УДК 517.977

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ*

М. Б. Зверева, М. И. Каменский, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2017 г.

Аннотация. В настоящей работе мы исследуем краевые задачи, описывающие колебательные процессы с нелинейным условием. Такого рода задачи возникают при моделировании колебаний струны, движение которой ограничено втулкой, сосредоточенной в одной точке. Мы рассматриваем случаи, когда втулка сосредоточена на конце отрезка и в узле графа - звезда. Основной целью исследования является получение явного вида для внешних воздействий, обеспечивающих переход колебательного процесса из начального состояния в заданное финальное состояние за малый промежуток времени. Получены аналоги формулы Даламбера. Проанализирован ряд задач управления и получено явное выражение для управляющих функций.

Ключевые слова: волновое уравнение, колебания струны, задача управления, геометрический граф.

A MATHEMATICAL MODEL OF STRING OSCILLATIONS WITH NONLINEAR CONDITION

M. B. Zvereva, M. I. Kamenskii, S. A. Shabrov

Abstract. In the present paper we investigate the initial–boundary value problems describing oscillation processes with a nonlinear condition. This kind of problems arises in a simulation of string oscillations, where the movement is restricted by a sleeve concentrated at one point. We consider the cases when the sleeve is located at the end of a segment and at the node of a graph-star. The main purpose of the research is to obtain an explicit form of external influences, allowing to put the process of oscillations from the initial state to the final state for a small period of time. Analogues of the d'Alembert formula are obtained. Some control problems are analyzed and explicit forms of control functions are presented.

Keywords: wave equation, string oscillations, control problem, geometric graph.

Задачам граничного управления и их оптимизации посвящены работы многих математиков, среди которых Ильин В. А., Моисеев Е. И., Егоров А. И., Знаменская Л. Н., Боровских А. В., Провоторов В. В. [1–6]. При изучении таких задач, в первую очередь, исследуются условия, при которых колебательный процесс под воздействием некоторого граничного управления может быть переведен из состояния, определяемого начальными условиям, в заданное финальное состояние. В настоящей работе изучается начально–краевая задача, описывающая колебательные процессы с нелинейным условием и краевым условием третьего рода. Такого рода задача возникает при моделировании колебаний струны, движение которой на одном из концов ограничено втулкой. Другой конец струны предполагается упруго закрепленным. Получен явный вид функции граничного управления для случая, когда время колебаний не превышает длины струны.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

1. Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ натянута струна, отклонение которой от положения равновесия определяется функцией $u(x, t)$. Предположим, что левый конец струны упруго закреплен с помощью пружины, т. е. выполнено условие $u'_x(0, t) = \gamma u(0, t)$. Правый конец струны скользит (без учета трения) по вертикальной спице внутри втулки, представляющей собой отрезок $[-h, h]$, где $h > 0$. Пока $|u(l, t)| < h$, правый конец струны внутри втулки остается свободным, что может быть выражено условием $u'_x(l, t) = 0$ [7]. Когда струна касается граничной точки втулки, то некоторое время должно быть выполнено условие $u(l, t) = h$, либо $u(l, t) = -h$ соответственно.

Заметим, что в общей ситуации, мы допускаем случай, когда втулка сама может двигаться в перпендикулярном к оси Ox направлении так, что ее движение задается отображением

$$C(t) = [-h, h] + \xi(t). \tag{1}$$

Предположим, что в начальный момент времени скорость струны нулевая, а форма струны задается функцией $\varphi \in W_2^1[0, l]$. Причем, $\varphi'_x(0) = \gamma\varphi(0)$, $\varphi(l) \in C(0)$.

Математическая модель такой задачи может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u'_x(0, t) = \gamma u(0, t), \\ u(l, t) \in C(t) \\ -u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t)). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь множество $N_C(a)$ — конус нормалей к C в точке a, определяемый как

$$N_C(a) = \{\xi \in R^1 : \xi \cdot (c - a) \leqslant 0 \forall c \in C\}.$$

Заметим, что если a — внутренняя точка множества C, то $N_C(a) = \{0\}$; если $a = -h + \xi(t)$, то $N_C(a) = (-\infty, 0]$; если $a = h + \xi(t)$, то $N_C(a) = [0, +\infty)$.

