УДК 517.958

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

А. В. Глушко, Е. А. Логинова, С. В. Пронина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.09.2016 г.

Аннотация. В работе строится решение задачи термоупругости, описывающей упругие деформации неоднородного материала с трещиной, представляющего собой плоскость R^2 с разрезом по отрезку $(-1;1)$ оси абсцисс. Для этого задача сводится к обобщенной с использованием специализированной δ функции и предельного перехода в пространстве обобщенных функций $D'(R^2)$. В процессе изучения задачи применяется преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье. Проверяется выполнение граничных условий «по непрерывности» и в смысле главного значения. Также в работе утверждается и доказывается, что при определенных условиях компоненты решения задачи являются непрерывными по совокупности переменных, ограниченными на любом компакте функциями. Основным результатом является построение асимптотик первых производных решения при стремлении к разрезу-трещине.

Ключевые слова: трещина, асимптотики, сингулярность, упругие деформации.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTION OF DERIVATIVES INHOMOGENEOUS ELASTIC DEFORMATION OF THE MATERIAL UNDER MECHANICAL LOADS

A. V. Glushko, E. A. Loginova, S. V. Pronina

Abstract. We construct the solution to the thermoelasticity problem describing the elastic deformations of an inhomogeneous material with a crack, which is modeling the plane with a cut along a segment of the abscissa axis. The solution of the thermoelasticity problem describing the elastic deformations of an inhomogeneous material in a plane with a crack that is a plane with a cut along a segment of the abscissa axis is constructed. To do this, we reduce the problem to a generalized one using the specialized δ function and the passage to the limit of generalized functions in space $D'(R^2)$. To solve the problem we use the Fourier transform and the inverse Fourier transform. We verify the boundary conditions «by continuity» and in the sense of the principal value. Also, in paper we affirm and prove that if there are some conditions the components of the solution of the problem are continuous functions, which are bounded on any compact set. The main result is the construction of the asymptotics of the first derivatives of the solution as it tends to a crack-cut.

Keywords: crack, asymptotics, singularity, elastic deformation.

Отметим, что работа является первой из двух статей, в дальнейшем планируется к публикации статья, посвященная задаче термоупругости [1].

В работе изучается задача (см. [1]), описывающая упругие деформации неоднородного материала в плоскости с трещиной:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0; \\ (\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

в области $R^2 \backslash l$, где $l = \{x = (x_1, x_2), |x_2 = 0, x_1 \in (-1; 1)\}$. На границе, имеющей вид разреза-трещины, заданы условия типа сопряжения (трансмиссии):

$$u(x_1; +0) - u(x_1; -0) = 0; \tag{2}$$

$$v(x_1; +0) - v(x_1; -0) = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x_1; +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1; -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1); \tag{4}$$

$$\frac{\partial v(x_1; +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(x_1; -0)}{\partial x_2} = q_2(x_1). \tag{5}$$

В условиях (1)–(5) $x_1 \in (-1; 1)$. В системе (1) и в условиях (2)–(5) $u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)$ — смещения точки (x_1, x_2) при деформации. Коэффициенты k, β введены в [1]. При этом зависимость коэффициента k от коэффициента Пуассона, возникающего в законах теории упругости известна и позволяет предполагать, что он ограничен и изменяется в интервале $(5/3; 3)$.

Определение 1. Решением задачи (1)–(5) назовем функцию-вектор$u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)$, принадлежащую множеству функций $C^2\left(\mathrm{R}^2/l\right)$ и удовлетворяющую системе уравнений (1) в области R^2/l, для которой при $x_1 \in (-1; 1)$ по непрерывности выполнены граничные условия (2)–(3), граничные условия (4), (5) выполнены в смысле главного значения, и такую, что функции $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, $\sqrt{(1 \pm x_1)^2 + x_2^2}\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $\sqrt{(1 \pm x_1)^2 + x_2^2}\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1, -x_2)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(x_1, -x_2)}{\partial x_2}$ и $(1 \pm x_1)\frac{\partial u(x_1;\, x_2)}{\partial x_1}$, $(1 \pm x_1)\frac{\partial v(x_1;\, x_2)}{\partial x_1}$ ограничены в окрестности трещины l.

Определение 2. Специализированной δ–функцией $\delta_{[-1,1]} \in D'\left(R^2\right)$ называем такую функцию, что для $q\left(x_1\right) \in C_{[-1,1]}$ и любой основной функции $\varphi\left(x_1\right) \in D\left(R^2\right)$ справедливо равенство

$$\left(q\left(x_1\right)\delta_{[-1,1]}, \varphi\left(x_1, x_2\right)\right) = \int\limits_{-1}^{1} q\left(x_1\right)\left(\delta\left(x_2\right), \varphi\left(x_1, x_2\right)\right) dx_1.$$

Если решение задачи (1)–(5) удовлетворяет условиям, наложенным на него в определении 1, удается свести эту задачу к обобщенной задаче в $S'(R^2)$ (см. [2]).

Теорема 1. Пусть $\{u, v\}$ решение исходной задачи. Пусть также функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ являются регулярными функционалами из пространства $S'(R)$. Тогда $\{u, v\}$ — является обобщенным решением из $S'\left(R^2\right)$ следующей обобщенной задачи.

$$(\kappa + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\kappa - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(\kappa - 1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \beta(\kappa - 1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = (\kappa - 1)q_1(x_1)\delta_{[-1,1]}; \tag{6}$$

$$(\kappa - 1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (\kappa + 1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(3 - \kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta(\kappa + 1)\frac{\partial v}{\partial x_2} = (\kappa + 1)q_2(x_1)\delta_{[-1,1]}. \tag{7}$$

Определение 3. Обобщенным решением обобщенной задачи назовем вектор-функцию $\{u(x), v(x)\}$ из $S'(R^2)$, удовлетворяющую системе уравнений (6)–(7).

Доказательство теоремы основано на использовании соотношений $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right\}$; $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\}$; $\frac{\partial u}{\partial x_2} = \left\{\frac{\partial^u}{\partial x_2}\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right\} + q_1\delta_{[-1,1]}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right\}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right\} + q_2\delta_{[-1,1]}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right\}$; $\frac{\partial v}{\partial x_1} = \left\{\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\}$; $\frac{\partial v}{\partial x_2} = \left\{\frac{\partial v}{\partial x_2}\right\}$ и является очевидным. Здесь через $\{.\}$ обозначена классическая производная исследуемой функции при $x \in R^2 \backslash l$.

Далее в работе рассматривается построение обобщенного решения.

