Krylova D. S., senior teacher of the Department of algebra, geometry and analysis of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Tel.: 89147064152

Golovko N. I., doctor of technical Sciences, Professor of the Department of algebra, geometry and analysis of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Tel.: 89146768992

Zhuk T. A., associate Professor of the higher mathematics Department of the Far Eastern State Technical Fishery University, Vladivostok, Russia
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Tel.: 89029540034