Условие $-u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$ означает, что если $u(l, t)$ — внутренняя точка $C(t)$, то $u'_x(l, t) = 0$, т. е. колебательный процесс происходит как у струны со свободным правым концом; как только происходит соприкосновение струны с граничной точкой втулки, правый конец струны перестает быть свободным: на него со стороны втулки действует сила $f(t)$, так что $-u'_x(l, t) = -f(t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$.

Решение задачи (2) понимается в обобщенном смысле в классе функций, впервые введенном В. А. Ильиным в работах [1], [2]. Обозначим через Q_T прямоугольник $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times \times [0 \leqslant t \leqslant T]$. Как и в [1], [2] будем говорить, что $u(x, t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если функция $u(x, t)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Q_T и имеет в этом прямоугольнике обе обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \leqslant x \leqslant l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0, T]$ и классу $L_2[0 \leqslant t \leqslant T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0, l]$. Решением задачи (2) назовем функцию $u \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую для всех t условию $u(l, t) \in C(t)$, почти всюду условию $-u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$, а также интегральному тождеству

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u(x, t)[\Psi_{tt}(x, t) - \Psi_{xx}(x, t)]\, dxdt + \int\limits_0^l \Psi'_t(x, 0)\varphi(x) dx -$$

$$-\int\limits_0^T \Psi(l,t)u'_x(l,t)\,dt + \int\limits_0^T \Psi'_x(l,t)u(l,t)\,dt = 0 \quad (3)$$

для любой $\Psi \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\Psi'_x(0,t) = \gamma\Psi(0,t)$, $\Psi(x,T) = 0$, $\Psi_t(x,T) = 0$.

Теорема 1. *Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда при $0 \leqslant t \leqslant T < l$ решение задачи (2) может быть представлено в виде*

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x-t) + \Phi(x+t)}{2}, \quad (4)$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \in [0,l] \\ 2g(x-l) + \varphi(2l-x) - 2\varphi(l), x \in [l, l+T] \\ \varphi(-x) - 2\gamma e^{\gamma x} \int\limits_0^{-x} \varphi(s)e^{\gamma s}\,ds, x \in [-l,0]; \end{cases}$$

$g(t)$ — решение задачи

$$-v'_1(t) \in N_{D(t)}(v_1(t)), v_1(0) = \varphi(l) \in D(0), \quad (5)$$

$D(t) = C(t) + \int\limits_0^t \varphi'(l-s)\,ds.$

Доказательство. Рассмотрим задачу (5). Воспользуемся теоремами 2, 3 из [8], согласно которым существует единственная абсолютно непрерывная функция $g(t)$, определенная на всем $[0,T]$, являющаяся решением задачи (5), причем, существует константа L^* такая, что $|g'(t)| \leqslant L^*$ для п. в. $t \in [0,T]$.

Покажем, что $u(x,t)$ из (4) — решение задачи (2). Проверим, что $u(l,t) \in C(t)$. Поскольку $g(t) \in D(t)$, $D(t) = C(t) + \varphi(l) - \varphi(l-t)$, $u(l,t) = g(t) + \varphi(l-t) - \varphi(l)$, то $u(l,t) \in C(t)$.

Покажем, что $-u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$. Заметим, что $u'_x(l,t) = g'(t)$. Значит, надо убедиться, что $-g'(t) \in N_{C(t)}(g(t) + \varphi(l-t) - \varphi(l))$. Так как $-g'(t) \in N_{D(t)}(g(t))$, то $-g'(t)(c(t) - \varphi(l-t) + \varphi(l) - g(t)) \leqslant 0$ для всех $c(t) \in C(t)$. Значит, $-g'(t) \in N_{C(t)}(g(t) + \varphi(l-t) - \varphi(l))$.