Лемма 1. Пусть функции $q_k(x_1)$, где $k=1,2$, из условий (4), (5) являются регулярными функционалами из пространства $S'(R)$. Тогда справедливо следующее равенство

$$F_{x\to s}[q_k(x_1)\delta_{[-1,1]}]=\int\limits_{-1}^{1}q_k\left(x_1\right)e^{ix_1s_1}dx_1;\ \ k=1;2.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение произвольную функцию $\varphi(s_1,s_2)\in D(R^2)$. Тогда по свойствам преобразования Фурье, на основании определения функции $\delta_{[-1;1]}$ имеем

$$\left(F_{x\to s}[q_k(x_1)\delta_{[-1,1]}],\varphi(s_1,s_2)\right)=\left(q_k(x_1)\delta_{[-1,1]},F_{s\to x}[\varphi(s_1,s_2)]\right)=$$
$$=\int\limits_{-1}^{1}q_k(x_1)(\delta(x_2),F_{s\to x}[\varphi(s_1,s_2)])dx_1=\int\limits_{-1}^{1}q_k(x_1)\int\limits_{R^2}e^{i(x_1s_1+0\cdot s_2)}\varphi(s_1,s_2)ds_1ds_2dx_1=$$
$$=\int\limits_{R^2}\varphi(s_1,s_2)\left(\int\limits_{-1}^{1}q_k(x_1)e^{ix_1s_1}dx_1\right)ds_1ds_2,$$

откуда следует представление $F_{x\to s}\left[q_k(x_1)\delta_{[-1,1]}\right]=\int\limits_{-1}^{1}q_k(x_1)e^{ix_1s_1}dx_1$.

Введем обозначение

$$B=\begin{pmatrix}-\left(\kappa+1\right)s_1^2-\left(\kappa-1\right)s_2^2-i\beta\left(\kappa-1\right)s_2 & -2s_1s_2-i\beta\left(\kappa-1\right)s_1\\ -2s_1s_2-i\beta\left(3-\kappa\right)s_1 & -\left(\kappa-1\right)s_1^2-\left(\kappa+1\right)s_2^2-i\beta\left(\kappa+1\right)s_2\end{pmatrix}.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для решения $(u;v)$ задачи (1)–(5) справедливо следующее равенство

$$F_{x\to s}\begin{bmatrix}\left(\kappa+1\right)\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\left(\kappa-1\right)\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2v}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\left(\kappa-1\right)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\beta\left(\kappa-1\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\\ \left(\kappa-1\right)\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}+\left(\kappa+1\right)\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\left(3-\kappa\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\beta\left(\kappa+1\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}\end{bmatrix}=B\cdot F_{x\to s}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}.$$

Доказательство данной леммы следует из свойства преобразования Фурье $F_{x\to s}[D^\alpha f]=(-is^\alpha)F_{x\to s}[f]$ и его линейности.

Лемма 3. Пусть $k\in(5/3;3)$. Тогда определитель матрицы B обращается в нуль только при $s_1=s_2=0$.

Замечание. Так как $\kappa=(3-\nu)\,/\,(1+\nu)$, где ν — коэффициент Пуассона, то область изменения коэффициента k определяется естественной областью изменения коэффициента Пуассона $\nu\in(0;0{,}5)$.

Доказательство. Справедливо представление

$$\det B=\left(\kappa^2-1\right)\left(s_1^2+s_2^2\right)^2+2i\left(\kappa^2-1\right)s_2\left(s_1^2+s_2^2\right)\beta-(k-1)\left(\left(-3+\kappa\right)s_1^2+\left(1+\kappa\right)s_2^2\right)\beta^2. \quad (8)$$

Выделив вещественную и мнимую часть равенства (8), получим

$$\begin{cases}2\left(-1+\kappa^2\right)s_2\left(s_1^2+s_2^2\right)\beta=0;\\ \left(-1+\kappa^2\right)\left(s_1^2+s_2^2\right)^2-\left(-1+\kappa\right)\left(\left(-3+\kappa\right)s_1^2+\left(1+\kappa\right)s_2^2\right)\beta^2=0.\end{cases}$$

Из первого равенства вытекает совокупность уравнений $\left[\begin{array}{c}s_1^2+s_2^2=0;\\ s_2=0.\end{array}\right.$.

Если $s_2=0$, то из второго уравнения системы следует равенство $(k^2-1)s_1^4+(k-1)(k-3)\beta^2s_1^2=0$. Отсюда или $s_1=0$, т. е. $|s|=0$, или $s_1^2=\frac{k-3}{1+k}<0$, чего не может быть.

Лемма доказана.

Очевидно, что обратная матрица для матрицы B имеет вид

$$B^{-1} =$$
$$=\frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} -(\kappa-1)\,s_1^2-(\kappa+1)\,s_2^2-i\beta\,(\kappa+1)\,s_2 & 2s_1s_2+i\beta\,(\kappa-1)\,s_1 \\ 2s_1s_2+i\beta\,(3-\kappa)\,s_1 & -(\kappa+1)\,s_1^2-(\kappa-1)\,s_2^2-i\beta\,(\kappa-1)\,s_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Пусть $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ — регулярные функционалы из пространства $S'(R)$. Тогда обобщенное решение задачи (6)–(7) имеет вид

$$u(x_1,x_2) =$$
$$= F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{1}{\det B}\left(-(\kappa-1)^2 s_1^2-\left(\kappa^2-1\right)s_2^2+i\left(-\beta\left(\kappa^2-1\right)s_2\right)\right)\int\limits_{-1}^{1} q_1(x_1)e^{ix_1s_1}dx_1+\right.$$
$$\left.+F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{1}{\det B}(2(k+1)s_1s_2+i\beta\left(\kappa^2-1\right)s_1)\int\limits_{-1}^{1} q_2(x_1)e^{ix_1s_1}dx_1\right]\right..$$

$$v(x_1,x_2) = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{1}{\det B}\left(2s_1s_2\,(\kappa-1)+i\beta\,(3-\kappa)\,(\kappa-1)\,s_1\right)\int\limits_{-1}^{1} q_1\,(x_1)\,e^{ixs_1}dx_{_1}\right]+$$
$$+F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{\left(-(\kappa+1)^2 s_1^2-(\kappa-1)\,(\kappa+1)\,s_2^2\right)+i\left(-\beta\,(\kappa-1)\,(\kappa+1)\,s_2\right)}{\det B}\cdot\int\limits_{-1}^{1} q_2(x_1)e^{ixs_1}dx_{_1}\right].$$

Применяя к левой и правой частям обобщенной задачи (6)–(7) преобразование Фурье и используя сформулированные выше утверждения, получим доказательство теоремы.

Изучим свойства гладкости решения.

Теорема 3. Пусть $k \in (5/3;3)$. Пусть функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ из условий (4)–(5) принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Предположим также, что справедливы равенства $\int\limits_{-1}^{1} q_r(x_1)dx_1 = 0$, $r = 1;2$. Тогда компоненты $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ решения обобщенной задачи из теоремы 1 являются непрерывными по совокупности переменных, ограниченными на любом компакте $K \in R^2$ функциями, бесконечно дифференцируемыми в любой точке из множества $R^2\backslash l$. Граничные условия (2), (3) выполнены по непрерывности. Первые производные решения удовлетворяют граничным условиям (4), (5) в смысле главного значения.

