УДК 517.9; 517.98

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. Ю. Кабанцова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.10.2016 г.

Аннотация. В классических учебниках по дифференциальным уравнениям описан прием сведения дифференциальных уравнений n-го порядка стандартной заменой к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Каждое из соответствующих уравнений можно записать в операторном виде. Естественным образом возникает вопрос о совпадении ряда свойств соответствующих дифференциальных операторов. В статье изучаются линейные дифференциальные операторы (уравнения) второго порядка в банаховых пространствах векторных функций, определенных на всей вещественной оси. Приводятся условия их обратимости, фредгольмовости, асимптотическое представление решений однородного уравнения. Основные результаты получены на основе сопоставления исследуемому дифференциальному оператору операторной матрицы второго порядка и последующего использования теории дифференциальных операторов первого порядка, определяемого этой операторной матрицей.

Ключевые слова: линейный дифференциальный оператор, обратимый оператор, спектр оператора, экспоненциальная дихотомия, асимптотическое поведение решений, корни операторного уравнения.

ANALYSIS OF LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS IS CARRIED OUT USING SECOND ORDER OPERATOR MATRICES

L. Ju. Kabantsova

Abstract. In differential equations classical textbooks, the n-th order differential equations reducing by standard substitution to a system of first-order differential equations method is described. Each of the corresponding equations can be written in operator form. The problem of the corresponding differential operators number of properties coincidence is naturally arises. In this paper we study the second order linear differential operators (equations) in Banach spaces of vector functions defined on the entire real axis. The conditions of reversibility are given. The main results were obtained on the basis of matching of the studied differential operator and the second order operator matrices with subsequent use of the theory of the first order differential operators determined by this operator matrix.

Keywords: linear differential operator, reversible operator, operator spectrum, exponential dichotomy, the operator equation roots.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — комплексное банахово пространство, End$X$ — банахова алгебра операторов, действующих в X.

В настоящей работе рассматриваются следующие функциональные пространства. Будем обозначать через $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ функций, принимающих свои значения в пространстве X, с нормой, определяемой равенством $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$; $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое пространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности; $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — подпространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$ равномерно непрерывных функций.

Далее через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим одно их перечисленных выше пространств.

В банаховом пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$x''(t) + B_1(t)x'(t) + B_2(t)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $f \in \mathcal{F}$, $B_1, B_2 : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ — операторнозначные функции из пространства $C_b(\mathbb{R}, \operatorname{End} X)$.

Любой функции $x \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие функцию $y : \mathbb{R} \to X^2 = X \times X$ (в декартовом произведении X^2 рассматривается норма $\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}, (x_1, x_2) \in X^2$) вида

$$y(t) = (x_1(t), x_2(t)),\ t \in \mathbb{R},\ x_1 = x, x_2 = x'.$$

Непосредственно из определения функции y следует, что функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ есть решение уравнения (1) тогда и только тогда, когда функция $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$ удовлетворяет уравнению (рассматриваемому в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$)

$$z'(t) + \mathbb{A}z(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$, $g(t) = (0, f(t)), t \in \mathbb{R}$, и операторнозначная функция $\mathbb{A} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}X^2$ имеет следующий вид: каждый оператор $\mathbb{A}(t) \in \operatorname{End}X^2$, $t \in \mathbb{R}$, задается (определяется) в $X \times X$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Иногда мы отождествляем матрицу оператора, действующего в декартовом произведении банаховых пространств, с оператором, который определяется этой матрицей (по возможности, мы старались этого избегать). Кроме того, используется канонический изоморфизм банаховых пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Через I обозначается тождественный оператор в любом из банаховых пространств.

Прием, использующий сведение дифференциальных и разностных уравнений высшего порядка к соответствующим дифференциальным и разностным уравнениям первого порядка, широко применяется в теории дифференциальных уравнений и, более того, излагается в университетских курсах по теории дифференциальных и разностных уравнений.