Покажем справедливость равенства (3). Имеем

$$\int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T u(x,t)\Psi_{tt}(x,t)\,dt \right) dx - \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^l u(x,t)\Psi_{xx}(x,t)\,dx \right) dt +$$

$$+ \int\limits_0^l \Psi'_t(x,0)\varphi(x)\,dx - \int\limits_0^T \Psi(l,t)u'_x(l,t)dt + \int\limits_0^T \Psi'_x(l,t)u(l,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^l \big(u(x,T)\Psi'_t(x,T) - u(x,0)\Psi'_t(x,0)\big)\,dx - \int\limits_0^l \int\limits_0^T u'_t\Psi'_t\,dtdx -$$

$$-\int\limits_0^T \big(\Psi'_x(l,t)u(l,t) - \Psi'_x(0,t)u(0,t)\big)\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^l u'_x\Psi'_x\,dxdt + \int\limits_0^l \Psi'_t(x,0)\varphi(x)\,dx - \int\limits_0^T \Psi(l,t)u'_x(l,t)\,dt + \int\limits_0^T \Psi'_x(l,t)u(l,t)\,dt.$$

С учетом условий на функции $u(x,t)$ и $\Psi(x,t)$ нужно доказать, что

$$\int_0^T\int_0^l u'_x\Psi'_x\,dxdt-\int_0^T\int_0^l u'_t\Psi'_t\,dxdt=\int_0^T\Psi(l,t)u'_x(l,t)\,dt-\gamma\int_0^T\Psi(0,t)u(0,t)\,dt.$$

Воспользуемся представлением (4). Имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l(\Phi'(x-t)+\Phi'(x+t))\Psi'_x\,dxdt-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^T(\Phi'(x+t)-\Phi'(x-t))\Psi'_t\,dtdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l\big(\Psi'_x(x,T)(\Phi(x+T)-\Phi(x-T))-\Psi'_x(x,0)(\Phi(x)-\Phi(x))\big)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^T(\Phi(x+t)-\Phi(x-t))\Psi_{xt}\,dtdx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\big(\Psi'_t(l,t)(\Phi(l+t)-\Phi(l-t))-\Psi'_t(0,t)(\Phi(t)-\Phi(-t))\big)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^T(\Phi(x+t)-\Phi(x-t))\Psi_{xt}\,dtdx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^T\Psi'_t(l,t)(\Phi(l+t)-\Phi(l-t))\,dt+\frac{1}{2}\int_0^T\Psi'_t(0,t)(\Phi(t)-\Phi(-t))\,dt=$$

$$=\int_0^T\Psi'_t(l,t)(\varphi(l)-g(t)))dt+\gamma\int_0^T\Psi'_t(0,t)e^{-\gamma t}\int_0^t\varphi(s)e^{\gamma s}\,dsdt=$$

$$=\int_0^T\Psi'_t(l,t)(\varphi(l)-g(t)))dt-\gamma\int_0^T\Psi(0,t)(\varphi(t)-\gamma e^{-\gamma t}\int_0^t\varphi(s)e^{\gamma s}ds)\,dt.$$

С другой стороны,

$$\int_0^T\Psi(l,t)u'_x(l,t)\,dt-\gamma\int_0^T\Psi(0,t)u(0,t)\,dt=$$

$$=\int_0^T\Psi'_t(l,t)(\varphi(l)-g(t))dt-\gamma\int_0^T\Psi(0,t)(\varphi(t)-\gamma e^{-\gamma t}\int_0^t\varphi(s)e^{\gamma s}\,ds)\,dt.$$

что и требовалось.