Замечание. Говорим, что условие (4) выполнено в смысле главного значения, если при каждом $x_1 \in (-1;1)$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\partial u(x_1,\,\varepsilon)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right) = q_1(x_1).$$

Совершенно аналогично определяется выполнение в смысле главного значения условия (5).

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим ряд утверждений.

Решение обобщенной задачи (6)–(7) имеет преобразование Фурье вида $F_{x\to s}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\det B}\cdot C\cdot F$, где $\det B$ выписан в представлении (8), матрица $C = (c_{k,m})$, $1 \leqslant k,m \leqslant 2$ имеет элементы вида

$$c_{1,1} = -(\kappa-1)^2 s_1^2-\left(\kappa^2-1\right)s_2^2+i\left(-\beta\left(\kappa^2-1\right)s_2\right);$$

$$c_{2,1} = 2s_1s_2(\kappa - 1) + i\beta(3 - \kappa)(\kappa - 1)s_1;$$
$$c_{1,2} = 2s_1s_2(\kappa + 1) + i\beta(\kappa - 1)(\kappa + 1)s_1;$$
$$c_{2,2} = -(\kappa + 1)^2 s_1^2 - \left(\kappa^2 - 1\right)s_2^2 + i\left(-\beta\left(\kappa^2 - 1\right)s_2\right);$$
$$F = \begin{bmatrix} \int\limits_{-1}^{1} q_1(x_1)\, e^{ixs_1}dx_1 \\ \int\limits_{-1}^{1} q_2(x_1)\, e^{ixs_1}dx_1 \end{bmatrix}.$$

Решение обобщенной задачи (6)–(7) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} u(x_1,x_2) \\ v(x_1,x_2) \end{pmatrix} = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{C\cdot F}{\det B}\right].$$

В предположении, что функционал $\frac{C\cdot F}{\det B}$ регулярен в $S'(R^2)$, последнее представление, на основании теоремы 2 может быть записано в интегральном виде. Для этого введем в рассмотрение интегралы

$$I_{pqr} = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B}\int\limits_{-1}^{1} e^{is_1x_1}q_r(x_1)dx_1\right] =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}F_{-s\to x}\left[\frac{(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B}\int\limits_{-1}^{1} e^{is_1x_1}q_r(x_1)dx_1\right] =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}F_{s\to x}\left[\frac{(is_1)^p(is_2)^q}{\det \widetilde{B}}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1\right];\ 0\leqslant p,q\leqslant 2;\ 1\leqslant r\leqslant 2.$$

Тогда компоненты решения обобщенной задачи (6)–(7) могут быть записаны в виде

$$u(x_1,x_2) = (k-1)^2 I_{201} + (k^2-1)I_{021} - \beta(k^2-1)I_{011} - 2(k+1)I_{112} + \beta(k^2-1)I_{102};$$
$$v(x_1,x_2) = (k+1)^2 I_{202} + (k^2-1)I_{022} - \beta(k^2-1)I_{012} - 2(k-1)I_{111} + \beta(3-k)(k-1)I_{101}. \quad (9)$$

Представим интегралы $I_{pqr}(x_1,x_2)$ в виде следующих сумм

$$I_{pqr}(x_1,x_2) = I^0_{pqr}(x_1,x_2) + I^2_{pqr}(x_1,x_2) + I^3_{pqr}(x_1,x_2),$$

где

$$I^0_{pqr}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|s|<\delta} e^{ixs}\frac{(is_1)^p(is_2)^q}{\det \widetilde{B}}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1ds; \quad (10)$$

$$I^1_{pqr}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\delta<|s|<N} e^{ixs}\frac{(is_1)^p(is_2)^q}{\det \widetilde{B}}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1ds; \quad (11)$$

$$I^2_{pqr}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{(is_1)^p(is_2)^q}{\det \widetilde{B}}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1ds, \quad (12)$$

здесь $0\leqslant p,q\leqslant 2$; $1\leqslant r\leqslant 2$; константы $\delta>0$; $N>0$ будут впоследствии выбраны.

Лемма 4. Пусть $k \in (5/3;3)$. Пусть функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ из условий (4)–(5) принадлежат пространству $C([-1;1])$. Предположим также, что справедливы равенства $\int\limits_{-1}^{1} q_r(x_1)dx_1 = 0$, $r = 1;2$. Тогда интегралы (10) являются бесконечно дифференцируемыми, ограниченными на любом компакте из R^2 со всеми производными функциями переменных (x_1, x_2).

Доказательство. Докажем, что интегралы (10) являются непрерывными функциями $(x_1, x_2) \in R^2$. Заметим, что справедлива оценка

$$|\det B|^2 \geqslant \beta^4(k-1)^2((3-k)s_1^2-(k+1)s_2^2)^2+2|s|^4\beta^2(k^2-1)^2(s_2^2+\frac{3-k}{k+1}s_1^2).$$

Обозначим $M = \min\left\{1;\ \frac{3-k}{k+1}\right\}$.

Используя $|(3-k)s_1^2-(k+1)s_2^2| \geqslant (k+1)M|s|^2\left(\frac{3-k}{k+1}\cdot\frac{|s_1|}{|s|}-\frac{|s_2|}{|s|}\right)$, получим оценку

$$|\det B| \geqslant \sqrt{2M\beta^3(k^2-1)}|s|^2\sqrt{|(3-k)s_1^2-(k+1)s_2^2|} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{2M^{1,5}\beta^3(k^2-1)(k+1)}|s|^3\sqrt{\frac{3-k}{k+1}\cdot\frac{|s_1|}{|s|}-\frac{|s_2|}{|s|}}. \qquad (13)$$

Рассмотрим вначале интегралы I^0_{pqr}, у которых $p+q=2$. Из представлений (10), а также оценки (11) вытекает неравенство

$$|I^0_{pqr}(x_1,x_2)| \leqslant c_0 \int\limits_{|s|\leqslant\delta} \frac{\left|\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1\right|}{|s|\sqrt{\frac{3-k}{k+1}\cdot\frac{|s_1|}{|s|}-\frac{|s_2|}{|s|}}}ds \leqslant 2c_0\cdot\max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)|\cdot\int\limits_{|s|\leqslant\delta}\frac{1}{|s|\sqrt{\frac{3-k}{k+1}\cdot\frac{|s_1|}{|s|}-\frac{|s_2|}{|s|}}}ds.$$

Перейдя в последнем интеграле к полярной системе координат $\rho = |s|$; $s_1 = \rho\cos\varphi$; $s_2 = \rho\sin\varphi$, получим

$$|I^0_{pqr}(x_1,x_2)| \leqslant c_0 \max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{d\rho d\varphi}{\sqrt{\frac{3-k}{k+1}|\cos\varphi|-|\sin\varphi|}} \leqslant c_1 < \infty\,. \qquad (14)$$

Последнее, на основе теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [3]), позволяет утверждать, что функция $I^0_{pqr}(x_1,x_2)$ непрерывна и ограничена на своей области определения R^2.