Уравнения (1) и (2) запишем в операторном виде

$$D_2 x = f,\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X), \quad \mathbb{D}y = g,\ g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X \times X),$$

где дифференциальный оператор D_2 определяется формулой

$$D_2 = D^2 + \widetilde{B}_1 D + \widetilde{B}_2. \tag{4}$$

В этой формуле $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2 \in \operatorname{End} \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ — операторы умножения в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ на операторные функции B_1, B_2 соответственно, т. е.

$$(\widetilde{B}_1 x)(t) = B_1(t)x(t), \quad (\widetilde{B}_2 x)(t) = B_2(t)x(t),\ t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{F}.$$

Оператор $D : \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $Dx = x'$, $x \in \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X)$ есть оператор дифференцирования с областью определения $\mathcal{F}^1$ абсолютно непрерывных функций из $\mathcal{F}$ с производной, принадлежащей пространству $\mathcal{F}$. Оператор D_2 имеет область определения $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^2(\mathbb{R}, X) = = \{x \in \mathcal{F} : x' \in \mathcal{F}^1\}$.

Оператор $\mathbb{D}_1 : \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X^2) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$ из (4) имеет вид

$$\mathbb{D}_1 = \mathbb{D} + \mathbb{B},$$

где $\mathbb{D} : \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X^2) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$ — оператор дифференцирования: $\mathbb{D}(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$. Оператор $\mathbb{B} \in \mathrm{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$ определяется равенствами:

$$(\mathbb{B}x)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, X).$$

Таким образом, оператор $\widetilde{\mathbb{D}}_1$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} D & -I \\ \widetilde{B}_2 & D + \widetilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

При описанном выше подходе сведения уравнения (1) к уравнению (2) одновременно обратимы оператор D_2 и оператор

$$\widetilde{\mathbb{D}}_1 : \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D & -I \\ \widetilde{B}_2 & D + \widetilde{B}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \, x \in \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X),$$

с областью определения $\{(x, x') : x \in \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X)\}$ и областью значений в подпространстве $\{0\} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Неудобство использования оператора $\widetilde{\mathbb{D}}_1$ связано с тем, что он действует между разными пространствами и отсутствуют работы по его изучению. В свою очередь, спектральные свойства оператора $\mathbb{D}_1$ достаточно хорошо изучены [1]-[7], причем и в случае когда операторы $B_1(t), B_2(t), t \in \mathbb{R}$, являются неограниченными. Возникает естественный вопрос о близости таких свойств операторов D_2 и $\mathbb{D}_1$, как совпадение размерностей ядер, одновременной замкнутости их образов, совпадение размерностей кообразов, одновременной их обратимости. При утвердительном ответе на эти вопросы изучение ряда свойств дифференциального оператора второго порядка D_2, связанных с его обратимостью, сводится к выяснению соответствующих свойств дифференциального оператора первого порядка $\mathbb{D}_1$. Следовательно, появляется возможность применения результатов работ [1]-[8].

Всюду далее используется следующее важное определение, рассмотренное в статьях [5]-[7].

Определение 1. Пусть X, Y — банаховы пространства и $A : D(A) \subset X \to Y$ — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$. Рассмотрим следующие свойства:

1) $\mathrm{Ker}A = \{x \in D(A) : Ax = 0\} = \{0\}$ (т. е. A — инъективный оператор);

2) $1 \leqslant n = \dim \mathrm{Ker}A < \infty$;

3) $\mathrm{Ker}A$ — бесконечномерное подпространство в X ($\mathrm{dimKer}A = \infty$);

4) $\mathrm{Ker}A$ — дополняемое подпространство в X;

5) $\overline{\mathrm{Im}A} = \mathrm{Im}A$ (образ оператора A замкнут в Y), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in X \setminus \mathrm{Ker}A} \frac{\|Ax\|}{\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}A)},$$

где $\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}A) = \inf\limits_{x_0 \in \mathrm{Ker}X} \|x - x_0\|$ — расстояние от вектора x до подпространства $\mathrm{Ker}A$;

6) оператор A корректен (равномерно инъективен), т. е. $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ $\gamma(A) > 0$;

7) $\mathrm{Im}A$ — замкнутое подпространство из Y конечной коразмерности $\mathrm{Codim}\,\mathrm{Im}A \geqslant 1$;
8) $\mathrm{Im}A$ — замкнутое подпространство в Y бесконечной коразмерности $\mathrm{Codim}\,\mathrm{Im}A = \infty$;
9) $\mathrm{Im}A \neq Y, \overline{\mathrm{Im}A} = Y$;
10) $\overline{\mathrm{Im}A} \neq Y$;
11) $\mathrm{Im}A = Y$ (A — сюръективный оператор);
12) оператор A обратим (т. е. $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ и $\mathrm{Im}A = Y$).