Замечание. Заметим, что решение задачи (2) единственно. В самом деле, если $\varphi(l)\in(-h+\xi(0),h+\xi(0))$, то для всех $t\in[0,t_1]$ процесс колебаний происходит как у струны со свободным концом правым концом и упруго закрепленным левым концом, т. е. форма струны является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < t_1 \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u'_x(0,t) = \gamma u(0,t), \\ u'_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

Как известно ([1], [2]), последняя задача имеет единственное решение $u(x,t)$. Если $t_1 < T$, то в момент времени t_1 выполняется условие $u(l,t_1) = -h + \xi(t)$ либо $u(l,t_1) = h + \xi(t)$, и для $t \in [t_1, t_2]$ форма струны является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, t_1 < t < t_2 \\ v(x,t_1) = u(x,t_1), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t_1) = u'_t(x,t_1), \\ v'_x(0,t) = \gamma v(0,t), \\ v(l,t) = -h + \xi(t) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, t_1 < t < t_2 \\ v(x,t_1) = u(x,t_1), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t_1) = u'_t(x,t_1), \\ v'_x(0,t) = \gamma v(0,t), \\ v(l,t) = h + \xi(t). \end{cases}$$

Последние задачи также имеют единственное решение на $[t_1, t_2]$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что исходная задача может иметь лишь единственное решение.

2. Рассмотрим теперь задачу граничного управления

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ -u'_x(0,t) + \gamma u(0,t) = \mu(t) \\ u(l,t) \in C(t) \\ -u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)). \end{cases} \tag{6}$$

в которой $\varphi \in W_2^1[0,l]$, $\mu \in L^2[0,T]$. Решением задачи (6) назовем функцию $u(x,t) \in \widehat{W_2^1}(Q_T)$, удовлетворяющую для всех t условию $u(l,t) \in C(t)$, почти всюду условию $-u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$, а также интегральному тождеству

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u(x,t)[\Psi_{tt}(x,t) - \Psi_{xx}(x,t)]\,dxdt + \int\limits_0^l \Psi'_t(x,0)\varphi(x)\,dx -$$

$$- \int\limits_0^T \Psi(l,t)u'_x(l,t)\,dt + \int\limits_0^T \Psi'_x(l,t)u(l,t)\,dt - \int\limits_0^T \Psi(0,t)\mu(t)\,dt = 0 \tag{7}$$

для любой $\Psi \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\Psi'_x(0,t) = \gamma\Psi(0,t)$, $\Psi(x,T) = 0$, $\Psi_t(x,T) = 0$. Задача граничного управления заключается в поиске функции $\mu(t)$ такой, чтобы в момент времени T оказались выполнены условия

$$u(x,T) = \varphi^*(x), \quad u'_t(x,T) = \psi^*(x),$$

где $\varphi^* \in W_2^1[0,l]$, $\psi^* \in L_2[0,l]$. Найдем решение задачи (6) в случае, когда $T < l$. Будем дополнительно предполагать, что $|\xi(t)| \leqslant h$.

Рассмотрим сначала задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ -u'_x(0,t) + \gamma u(0,t) = \mu(t), \\ u(l,t) \in C(t) \\ -u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)). \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что функция $u(x,t) = e^{\gamma(x-t)} \int\limits_0^{t-x} e^{\gamma s}\underline{\mu}(s)\,ds$, где $\underline{\mu}(t) = \mu(t)$, если $t \geqslant 0$, $\underline{\mu}(t) = 0$, если $t < 0$, является решением задачи (8).

Заметим, что $u(l,t) = 0 \in C(t)$, так как $|\xi(t)| \leqslant h$. Аналогично, $u'_x(l,t) = 0 \in N_{C(t)}(0)$. Проверим выполнение равенства (7), где $\varphi(x) = 0$. Нам нужно доказать, что

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u(x,t)(\Psi_{tt}(x,t) - \Psi_{xx}(x,t))\,dxdt = \int\limits_0^T \Psi(0,t)\underline{\mu}(t)dt.$$