Рассмотрим теперь оставшиеся интегралы (10), т. е. те, у которых $p+q=1$. Отметим, что в условиях леммы справедлива оценка $\int\limits_{-1}^{1} e^{-ix_1s_1}q_r(x_1)dx_1 = \int\limits_{-1}^{1} q_r(x_1)dx_1 - is_1x_1\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^1 e^{-is_1x_1z}dzq_r(x_1)dx_1 = -is_1x_1\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^1 e^{-is_1x_1z}dzq_r(x_1)dx_1$.

Оценим последнее выражение

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} e^{-ix_1s_1}q_r(x_1)dx_1\right| = \left|-is_1x_1\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^1 e^{-is_1x_1z}dzq_r(x_1)dx_1\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-1}^{1} q_r(x_1)dx_1 - is_1x_1 \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{1} e^{-is_1x_1z}dzq_r(x_1)dx_1 \right| \leqslant |s_1|\cdot|x_1|\cdot \max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)|.$$

Теперь мы можем, аналогично неравенству (14), записать оценку

$$|I^0_{pqr}(x_1,x_2)| \leqslant c_0|x_1| \max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)| \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\delta} \frac{d\rho d\varphi}{\sqrt{\frac{3-k}{k+1}|\cos\varphi| - |\sin\varphi|}} \leqslant c_1 < \infty.$$

Отметим, что любые производные функций $I^0_{pqr}(x_1,x_2)$ оцениваются аналогично случаю $p+q=2$. Это связано с тем, что дифференцирование этих интегралов по внешним переменным увеличивает степень $|s|$ в числителе подынтегрального выражения, что позволяет компенсировать сингулярность знаменателя без дополнительных условий на функции $q_r(x_1)$.

Лемма 5. Пусть $k \in (5/3;3)$. Пусть функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ из условий (4)–(5) принадлежат пространству $C([-1;1])$. Тогда интегралы (11) являются бесконечно дифференцируемыми, ограниченными на любом компакте из R^2 со всеми производными функциями переменных (x_1,x_2).

Доказательство леммы 5 представляется очевидным.

Перейдем к рассмотрению интегралов (12).

Введем обозначение

$$R_r(s_1) = \int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1;\ r=1;2. \tag{15}$$

Лемма 6. Пусть функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ из условий (4)–(5) принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Тогда существует постоянная $c_0>0$, такая, что справедлива оценка

$$|R_r(s_1)| \leqslant c_0(1+|s_1|)^{-1}. \tag{16}$$

Доказательство. Используя очевидное неравенство

$$|R_r(s_1)| \leqslant 2\max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)| \tag{17}$$

и проинтегрировав интеграл (15) один раз по частям, легко получить оценку

$$|R_r(s_1)| \leqslant \frac{2}{|s_1|}\left(\max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)| + \max_{x_1\in[-1;1]}|q_r'(x_1)|\right). \tag{18}$$

Пусть $0\leqslant|s_1|\leqslant 1$, тогда имеем из (17)

$$|R_r(s_1)| \leqslant \frac{4}{1+1}\max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)| \leqslant \frac{4}{1+|s_1|}\max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)|. \tag{19}$$

Пусть, далее $|s_1|\geqslant 1$. Имеем из (18)

$$|R_r(s_1)| \leqslant \frac{4}{1+|s_1|}\left(\max_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)| + \max_{x_1\in[-1;1]}|q_r'(x_1)|\right). \tag{20}$$

Обозначим $c_0 = 4\max\left\{\max\limits_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)|;\ \max\limits_{x_1\in[-1;1]}|q_r(x_1)| + \max\limits_{x_1\in[-1;1]}|q_r'(x_1)|\right\}$ после чего отметим, что из (19) и (20) при всех $s_1\in R$ справедливо неравенство (16).

Заметим, что величина, обратная к определителю (10) матрицы B представима в виде $\frac{1}{\det B} = \frac{1}{(\kappa^2-1)|s|^4} \cdot \frac{1}{(1+O(|s|^{-1}))}$. Так как справедливо асимптотическое при $|s| \to \infty$ равенство $\frac{1}{1+O(|s|^{-1})} = 1 + O\left(|s|^{-1}\right)$, то интеграл (12) можно представить в виде суммы

$$I^2_{pqr}(x_1,x_2) = I^{20}_{pqr}(x_1,x_2) + I^{21}_{pqr}(x_1,x_2), \tag{21}$$

где

$$I^{20}_{pqr}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)} \int\limits_{|s|>N} e^{ixs} \frac{(is_1)^p(is_2)^q}{|s|^4} \int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1} q_r(x_1)dx_1ds; \tag{22}$$

$$I^{21}_{pqr}(x_1,x_2) = \int\limits_{|s|>N} e^{ixs} O(|s|^{-3}) \int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1} q_r(x_1)dx_1ds. \tag{23}$$

Лемма 7. Пусть функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ из условий (4)–(5) принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Тогда интегралы (17) вместе со своими первыми производными являются непрерывными ограниченными на R^2 функциями переменных (x_1,x_2).

Доказательство. С учетом неравенства $p+q \leqslant 2$ и на основании леммы 6, получим оценку

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I^{21}_{pqr}(x_1,x_2)\right| \leqslant c_0 \int\limits_{|s|>N} \frac{1}{|s|^2(1+|s_1|)} ds\,.$$

Перейдем в последней оценке к полярным координатам $\rho = |s|; s_1 = \rho\cos\varphi$; $s_2 = \rho\sin\varphi$ и используем неравенство $1+\rho|\cos\varphi| \geqslant 2\rho^{0,5}|\cos\varphi|^{0,5}$, получим выражение

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I^{21}_{pqr}(x_1,x_2)\right| \leqslant c_0 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_N^{\infty} \frac{d\rho d\varphi}{\lambda(1+\lambda|\cos\varphi|)} \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|\cos\varphi|^{0,5}} \int\limits_N^{\infty} \frac{d\rho}{\lambda^{1,5}} \;<\; \infty. \tag{24}$$

Сходимость последнего интеграла очевидна. На основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [3]), лемма доказана.

Следствие 1. В условиях леммы 7 для интегралов $I^{20}_{pqr}(x_1,x_2)$ при всех $p,q : p+q \leqslant 2, r = 1;2$ и интегралы $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I^{20}_{pqr}(x_1,x_2)$, $m = 0;1$; $p+q \leqslant 1$; $r = 1;2$, также справедлива оценка с правой частью, как в неравенстве (24), поэтому указанные функции также будут непрерывны и равномерно по $x \in R^2$ ограничены.