Если для оператора Aвыполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 12$, то будем говорить, что оператор A находится в *состоянии обратимости* σ. Множество всех состояний обратимости оператора A обозначим через $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}A$.

Определение 2. Если оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ имеет конечномерное ядро, т. е. выполнено одно из условий 1), 2) определения 1, и замкнутый образ конечной коразмерности, т. е. выполнено одной из условий 7), 11), то оператор A называется *фредгольмовым.* Число $\mathrm{ind}A = \mathrm{dimKer}A - \mathrm{CodimIm}A$ называется *индексом* фредгольмова оператора A.

Вводимое понятие состояний обратимости оператора играет важную роль в классификации спектров операторов (более разнообразной, чем общепринятая [9]). Аналогичное определение (без изменений) дается для линейных отношений [8].

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Одним из основных результатов статьи является

Теорема 1. *Множество состояний обратимости дифференциальных операторов* $D_2 : \mathcal{F}^2(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $\mathbb{D}_1 : \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X^2) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$ *совпадают в любом из рассматриваемых банаховых пространств* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \in \{C_0, C_{b,u}\}$, *т. е.*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(D_2) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathbb{D}_1). \tag{5}$$

Теорема 2. *Дифференциальный оператор второго порядка* $D_2 : \mathcal{F}^2(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ *обратим тогда и только тогда, когда обратим дифференциальный оператор* $\mathbb{D}_1 : \mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X^2) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$. *Если оператор* D_2 *обратим, то обратный* $\mathbb{D}_1^{-1} \in \mathrm{End}\,\mathcal{F}(\mathbb{R}, X^2)$ *к* $\mathbb{D}_1$ *оператор определяется матрицей (имеет вид)*

$$\begin{pmatrix} (D-\lambda_0 I)^{-1} - D_2^{-1}\big((B_2+\lambda_0 B_1+\lambda_0^2 I)(D-\lambda_0 I)^{-1}+\lambda_0 I\big) & D_2^{-1} \\ \lambda_0 (D-\lambda_0 I)^{-1} - D\,D_2^{-1}\big((B_2+\lambda_0 B_1+\lambda_0^2 I)(D-\lambda_0 I)^{-1}+\lambda_0 I\big) & D\,D_2^{-1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где λ_0 *— любое число из* $\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R})$.

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ –линейный оператор с непустым резольвентным множеством $\rho(A)$ и B_1, B_2 – операторы из алгебры $\mathrm{End}\mathcal{X}$. Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{A} = A^2 + B_1 A + B_2 : D(A^2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X} \tag{7}$$

с областью определения $D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$. Наряду с оператором $\mathcal{A}$ определим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A+B_1 \end{pmatrix}$, т. е.

$$\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, B_2 x_1 + (A+B_1)x_2), \tag{8}$$

где $x = (x_1, x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Ясно, что если $A = D$ — оператор дифференцирования в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, то $\mathcal{A} = D_2$ и $\mathbb{A} = \mathbb{D}_1$.