Последний вопрос сводится к доказательству равенства

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T (u'_x(x,t)\Psi'_x(x,t) - u'_t(x,t)\Psi'_t(x,t))\,dxdt + \gamma \int\limits_0^T u(0,t)\Psi(0,t)\,dt = \int\limits_0^T \Psi(0,t)\underline{\mu}(t)\,dt.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u'_x(x,t)\Psi'_x(x,t)\,dxdt = \int\limits_0^l \int\limits_0^T u(x,t)\Psi_{xt}(x,t)\,dxdt,$$

$$-\int\limits_0^l \int\limits_0^T u'_t(x,t)\Psi'_t(x,t)\,dxdt = -\int\limits_0^T u(0,t)\Psi'_t(0,t)\,dt - \int\limits_0^l \int\limits_0^T u(x,t)\Psi_{xt}(x,t)\,dxdt,$$

то остается доказать, что

$$-\int\limits_0^T u(0,t)\Psi'_t(0,t)\,dt + \gamma\int\limits_0^T u(0,t)\Psi(0,t)\,dt = \int\limits_0^T \Psi(0,t)\underline{\mu}(t)\,dt.$$

Выражение слева может быть переписано как

$$\int\limits_0^T (u'_t(0,t) + \gamma u(0,t))\Psi(0,t)\,dt = \int\limits_0^T (-\gamma e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}\underline{\mu}(s)\,ds + \underline{\mu}(t) + \gamma e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}\underline{\mu}(s)\,ds)\Psi(0,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Psi(0,t)\underline{\mu}(t)\,dt,$$

что и требовалось.

Аналогичным образом можно проверить, что функция $u(x,t) = e^{\gamma(x-t)} \int\limits_0^{t-x} e^{\gamma s}\underline{\mu}(s)\,ds + v(x,t)$, где $v(x,t)$ — решение задачи (2), является решением задачи (6). Этот факт позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть начальные и финальные данные задачи* (6) *связаны между собой равенствами*

$$\varphi(x) - \varphi^*(x-T) - \widehat{\psi^*}(x-T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$

$$-\widehat{\psi^*}(x+T) + \varphi(x) - \varphi^*(x+T) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l-T,$$

$$-\widehat{\psi^*}(x-T) + \varphi(2l-x) - \varphi^*(x-T) + 2g(x-l) \equiv 0, \quad l \leqslant x \leqslant l+T.$$

Здесь $\widehat{\psi^*}$ *обозначает первообразную для функции* ψ^**, подчиняющуюся равенству*

$$\varphi(x_0) - \varphi^*(x_0-T) - \widehat{\psi^*}(x_0-T), x_0 \in [T,l].$$

Тогда искомое граничное управление имеет вид

$$\mu(t) = \frac{1}{2}(\gamma\varphi^*(T-t) - \gamma\widehat{\psi^*}(T-t) - \varphi^{*'}(T-t) + \psi^*(T-t) - \varphi'(t) + \gamma\varphi(t)).$$

3. Исследуем теперь аналогичную задачу на геометрическом графе. Пусть точки O, A_1, A_2,…, A_n находятся в одной плоскости π. Рассмотрим механическую систему из n струн, которые в положении равновесия совпадают с отрезками OA_1, OA_2,…, OA_n. Концы струн упруго закреплены в точках A_1, A_2,…, A_n и соединены между собой в точке O. При этом через точку O внутри втулки проходит вертикальная спица. Граф Γ состоит из ребер (интервалов) OA_1, OA_2,…, OA_n и вершин O, A_1, A_2,…, A_n . Здесь и далее будем пользоваться понятиями и терминологией из [9]. Под действием силы, направленной перпендикулярно плоскости π, струны отклоняются от положения равновесия. Будем считать, что смещение всех точек происходит параллельно одной и той же прямой, перпендикулярно плоскости π. Введем систему координат. Ось абсцисс Ox_i для i-й струны ($i = 1, 2, \ldots, n$) содержит отрезок OA_i и имеет направление от A_i к O. Таким образом, граф ориентирован к узлу. Ось ординат OY проходит перпендикулярно плоскости π. Обозначим через $u_i(x,t)$ отклонение i-й струны от положения равновесия в момент времени t, где x — абсцисса рассматриваемой точки струны. Будем предполагать длины всех струн одинаковыми и равными l, т. е. $0 \leqslant x \leqslant l$.