Следствие 2. Пусть $k \in (5/3;3)$. Пусть функции $q_1(x_1), q_2(x_1)$ из условий (4)–(5) принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Предположим также, что справедливы равенства $\int\limits_{-1}^{1} q_r(x_1)dx_1 = 0$, $r = 1;2$. На основании представлений (10)–(12), лемм 4–6, а также представления (21)–(23) и следствия 1 заключаем, что интегралы $I_{pqr}(x_1,x_2)$ при всех $p,q : p+q \leqslant 2, r = 1;2$ и интегралы $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I_{pqr}(x_1,x_2), m = 0;1; p+q \leqslant 1; r = 1;2$, непрерывны и ограничены по (x_1,x_2), принадлежащим произвольному компакту из R^2.

Следствие 3. В условиях следствия 2 на основании представлений (9) получаем, что компоненты решения задачи (6)-(7) $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$ являются непрерывными и равномерно по $x \in R^2$ ограниченными функциями.

Следствие 4. В условиях следствия 2 граничные условия (2)–(3) выполнены вследствие непрерывности $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ в окрестности границы области разреза l.

Перейдем к исследованию гладкости компонент производных решения.

На основании лемм 4, 5, 7, в условиях следствия 2 мы можем записать следующие представления производных компонент решения (9) задачи (6)–(7)

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)}\left(\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{(\kappa-1)^2(is_1)^3+\left(\kappa^2-1\right)is_1(is_2)^2}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_1(x_1)dx_1ds+\right.$$
$$\left.-\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{-2(k+1)(is_1)^2is_2}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_2(x_1)dx_1)ds\right)+\widetilde{R}_{11}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)}\left(\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{(\kappa-1)^2(is_1)^2is_1+\left(\kappa^2-1\right)(is_2)^3}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_1(x_1)dx_1ds+\right.$$
$$\left.-\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{-2(k+1)(is_2)^2is_1}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_2(x_1)dx_1ds\right)+\widetilde{R}_{12}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)}\left(-\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{-2(k-1)(is_1)^2is_2}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_1(x_1)dx_1ds+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{(\kappa+1)^2(is_1)^3+\left(\kappa^2-1\right)is_1(is_2)^2}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_2(x_1)dx_1ds\right)+\widetilde{R}_{21}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)}\left(-\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{-2(k-1)(is_2)^2is_1}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_1(x_1)dx_1ds+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{|s|>N} e^{ixs}\frac{(\kappa+1)^2(is_1)^2is_2+\left(\kappa^2-1\right)(is_2)^3}{|s|^4}\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}q_2(x_1)dx_1ds\right)+\widetilde{R}_{21}(x_1,x_2).$$

Во всех последних представлениях производных компонент решения использованы обозначения: $\widetilde{R}_{mn}(x_1,x_2)$– непрерывная, ограниченная по переменным (x_1,x_2), принадлежащим произвольному компакту из R^2.

Используя обозначение (22), последние представления можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\left((k-1)^2I^{20}_{301}+(k^2-1)I^{20}_{121}-2(k+1)I^{20}_{212}\right)+\widetilde{R}_{11}(x_1,x_2);$$
$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\left((k-1)^2I^{20}_{211}+(k^2-1)I^{20}_{031}-2(k+1)I^{20}_{122}\right)+\widetilde{R}_{12}(x_1,x_2);$$
$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\left(-2(k-1)I^{20}_{211}+(k+1)^2I^{20}_{302}+(k^2-1)I^{20}_{122}\right)+\widetilde{R}_{21}(x_1,x_2); \qquad (25)$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\big(-2(k-1)I_{121}^{20}+(k+1)^2I_{212}^{20}+(k^2-1)I_{032}^{20}\big)+\widetilde{R}_{21}(x_1,x_2).$$

Введем в рассмотрение интегралы

$$J_{pqr}(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)}\int\limits_{|s|>N}e^{ixs}\frac{(is_1)^p(is_2)^q}{(1+|s|^2)^2}\int\limits_{-1}^{1}e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1ds. \tag{26}$$

Лемма 8. Пусть функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ из условий (4)-(5) принадлежат пространству $C^1([-1;1])$, $0\ \leqslant p+q\ \leqslant 3$. Тогда интегралы $I_{pqr}^{20}(x_1x_2)-J_{pqr}(x_1x_2)$ вместе со своими первыми производными являются непрерывными ограниченными на R^2функциями переменных $(x_1,\, x_2)$.

Доказательство. Так как $\frac{1}{|s|^4}-\frac{1}{(1+|s|^2)^2}=O(|s|^{-6})$, то справедлива оценка

$$|J_{pqr}(x_1,x_2)-I_{pqr}^{20}(x_1,x_2)|\ \leqslant\int\limits_{|s|>N}\frac{c_0|s|^{p+q}ds}{(2\pi)^2\,(k^2-1)(1+|s|^2)^2|s|^4(1+|s_1|)}\ \leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_0|}{(2\pi)^2\,(k^2-1)}\int\limits_{|s|>N}\frac{1}{|s|^3}ds<\infty.$$

Последняя оценка доказывает утверждение леммы.

Из леммы 8 и представлений (26) вытекает следующее представление компонент решения задачи (6)–(7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}&=\big((k-1)^2J_{301}+(k^2-1)J_{121}-2(k+1)J_{212}\big)+Q_{11}(x_1,x_2);\\
\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}&=\big((k-1)^2J_{211}+(k^2-1)J_{031}-2(k+1)J_{122}\big)+Q_{12}(x_1,x_2);\\
\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}&=\big(-2(k-1)J_{211}+(k+1)^2J_{302}+(k^2-1)J_{122}\big)+Q_{21}(x_1,x_2);\\
\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}&=\big(-2(k-1)J_{121}+(k+1)^2J_{212}+(k^2-1)J_{032}\big)+Q_{21}(x_1,x_2).
\end{aligned} \tag{27}$$

В представлениях (27) производных компонент решения функция $Q_{mn}(x_1,x_2)-$ непрерывная, ограниченная по переменным (x_1,x_2), принадлежащим произвольному компакту из R^2.

Введем в рассмотрение интегралы

$$H_{pqr}(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)}\int\limits_{R^2}e^{ixs}\frac{(is_1)^p(is_2)^q}{(1+|s|^2)^2}\int\limits_{-1}^{1}e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1ds. \tag{28}$$

Лемма 9. Пусть функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ из условий (4)-(5) принадлежат пространству $C^1([-1;1])$, $0\ \leqslant p+q\ \leqslant 3$. Тогда интегралы $J_{pqr}(x_1x_2)-H_{pqr}(x_1x_2)$ являются непрерывными ограниченными функциями переменных $(x_1,\, x_2)$ по переменным (x_1,x_2), принадлежащим произвольному компакту из R^2.