Теорема 3. *Пусть оператор* A *имеет плотную в* $\mathcal{X}$ *область определения* ($\overline{D(A)} = \mathcal{X}$). *Тогда*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathbb{A}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{A}).$$

Теорема 4. *Оператор $\mathcal{A} : D(A^2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A) \subset \mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2$. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то обратим оператор $\mathbb{A}$ и обратный к нему оператор $\mathbb{A}^{-1} \in \operatorname{End} \mathcal{X}^2$ определяется матрицей*

$$\begin{pmatrix} (A-\lambda_0 I)^{-1} - \mathcal{A}^{-1}\left((B_2+\lambda_0 B_1+\lambda_0^2 I)(A-\lambda_0 I)^{-1}+\lambda_0 I\right) & \mathcal{A}^{-1} \\ \lambda_0(A-\lambda_0 I)^{-1} - A\,\mathcal{A}^{-1}\left((B_2+\lambda_0 B_1+\lambda_0^2 I)(A-\lambda_0 I)^{-1}+\lambda_0 I\right) & A\,\mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где λ_0 — любое число из резольвентного множества $\rho(A)$ оператора A.

Замечание 1. Если банахово пространство функций $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ выбрано как в условиях теоремы 1, то оператор дифференцирования $A = D$ имеет плотную в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ область определения $\mathcal{F}^1(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, теорема 1 следует из теоремы 3. Из включения спектра $\sigma(D)$ оператора дифференцирования в множество $i\mathbb{R}$ (см. [1]) следует, что теорема 2 вытекает из теоремы 4.

Замечание 2. Пусть банахово пространство $\mathcal{X}$ совпадает с одним из банаховых пространств $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X), p \in [1, \infty]$, двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства X с нормой

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p\right)^{1/p}, \quad x \in l^p, p \in [1, \infty)$$

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in l^\infty.$$

Через A обозначим оператор сдвига последовательностей из $l^p : A \in \operatorname{End} l^p$, $(Ax)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$.

Рассмотрим разностный оператор второго порядка вида (7), где $\mathcal{A}$ — оператор сдвига в l^p, $B_1, B_2 \in \operatorname{End} l^p$ — операторы умножения в l^p на операторные функции $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in l^\infty(\mathbb{Z}, \operatorname{End} X)$. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ совпадает с окружностью $\pi = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, и поэтому $\rho(A) \neq \varnothing$. Следовательно, для разностного оператора $\mathcal{A}$ имеет место теоремы 1 и 2. Поскольку оператор сдвига A обратим, то обратный $\mathbb{A}^{-1} \in \operatorname{End} l^p$ и он определяется матрицей (в формуле (9) следует положить $\lambda_0 = 0 \in \rho(A)$)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(A+\mathcal{B}_1) & \mathcal{A}^{-1} \\ A\mathcal{A}^{-1}(A+\mathcal{B}_1) - I & A\mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Замечание 3. К операторам вида (7) относится интегрально-дифференциальный оператор второго порядка

$$\begin{gathered} \mathcal{A} : C_b^2(\mathbb{R}, X) \subset C_b(\mathbb{R}, X) \to C_b(\mathbb{R}, X), \\ \mathcal{A} = D^2 + \mathcal{B}_1 D + \mathcal{B}_2, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — операторы свертки

$$(\mathcal{B}_k x)(t) = (\mu_k * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)\mu_k d\tau,\ t \in \mathbb{R},$$

с операторнозначными борелевскими мерами μ_k, $k = 1, 2$, ограниченной вариации. В частности, к такому классу операторов относятся разностные операторы $\mathcal{B}_k$, $k = 1, 2$ вида:

$$(\mathcal{B}_k x)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{j,k}(t) x(t + h_{j,k}), \quad t \in \mathbb{R}, x \in C_b(\mathbb{R}, X),$$

$$C_{j,k} \in C_b(\mathbb{R}, \operatorname{End} X), j \in \mathbb{N}, k = 1, 2,$$

для которых выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|C_{j,k}\|_{\infty} < \infty.$$

Если $h_{j,k} \leqslant 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2$, то оператор $\mathcal{A}$ является дифференциальным оператором с запаздывающим аргументом. Таким же будет и сопоставляемый оператору $\mathcal{A}$ дифференциально-разностный оператор первого порядка

$$\mathbb{A} : C_b^1(\mathbb{R}, X^2) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X^2) \to C_b(\mathbb{R}, X^2),$$

$$\mathbb{A}x = x + \mathbb{B}x, \quad x \in C_b^1(\mathbb{R}, X^2) \simeq C_b^1(\mathbb{R}, X) \times C_b^1(\mathbb{R}, X),$$