Таким образом, колебания каждой из струн системы можно описать волновым уравнением $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$. Условие соединения струн между собой в узле означает, что $u_1(l,t) = u_i(l,t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Условия упругого закрепления означают, что $\dfrac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \gamma u_i(0,t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). В точке $x = l$ расположена втулка, движение которой в перпендикулярном к плоскости π направлении задается формулой (1), где функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию Липшица.

Предположим, что в начальный момент времени заданы форма каждой из струн и начальная скорость соответственно, т. е. $u_i(x,0) = \varphi_i(x)$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = 0$. Здесь $\varphi_i \in W_2^1[0,l]$, $\varphi_1(l) = \varphi_2(l) = \ldots = \varphi_n(l) = \varphi(l)$. Причем, $\varphi'_{ix}(0) = \gamma\varphi_i(0)$, $\varphi(l) \in C(0)$.

Тогда математическая модель изучаемой задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1{,}2{,}...n) \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = 0 \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)) \\ u(l,t) = u_1(l,t) = u_2(l,t) = \ldots = u_n(l{,}t) \\ u(l,t) \in C(t) \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \gamma u_i(0,t). \end{cases} \tag{9}$$

Решением задачи (4) назовем функцию $u(x,t)$, сужения которой на ребра совпадают с $u_i(x,t)$. Функции $u_i(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ и удовлетворяют для всех t условиям $u_1(l,t) = u_2(l,t) = \ldots = u_n(l,t) = u(l,t)$, $u(l,t) \in C(t)$, почти всюду условию $-\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$, а также интегральному тождеству

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^l \int\limits_0^T u_i(x,t)[\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2}(x,t)]\, dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^l \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(x{,}0)\varphi_i(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^T (u(l,t)\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}(l,t) - \Psi(l,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t))\, dt = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

для любых $\Psi_i \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}(0,t) = \gamma \Psi_i(0,t),$$

$\Psi_i(x,T) = 0$, $\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial t}(x,T) = 0$, $\Psi_1(l,t) = \ldots = \Psi_n(l,t) = \Psi(l,t)$.

Аналог формулы Даламбера для представления решения такой задачи может быть получен с помощью сведения к задаче на отрезке. Предположим, что решение последней задачи существует. Обозначим его через $v(x,t)$, где на каждом ребре графа Γ функция $v(x,t)$ определяется как $v_i(x,t)$.

Пусть $\widetilde{u}(x,t) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i(x,t)$. Тогда $\widetilde{u}(x,t)$ является решением уже изученной выше задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ \widetilde{u}(x,0) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x), \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,0) = 0, \\ -\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(\widetilde{u}(l,t)), \\ \widetilde{u}(l,t) \in C(t) \\ \widetilde{u}'_x(0,t) = \gamma \widetilde{u}(0,t). \end{cases}$$

Таким образом,

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{\Phi(x-t) + \Phi(x+t)}{2}.$$

Введем функции $\omega_i(x,t) = v_i(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Заметим, что $\omega_i(x,t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ являются решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1,2,\ldots,n), \\ \omega_i(x,0) = \varphi_i(x) - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j(x), \\ \dfrac{\partial\omega_i}{\partial t}(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial\omega_i}{\partial x}(0,t) = \gamma\omega_i(0,t), \\ \omega_i(l,t) = 0. \end{cases}$$

Для каждой функции ω_i мы имеем

$$\omega_i(x,t) = \frac{\Phi_i(x-t) + \Phi_i(x+t)}{2},$$

где

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j(x), x \in [0,l], \\ \varphi_i(-x) - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j(-x) - 2\gamma e^{\gamma x}\int\limits_0^{-x}(\varphi_i(s) - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j(s))e^{\gamma s}\,ds, x \in [-l,0], \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j(2l-x) - \varphi_i(2l-x), x \in [l,2l]. \end{cases}$$