Доказательство. Выражение

$$H_{pqr}(x_1,x_2)-J_{pqr}(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2(k^2-1)}\int\limits_{0\leqslant|s|\leqslant N}e^{ixs}\frac{(is_1)^p(is_2)^q}{(1+|s|^2)^2}\int\limits_{-1}^{1}e^{-is_1x_1}q_r(x_1)dx_1ds$$

есть интеграл по компактному множеству от равномерно по внешним переменным ограниченного подынтегрального выражения. Кроме того, подынтегральное выражение непрерывно зависит от внешних параметров. Отсюда, на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [3]) получаем утверждение леммы.

На основании леммы 9 и представлений 27 можем записать равенства

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} &= \big((k-1)^2 H_{301} + (k^2-1)H_{121} - 2(k+1)H_{212}\big) + G_{11}(x_1,x_2);\\
\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} &= \big((k-1)^2 H_{211} + (k^2-1)H_{031} - 2(k+1)H_{122}\big) + G_{12}(x_1,x_2);\\
\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1} &= \big(-2(k-1)H_{211} + (k+1)^2 H_{302} + (k^2-1)H_{122}\big) + G_{21}(x_1,x_2); \qquad (29)\\
\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2} &= \big(-2(k-1)H_{121} + (k+1)^2 H_{212} + (k^2-1)H_{032}\big) + G_{21}(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

В представлениях (29) производных компонент решения функция $G_{mn}(x_1,x_2)$ — непрерывная, ограниченная по переменным (x_1,x_2), принадлежащим произвольному компакту из R^2.

Замечание. Из [4] известно, что $F_{s\to x}[(1+|s|^2)^{-2}] = 2\pi K_1(|x|)|x|$, где $K_1(|x|)$ — функция Макдональда. Кроме того, основываясь на теореме о преобразовании Фурье свертки с финитным функционалом, можем записать интегралы (28) в виде

$$\begin{aligned}
H_{pqr}(x_1,x_2) &= \tfrac{1}{4\pi^2(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1} \tfrac{\partial^{p+q}}{(\partial x_1)^p(\partial x_2)^q} F_{\substack{s_1\to x_1-y_1\\ s_2\to x_2}}\left[\tfrac{1}{(1+|s|^2)^2}\right] q_r(y_1)dy_1 = \qquad (30)\\
&= \tfrac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1} \tfrac{\partial^{p+q}}{(\partial x_1)^p(\partial x_2)^q}\left[K_1\Big(\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\Big)\cdot\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right] q_r(y_1)dy_1.
\end{aligned}$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial^{p+q}}{(\partial x_1)^p(\partial x_2)^q}\left[K_1\Big(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\Big)\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right],\ 1\ \leqslant p+q\ \leqslant 3.$$

При этом будем использовать соотношения (см. [5]) $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$; $K'_\nu(z) = -\frac{1}{2}\left(K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)\right)$. Имеем

$$\frac{\partial\left(K_1(|x|)\cdot|x|\right)}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\left(K_0(|x|)+K_2(|x|)\right)x_1 + \frac{x_1}{|x|}K_1(|x|); \qquad (31)$$

$$\frac{\partial\left(K_1(|x|)\cdot|x|\right)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}\left(K_0(|x|)+K_2(|x|)\right)x_2 + \frac{x_2}{|x|}K_1(|x|); \qquad (32)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\left(K_1(|x|)\cdot|x|\right)}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{3}{4}K_1(|x|)+\frac{1}{4}K_3(|x|)\right)\frac{x_1^2}{|x|} - \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{|x|^2}\left(K_0(|x|)+K_2(|x|)\right) +\\
&+K_1(|x|)\frac{x_2^2}{|x|^3} - \frac{1}{2}\left(K_0(|x|)+K_2(|x|)\right); \qquad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\left(K_1(|x|)\cdot|x|\right)}{\partial x_2^2} &= \left(\frac{3}{4}K_1(|x|)+\frac{1}{4}K_3(|x|)\right)\frac{x_2^2}{|x|} - \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{|x|^2}\left(K_0(|x|)+K_2(|x|)\right) +\\
&+K_1(|x|)\frac{x_1^2}{|x|^3} - \frac{1}{2}\left(K_0(|x|)+K_2(|x|)\right); \qquad (34)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\left(K_1\left(|x|\right)\cdot|x|\right)}{\partial x_1\partial x_2}=\left(\frac{3}{4}K_1\left(|x|\right)+\frac{1}{4}K_3\left(|x|\right)\right)\frac{x_1x_2}{|x|}-\frac{x_1x_2}{|x|^3}K_1\left(|x|\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(K_0\left(|x|\right)+K_2\left(|x|\right)\right)\frac{x_1x_2}{|x|^2};\tag{35}$$

$$\frac{\partial^3\left(K_1\left(|x|\right)\cdot|x|\right)}{\partial x_1^3}=\left(\frac{3}{4}K_1\left(|x|\right)+\frac{1}{4}K_3\left(|x|\right)\right)\frac{3x_1}{|x|}+\left(-\frac{3}{8}K_0\left(|x|\right)-\frac{1}{2}K_2\left(|x|\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}K_4\left(|x|\right)\right)\frac{x_1^3}{|x|^2}-\frac{3}{2}\left(K_0\left(|x|\right)+K_2\left(|x|\right)\right)\frac{x_1x_2^2}{|x|^4}-K_1\left(|x|\right)\frac{3x_1x_2^2}{|x|^5};\tag{36}$$

$$\frac{\partial^3\left(K_1\left(|x|\right)\cdot|x|\right)}{\partial x_1^2\partial x_2}=\left(\frac{3}{4}K_1\left(|x|\right)+\frac{1}{4}K_3\left(|x|\right)\right)\frac{x_2}{|x|}+\frac{x_1^2x_2}{|x|^2}\left(-\frac{3}{8}K_0\left(|x|\right)-\frac{1}{2}K_2\left(|x|\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}K_4\left(|x|\right)\right)+\frac{1}{2}\left(K_0\left(|x|\right)+K_2\left(|x|\right)\right)\frac{2x_1^2x_2-x_2^3}{|x|^4}+K_1\left(|x|\right)\frac{2x_1^2x_2-x_2^3}{|x|^5};\tag{37}$$

$$\frac{\partial^3\left(K_1\left(|x|\right)\cdot|x|\right)}{\partial x_2^2\partial x_1}=\left(\frac{3}{4}K_1\left(|x|\right)+\frac{1}{4}K_3\left(|x|\right)\right)\frac{x_1}{|x|}+\frac{x_2^2x_1}{|x|^2}\left(-\frac{3}{8}K_0\left(|x|\right)-\frac{1}{2}K_2\left(|x|\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}K_4\left(|x|\right)\right)++\frac{1}{2}\left(K_0\left(|x|\right)+K_2\left(|x|\right)\right)\frac{2x_2^2x_1-x_1^3}{|x|^4}+K_1\left(|x|\right)\frac{2x_2^2x_1-x_1^3}{|x|^5};\tag{38}$$

$$\frac{\partial^3\left(K_1\left(|x|\right)\cdot|x|\right)}{\partial x_2^3}=\left(\frac{3}{4}K_1\left(|x|\right)+\frac{1}{4}K_3\left(|x|\right)\right)\frac{3x_2}{|x|}+\left(-\frac{3}{8}K_0\left(|x|\right)-\frac{1}{2}K_2\left(|x|\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}K_4\left(|x|\right)\right)\frac{x_2^3}{|x|^2}-\frac{3}{2}\left(K_0\left(|x|\right)+K_2\left(|x|\right)\right)\frac{x_1^2x_2}{|x|^4}-K_1\left(|x|\right)\frac{3x_1^2x_2}{|x|^5}.\tag{39}$$