где разностный оператор $\mathbb{B}$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_1 \end{pmatrix}$, т. е. разностный оператор $\mathbb{B}$ имеет вид:

$$(\mathbb{B}x)(t) = \left(-x_2(t), \sum_{j=1}^{\infty} C_{j,2}(t) x_1(t + h_{j,2}) + \sum_{j=1}^{\infty} C_{j,1}(t) x_2(t + h_{j,1}) \right).$$

Из теоремы 4 следует, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ одновременно обратимы. Таким образом, для исследования оператора (11) с разностными операторами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ может быть использован ряд известных результатов об условиях обратимости дифференциально-разностных операторов первого порядка, в том числе дифференциальных операторов запаздывающего типа.

Теоремы 1, 2 позволяют для изучения дифференциального оператора D_2 существенно использовать ряд известных результатов об условиях обратимости дифференциальных операторов первого порядка [1]-[7]. Изучение дифференциальных операторов первого порядка осуществляется с использованием ряда выписанных далее понятий (см. [1]-[7]).

Далее рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + B(t)x = 0, \tag{12}$$

где $B \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathrm{End} X)$. Пусть $U : \mathbb{R} \to \mathrm{End} X$ — операторная функция Коши, т. е. U непрерывная в равномерной операторной топологии функция, почти всюду дифференцируемая, и $U'(t) = B(t)U(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Далее рассматривается семейство

$$\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{End} X,\ \mathcal{U}(t, s) = U(t)U^{-1}(s), \quad t, s \in \mathbb{R} \tag{13}$$

эволюционных операторов.

Определение 3. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на подмножестве $\mathbb{J}$ из $\mathbb{R}$, если существует ограниченная непрерывная в равномерной топологии проектнозначная функция $P : \mathbb{R} \to \mathrm{End} X$ и постоянные $M \geqslant 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены следующие свойства:

1) $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s), \quad t \geqslant s, t, s \in \mathbb{J}$;

2) $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leqslant M \exp(-\gamma(t - s))$ для $s \leqslant t, \quad t, s \in \mathbb{R}$;

3) для $s < t, \quad t, s \in \mathbb{J}$, сужение $\mathcal{U}_{t,s} : X'(s) \to X'(t)$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на область значений $X'(s) = \mathrm{Im} Q(s)$ дополнительного к $P(s)$ проектора $Q(s) = I - P(s)$ есть изоморфизм подпространств $X'(s)$ и $X'(t) = \mathrm{Im} Q(t)$ (мы полагаем оператор $\mathcal{U}(s, t) \in \mathrm{End} X$, равным $\mathcal{U}_{t,s}^{-1}$ на $X'(t)$ и равный нулевому на $X'(t) = \mathrm{Im} P(t) \subset X$);

4) $\|\mathcal{U}(s, t)\| \leqslant M \exp \gamma(s - t)$ для всех $t \geqslant s$ из $\mathbb{J}$.

Пару проектнозначных функций $P, Q : \mathbb{J} \to \mathrm{End} X$, участвующих в определении 3, назовем *расщепленной парой* для семейства $\mathcal{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathcal{U}$ имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на множестве $\mathbb{J}$.

Наряду с однородным дифференциальным уравнением (12) рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X). \tag{14}$$

Это уравнение запишем в виде

$$Lx = f,$$

где

$$L = \frac{d}{dt} + B : D(L) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \tag{15}$$

с областью определения $D(L)$, построение которой осуществляется с помощью семейства $\mathcal{U}$ эволюционных операторов (см. [1], [6]). В работах [10], [1], [6] установлена

Теорема 5. *Для того, чтобы дифференциальный оператор $L : D(L) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ был обратим необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{End}X$ допускало экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$. Если оператор L обратим, то оператор $L^{-1} \in \mathrm{End}\,\mathcal{F}$ определяется формулой*

$$(L^{-1}y)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,s)y(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{F},$$

где функция Грина $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathrm{End}X$ имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} \mathcal{U}(t,s)P(s), & s \leqslant t, \\ -\mathcal{U}(t,s)Q(s), & s > t, (t,s) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

В этой формуле P, Q — расщепляющая пара для семейства $\mathcal{U}$.