Заметим, что $v_i(x,t) = \omega_i(x,t) + \widetilde{u}(x,t)$. Непосредственной подстановкой проверяется, что решение исходной задачи (9) имеет вид

$$v_i(x,t) = \frac{\Phi(x-t) + \Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi_i(x-t) + \Phi_i(x+t)}{2}.$$

Аналогично рассмотренному выше случаю можно изучить задачу граничного управления

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1,2,\ldots,n), \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = 0, \\ -\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)), \\ u(l,t) = u_1(l,t) = u_2(l,t) = \ldots = u_n(l,t), \\ u(l,t) \in C(t) \\ -\dfrac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) + \gamma u_i(0,t) = \mu_i(t). \end{cases} \tag{10}$$

состоящую в поиске функций $\mu_i(t)$ таких, чтобы

$$u_i(x,T) = \varphi_i^*(x), \quad (u_i)'_t(x,T) = \psi_i^*(x),$$

и при $T < l$ получить, что

$$\mu_i(t) = \frac{1}{2}(\gamma\varphi_i^*(T-t) - \gamma\widehat{\psi_i^*}(T-t) - {\varphi_i^*}'(T-t) + \psi_i^*(T-t) - \varphi_i'(t) + \gamma\varphi_i(t)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Успехи математических наук. — 2005. — Т. 60, вып. 6 (366). — С. 89–114.

2. Избранные труды В. А. Ильина : В 2-х томах : Том 2. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 692 с.

3. Егоров, А. И. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, вып. 1. — С. 85–92.

4. Егоров, А. И. Наблюдаемость колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами в точке соединения / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2011. — № 1. — С. 142–146.

5. Боровских, А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, вып. 1. — С. 64–89.

6. Провоторов, В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн / В. В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. — 2012. — Вып. 1. — С. 62–71.

7. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Изд–во МГУ, 1999. — 797 с.

8. Kunze, M. An introduction to Moreau's sweeping process / M. Kunze, M. Monteiro Marques // LNP. — 2000. — V. 551. — P. 1–60.

9. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

REFERENCES

1. Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimization of boundary controls of string vibrations. [Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimizaciya granichnyx upravlenij kolebaniyami struny]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 6 (366), pp. 89–114.

2. Selected works of V.A. Il'in: 2 volumes: V. 2. [Izbrannye trudy V.A. Il'ina: V 2-x tomax: Tom 2]. Moscow: MAKS Press, 2008, 692 p.

3. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. On the controllability of elastic oscillations connected in series objects with distributed parameters. [Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Ob upravlyaemosti uprugix kolebanij posledovatel'no soedinennyx ob'ektov s raspredelennymi parametrami]. *Trudy instituta matematiki i mexaniki UrO RAN — Supplement to Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 2011, vol. 17, iss. 1, pp. 85–92.

4. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Observability of oscillations of a network of related objects the distributed and concentrated parameters in the connection point. [Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Nablyudaemost' kolebanij seti iz svyazannyx ob'ektov s raspredelennymi i sosredotochennymi parametrami v tochke soedineniya]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2011, no. 1, pp. 142–146.

5. Borovskikh A.V. Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. [Borovskix A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoj strunoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, vol. 43, iss. 1, pp. 64–89.

6. Provotorov V.V. Construction of boundary controls in the problem of oscillation of a system of strings. [Provotorov V.V. Postroenie granichnyx upravlenij v zadache o gashenii kolebanij

sistemy strun]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 1, pp. 62–71.

7. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Equations of mathematical physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Moscow state University, 1999, 797 p.

8. Kunze M., Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. LNP 551, 2000, Springer, pp. 1–60.

9. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Каменский Михаил Игоревич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра функционального анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Kamenskii Mikhail Igorevich, Professor of the Department of functional analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Aleksandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90