Используем известные (см. [5]) асимптотические представления при $|x|\to 0$ функций Макдональда $K_n(|x|),\ n=0;1;2;3;4$. Приведем их с нужным нам в дальнейшем количеством членов разложения

$$K_0\left(|x|\right)=-\ln\frac{|x|}{2}+\Psi\left(1\right)+O(|x|);\tag{40}$$

$$K_1\left(|x|\right)=\frac{1}{|x|}+\frac{|x|}{4}\left(2\ln\frac{|x|}{2}-\Psi\left(1\right)-\Psi\left(2\right)\right)+O\left(|x|^3\right);\tag{41}$$

$$K_2\left(|x|\right)=\frac{2}{|x|^2}-\frac{1}{2}+O\left(|x|^2\right);\tag{42}$$

$$K_3\left(|x|\right)=\frac{8}{|x|^3}-\frac{1}{|x|}+\frac{|x|}{8}+O\left(|x|^3\right);\tag{43}$$

$$K_4\left(|x|\right)=\frac{48}{|x|^4}-\frac{4}{|x|^2}+\frac{1}{4}+O\left(|x|^2\right).\tag{44}$$

Лемма 10. Справедливы следующие асимптотические представления при $|x|\to 0$ выражений $\frac{\partial^{p+q}(K_1(|x|)|x|)}{(\partial x_1)^p(\partial x_2)^q}$ при $p+q\ =\ 3$.

$$\frac{\partial^3\left(K_1\left(|x|\right)\cdot|x|\right)}{\partial x_1^2\partial x_2}=\frac{-x_1^2x_2+x_2^3}{|x|^4}+O(1);\tag{45}$$

$$\frac{\partial^3\left(K_1\left(|x|\right)\cdot|x|\right)}{\partial x_1^\partial x_2^2}=\frac{x_1^3-x_1x_2^2}{|x|^4}+O(1);\tag{46}$$

$$\frac{\partial^3 \left(K_1\left(|x|\right)|x|\right)}{\partial x_2^3} = \frac{3x_1^2 x_2 + x_2^3}{|x|^4} + O(1); \tag{47}$$

$$\frac{\partial^3 \left(K_1\left(|x|\right)|x|\right)}{\partial x_1^3} = \frac{3x_2^2 x_1 + x_1^3}{|x|^4} + O(1); \tag{48}$$

Представления (45)-(48) получены из равенств (31)-(39) и асимптотических разложений (40)-(44).

На основании представления (30) и результатов леммы 10 можем записать представления

$$H_{03r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{3(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} + O(1)\right) q_r(y_1)dy_1;$$

$$H_{12r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{(x_1-y_1)^3 - (x_1-y_1)x_2^2}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} + O(1)\right) q_r(y_1)dy_1;$$

$$H_{21r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{-(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} + O(1)\right) q_r(y_1)dy_1;$$

$$H_{30r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{3x_2^2(x_1-y_1) + (x_1-y_1)^3}{|x|^4} + O(1)\right) q_r(y_1)dy_1; \ \ r = 1;\, 2.$$

В последних представлениях через $O(1)$ обозначена функция переменных $(x_1 - y_1,\, x_2)$, ограниченная и непрерывная на своей области определения. Поэтому представления интегралов H_{pqr} $\quad (p+q=3,\ r=1;\,2)$ можем переписать в виде

$$H_{03r}(x_1,x_2) = \widetilde{H}_{03r}(x_1,x_2) + M_{03r}(x_1,x_2); H_{12r}(x_1,x_2) = \widetilde{H}_{12r}(x_1,x_2) + M_{12r}(x_1,x_2);$$

$$H_{21r}(x_1,x_2) = \widetilde{H}_{21r}(x_1,x_2) + M_{21r}(x_1,x_2); H_{30r}(x_1,x_2) = \widetilde{H}_{30r}(x_1,x_2) + M_{030}(x_1,x_2).$$

В указанных представлениях функции $M_{pqr}(x_1,x_2)$ являются непрерывными, ограниченными функциями своих аргументов, функции

$$\widetilde{H}_{03r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{3(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right) q_r(y_1)dy_1; \tag{49}$$

$$\widetilde{H}_{12r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{(x_1-y_1)^3 - (x_1-y_1)x_2^2}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right) q_r(y_1)dy_1; \tag{50}$$

$$\widetilde{H}_{21r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{-(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right) q_r(y_1)dy_1; \tag{51}$$

$$\widetilde{H}_{30r}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{3x_2^2(x_1-y_1) + (x_1-y_1)^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right) q_r(y_1)dy_1, \tag{52}$$

Перейдем к проверке выполнения в смысле главного значения граничных условий (4), (5). При этом достаточно будет доказать выполнение условия (4). Выполнение условия (5) доказывается аналогично.

Лемма 11. Пусть выполнено условие $q_1 \in C^1([-1;\ 1])$. Тогда условие (4) выполнено в смысле главного значения.

Доказательство. Используя представления (29), (49)-(52), запишем $\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ в виде

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{k-1}{2\pi(k+1)} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{-(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) q_1(y_1)dy_1 + \tag{53}$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{3(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) q_1(y_1)dy_1 - \frac{2}{2\pi(k-1)} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{(x_1-y_1)^3 - (x_1-y_1)x_2^2}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) q_2(y_1)dy_1.$$

Заметим, что при каждом $x_2 \neq 0$ интеграл $t(x_1,x_2) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{(x_1-y_1)^3-(x_1-y_1)x_2^2}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) q_2(y_1)dy_1$ сходится и является четной по x_2 функцией. Поэтому, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $t(x_1,\varepsilon) - t(x_1,-\varepsilon) = 0$, таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} (t(x_1,\varepsilon) - t(x_1,-\varepsilon)) = 0. \tag{54}$$

Выражение $s(x_1,x_2) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{-(x_1-y_1)^2x_2+x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) q_1(y_1)dy_1$ с помощью разложения

$$q_1(y_1) = q(x_1) + q'(\theta(y_1), \tag{55}$$

запишем в виде суммы двух интегралов

$$s(x_1,x_2) = q_1(x_1) \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{-(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) dy_1 + \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{-(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) (y_1-x_1)q_1'(\theta(y_1))dy_1.$$