Вернемся к рассмотрению дифференциального оператора второго порядка D_2.

Теорема 6. *Дифференциальный оператор D_2 вида (4), обратим тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{End}X^2$, построенное по операторной функции Коши $U : \mathbb{R} \to \mathrm{End}X^2$, для которой $\dot{U}(t) = \mathbb{A}(t)U(t), t \in \mathbb{R}, U(0) = I$, оператор $\mathbb{A}(t)$ определяется матрицей вида (3), допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$.*

Утверждение теоремы 6 следует из теорем 2 и 5.

Вернемся к рассмотрению дифференциального оператора L вида (15) и семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{End}\mathcal{X}$, построенных по операторной функции $B : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\mathcal{X}$.

Предположение 1. Существуют числа $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$, такие, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ с расщепляющими парами проектнозначных функций

$$P_-, Q_- : (-\infty, a] \to \mathrm{End}\mathcal{X}, \quad P_+, Q_+ : [b, \infty) \to \mathrm{End}\mathcal{X}.$$

В условиях предположения 1 введем в рассмотрение линейный оператор

$$\mathcal{N}_{b,a} : \mathrm{Im}Q_-(a) \to \mathrm{Im}Q_+(b), \quad \mathcal{N}_{b,a}x = Q_+(b)\mathcal{U}(b,a)x,\ x \in \mathrm{Im}Q_-(a).$$

Этот оператор был определен в статьях [3], [6] и назван узловым. Важность его рассмотрения обусловлена тем, что он действует между подпространствами "фазового"пространства $\mathcal{X}$, а не $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Теорема 7. [6, теорема 1.12]. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}L = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\mathcal{N}.$$

В частности, оператор L фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}$. Если оператор $\mathcal{N}_{b,a}$ фредгольмов, то

$$\dim \mathrm{Ker} L = \dim \mathrm{Ker}\, \mathcal{N}_{b,a}, \quad \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, L = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, \mathcal{N}_{b,a},$$

$$\mathrm{ind}\, L = \mathrm{ind}\, \mathcal{N}_{b,a}.$$

Теорема 8. [6, теорема 5.4]. *Пусть выполнено предположение 1 при $Q_{\pm} = 0$. Тогда оператор L обратим.*

В условиях следующей теоремы, будем полагать, что существуют (в равномерной операторной топологии) пределы

$$\lim_{t \to \mp\infty} B_1(t) = B_1^{\mp} \in \mathrm{End} X, \quad \lim_{t \to \mp\infty} B_2(t) = B_2^{\mp} \in \mathrm{End} X \tag{16}$$

для функций B_1, B_2, определяющих дифференциальный оператор второго порядка $D_2 : \mathcal{F}^2(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. При этом предполагается, что функции B_1, B_2 принадлежат пространству $C_b(\mathbb{R}, \mathrm{End} X)$. Спектры $\sigma(\mathbb{B}^{\mp})$ операторов $\mathbb{B}^{\mp} \in \mathrm{End} X^2$ определяемые операторными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2^{\mp} & B_1^{\mp} \end{pmatrix}$ совпадает со спектром соответствующего операторного пучка $\mathcal{B}^{\mp}(\lambda) = \lambda^2 I - B_1^{\mp}\lambda + B_2^{\mp}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Отметим, что по определению

$$\sigma(\mathbb{B}^{\mp}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{B}^{\mp}(\lambda) - \text{ необратимый оператор в алгебре } \mathrm{End} X\}.$$

В свою очередь равенства $\sigma(\mathbb{B}^{\mp}) = \sigma(\mathcal{B}^{\mp})$ непосредственно следуют из теоремы 1.

Теорема 9. *Дифференциальный оператор $D_2 : \mathcal{F}^{(2)}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обратим, если спектры $\sigma(\mathcal{B}^{\mp})$ пучков $\mathcal{B}^{\mp}$ лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$.*

Теорема 10. *Пусть X — конечномерное пространство. Оператор $\mathcal{D}_2 : \mathcal{F}^{(2)} \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{End} X^2$, построенных равенствами (13) по операторной функции $U : \mathbb{R} \to \mathrm{End} X^2$, из условий теоремы 5, удовлетворяет условиям предположения 1.*

Теорема 11. *Пусть для функций $B_1, B_2 \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{End} X)$ выполнены условия (16), операторы $\mathcal{B}_1(t), \mathcal{B}_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, компактны и $\sigma(\mathbb{B}^{\pm}) \cap (i\mathbb{R}) = \varnothing$. Тогда оператор $D_2 : \mathcal{F}^{(2)} \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ фредгольмов.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 4. Пусть оператор $\mathcal{A}$ обратим. Вначале докажем инъективность оператора $\mathbb{A}$, т. е. установим равенство $Ker\mathbb{A} = \{0\}$, где $Ker\mathbb{A} = \{y = (y_1, y_2) \in D(\mathbb{A}) \mid \mathbb{A}y = 0\}$. Пусть $y = (y_1, y_2) \in Ker\mathbb{A}$. Тогда $Ay_1 - y_2 = 0$, $B_2 y_1 + (A + B_1) y_2 = 0$ и, следовательно, $y_1 \in D(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A} y_1 = 0$, т. е. $y_1 \in Ker\mathcal{A} = \{0\}$. Поэтому $y_2 = 0$, и $y = (y_1, y_2) = 0$, таким образом, $Ker\mathbb{A} = \{0\}$.

Проверим теперь, что оператор $\mathbb{A}$ сюръективен. Рассмотрим уравнение $\mathbb{A}y = f$, где $f = (f_1, f_2)$ — произвольная функция из $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \simeq C_b \times C_b$. Пусть λ_0– любое комплексное число с $Re\lambda_0 \neq 0$. Тогда оператор $A - \lambda_0 I$ обратим в C_b (см. [1], [10]), а оператор $\mathcal{A}$ допускает представление в виде

$$\mathcal{A} = (A - \lambda_0 I)^2 + (B_1 + 2\lambda_0 I)(A - \lambda_0 I) + B_2 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 I.$$

Непосредственно проверяется, что уравнение $\mathbb{A}y = f$ разрешимо и его решение $y = (y_1, y_2) \in C_b \times C_b$ имеет вид

$$y_1 = ((A - \lambda_0 I)^{-1} - \mathcal{A}^{-1}(B_2 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 I)(A - \lambda_0 I)^{-1} + \lambda_0 I) f_1 + \mathcal{A}^{-1} f_2),$$

$$y_2 = (\lambda_0(A-\lambda_0 I)^{-1} - A\mathcal{A}^{-1}((B_2+\lambda_0 B_1+\lambda_0^2 I)(A-\lambda_0 I)^{-1}+\lambda_0 I)f_1) + A\mathcal{A}^{-1}f_2).$$

Очевидно, что $y_k \in D(\mathbb{A})$, $k=1,2$.

Из указанного представления решения следует, что обратный к оператору $\mathbb{A}$ задаётся матрицей (9).

Пусть теперь обратим оператор $\mathbb{A}$. Проверим, что оператор $\mathcal{A}$ инъективен. Пусть $x \in Ker\mathcal{A}$. Покажем, что $x=0$. Заметим, что $(x,Ax) \in D(\mathbb{A}) = C_b^{(1)} \times C_b^{(1)}$ и $\mathbb{A}(x,Ax) = (Ax - Ax, B_2x + (A+B_1)Ax) = (0,\mathcal{A}x) = (0,0)$. Из инъективности оператора $\mathbb{A}$ следует, что $x=0$.

Докажем сюръективность оператора $\mathcal{A}$. Рассмотрим уравнение $\mathcal{A}x = g$, где g — произвольная функция из C_b. Из обратимости оператора $\mathbb{A}$ следует, что существует решение $y=(x_1,x_2)\in C_b^{(1)}\times C_b^{(1)}$ уравнения $\mathbb{A}y=(0,g)$. Таким образом, имеют место равенства

$$Ax_1 - x_2 = 0,\ Ax_2 + B_2x_1 + B_1x_2 = g.$$

Следовательно, $x_1 \in C_b^{(2)} = D(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}x_1 = g$, что и доказывает сюръективность оператора $\mathcal{A}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Функциональный анализ и его приложения. — 1996. — Т. 30, вып. 3. — С. 1–11.

2. Баскаков, А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов / А. Г. Баскаков // Математические заметки. — 1996. — Т. 59, вып. 6. — С. 586–593.

3. Баскаков, А. Г. Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов / А. Г. Баскаков // Математические заметки. — 2000. — Т. 6, вып. 6. — С. 816–827.

4. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов // Сибирский математический журнал. — 2001. — Т. 42, вып. 6. — С. 1231–1243.

5. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Известия РАН, серия Математика. — 2009. — Т. 7, вып. 2. — С. 3–68.

6. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

7. Баскаков, А. Г. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка / А. Г. Баскаков, А.Ю. Дуплищева // Известия РАН, серия Математика. — 2015. — Т. 79, вып. 2. — С. 3–20.

8. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, вып. 11. — С. 3–35.

9. Данфорд Н. Линейные операторы : Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — Москва : Изд-во Иностр. лит., 1962. — 895 с.

10. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — Москва : Наука, 1970. — 536 с.

REFERENCES

1. Baskakov A.G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. [Baskakov A.G. Polugruppy raznostnyx operatorov v spektral'nom analize linejnyx

differencial'nyx operatorov]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional Analysis and Its Applications*, 1996, vol. 30, no. 3, pp. 1–11.

2. Baskakov A.G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. [Baskakov A.G. Linejnye differencial'nye operatory s neogranichennymi operatornymi koe'fficientami i polugruppy raznostnyx operatorov]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593.

3. Baskakov A.G. Invertibility and the fredholm property of difference operators. [Baskakov A.G. Ob obratimosti i fredgol'movosti raznostnyx operatorov]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2000, vol. 67, no. 6, pp. 816–827.

4. Baskakov A.G., Pastukhov A.I. Spectral Analysis of a Weighted Shift Operator with Unbounded Operator Coefficients. [Baskakov A.G., Pastuxov A.I. Spektral'nyj analiz operatora vzveshennogo sdviga s neogranichennymi operatornymi koe'fficientami]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 6, pp. 1231–1243.

5. Baskakov A.G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz differencial'nyx operatorov s neogranichennymi operatornymi koe'fficientami, raznostnye otnosheniya i polugruppy raznostnyx otnoshenij]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 3–68.

6. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie linejnyx differencial'nyx uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyx operatorov i linejnyx otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

7. Baskakov A.G., Duplishcheva A.Yu. Difference operators and operator-valued matrices of the second order. [Baskakov A.G., Duplishheva A.Yu. Raznostnye operatory i operatornye matricy vtorogo poryadka]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 3–20.

8. Baskakov A.G., Chernyshov K.I. Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups. [Baskakov A.G., Chernyshov K.I. Spektral'nyj analiz linejnyx otnoshenij i vyrozhdennye polugruppy operatorov]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 11, pp. 3–35.

9. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators, V. I: General theory. [Danford N., Shvarc Dzh.T. Linejnye operatory, T. I: Obshhaja teorija]. Moscow, 1962, 896 p.

10. Daleckij Ju.L., Krejn M.G. Stability of solutions of differential equations in a Banach space. [Daleckij Ju.L., Krejn M.G. Ustojchivost' reshenij differencial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1970, 536 p.

Кабанцова Лариса Юрьевна, преподаватель кафедры нелинейных колебаний факультета ПММ ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: dlju@yandex.ru
Тел.: +7(905)–049–31–41

Kabantsova Larisa Yur'evna, lecturer of the Department of nonlinear oscillations, faculty of MMP VSU, Voronezh, Russia
E-mail: dlju@yandex.ru
Tel.: +7(905)–049–31–41