Первый из интегралов, очевидно, стремится к нулю при $x_2 \to 0$ и при произвольном фиксированном $x_1 \in (-1;\ 1)$. Второй интеграл является непрерывной функцией внешних параметров. Из сказанного следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} (s(x_1,\varepsilon) - s(x_1,-\varepsilon)) = 0. \tag{56}$$

С помощью разложения (55) запишем оставшийся интеграл в виде суммы

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{3(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) q_1(y_1)dy_1 = E_1 + E_2, \tag{57}$$

где

$$E_1 = q_1(x_1) \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{3(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) dy_1 = \left(\frac{(x_1-1)x_2}{x_2^2+(x_1-1)^2} - \frac{(x_1+1)x_2}{x_2^2+(x_1+1)^2} + \right.$$

$$\left. + 2\left(arctg\frac{1-x_1}{x_2} + arctg\frac{1+x_1}{x_2} \right) \right) q_1(x_1). \tag{58}$$

$$E_2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{3(x_1-y_1)^2 x_2 + x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \right) (y_1-x_1)q_1'(\theta(y_1))dy_1.$$

Интеграл (58), в силу тех же причин, что и второй интеграл в (55) является непрерывной функцией внешних переменных, поэтому не вносит вклада в скачок на границе. Разность $\frac{(x_1-1)x_2}{x_2^2+(x_1-1)^2} - \frac{(x_1+1)x_2}{x_2^2+(x_1+1)^2}$ в правой части интеграла E_1 при каждом фиксированном $x_1 \in (-1;\ 1)$ стремится к нулю при $x_2 \to 0$ и не вносит в силу этого вклада в скачок E_1 на границе. Выражение $2\left(arctg\frac{1-x_1}{\varepsilon} + arctg\frac{1+x_1}{\varepsilon}\right) q_1(x_1) \; - \; 2\left(arctg\frac{1-x_1}{-\varepsilon} + arctg\frac{1+x_1}{-\varepsilon}\right) q_1(x_1)$ стремится к $q(x_1)$ при $\varepsilon \to +0$. Последнее доказывает утверждение леммы.

Доказательством леммы 11 также завершено доказательство утверждений теоремы 3.

Основным и наиболее интересным результатом работы являются сведения об асимптотическом поведении производных решения в окрестности двух критических точек – концов отрезка l границы – трещины. Именно в этих точках возникают сингулярные компоненты производных решения. Ниже будут изучены асимптотические свойства интегралов (49)–(52), что приведет в конечном итоге к построению асимптотических разложений производных решения в окрестности концов отрезка l (границы – трещины).

Лемма 12. Пусть $q_r \in C^1([-1;1])$; $r \in \{1;2\}$. Тогда для интеграла (60) справедливо следующее асимптотическое представление

$$\widetilde{H}_{03r} = \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2} - \frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2} - 2arctg\frac{x_1-1}{x_2} + 2arctg\frac{x_1+1}{x_2}\right) + U_{03r},$$

где $U_{03r}(x_1,x_2)$ — непрерывная ограниченная на любом компакте $K \in R^2$ функция своих аргументов.

Доказательство. На основании представления

$$q_r(y_1) = q_r(x_1) - q_r'(\theta)(x_1-y_1),\ \ |x_1-\theta| \leqslant |x_1-y_1| \quad , \tag{59}$$

можно записать равенство

$$\widetilde{H}_{03r}(x_1,x_2) = \frac{q_r(x_1)}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{3(x_1-y_1)^2x_2+x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right)dy_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{3(x_1-y_1)^3x_2+x_2^3(x_1-y_1)}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right)q_r'(\theta)dy_1. \tag{60}$$

Вычисляя первый интеграл в правой части равенства (60), а для второго интеграла используя оценку подынтегрального выражения константой$c \max\limits_{x_1\in[-1;\,1]}|q_r'(x_1)|$, из которой следует на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, что указанный интеграл является непрерывной функцией внешних переменных, ограниченной на каждом компакте $K \in R^2$,получаем утверждение леммы.

Лемма 13. Пусть $q_r \in C^1([-1;1])$; $r \in \{1;2\}$. Тогда для интеграла (50) справедливо следующее асимптотическое представление

$$\widetilde{H}_{12r} = \frac{q_r(x_1)}{4\pi(k^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right) - \ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right) + U_{12r},$$

где $U_{12r}(x_1,x_2)$ — непрерывная ограниченная на любом компакте $K \in R^2$ функция своих аргументов.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей леммы, представим интеграл (50) на основании разложения (59) в виде суммы

$$\widetilde{H}_{12r}(x_1,x_2) = \frac{q_r(x_1)}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{(x_1-y_1)^3-(x_1-y_1)x_2^2}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right)dy_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{(x_1-y_1)^4-(x_1-y_1)^2x_2^2}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right)q_r'(\theta)dy_1. \quad (61)$$

Первый из интегралов в правой части (61) равен

$$\frac{q_r(x_1)}{4\pi(k^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+\frac{8x_1x_2^2}{x_1^4+2x_1^2(-1+x_2^2)+(1+x_2^2)^2}. \quad (62)$$

Справедлива оценка

$$\left|\frac{8x_1x_2^2}{x_1^4+2x_1^2(-1+x_2^2)+(1+x_2^2)^2}\right|=\left|\frac{8x_1x_2^2}{(x_1^2-1)^2+x_2^2(2x_1^2+2+x_2^2)}\right| \leqslant\left|\frac{8x_1x_2^2}{2x_2^2}\right|=4|x_1|,$$

которая показывает, что второе слагаемое в (62) есть непрерывная ограниченная на любом компакте $K\in R^2$ функция своих аргументов. Второе слагаемое в правой части равенства (61) оценивается как в лемме 12. Лемма доказана.

Лемма 14. Пусть $q_r\in C^1([-1;1])$; $r\in\{1;2\}$. Тогда для интеграла (51) справедливо асимптотическое представление $\widetilde{H}_{21r}=U_{21r}$, где $U_{21r}(x_1,x_2)$– непрерывная ограниченная на любом компакте $K\in R^2$ функция своих аргументов.

Доказательство. С помощью разложения (59) представим интеграл (51) в виде

$$\widetilde{H}_{21r}(x_1,x_2)=\frac{q_r(x_1)}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{-(x_1-y_1)^2x_2+x_2^3}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right)dy_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi(k^2-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{-(x_1-y_1)^3x_2+x_2^3(x_1-y_1)}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2}\right)q_r'(\theta)dy_1. \quad (63)$$

Первый из интегралов в правой части равенства (63) равен

$$\frac{q_r(x_1)}{2\pi(k^2-1)}\cdot\frac{2x_2\left(1-x_1^2+x_2^2\right)}{x_1^4+2x_1^2(-1+x_2^2)+(1+x_2^2)^2}. \quad (64)$$

Обозначим $d=x_1^4+2x_1^2(-1+x_2^2)+(1+x_2^2)^2=(x_1^2-1)^2+x_2^4+2x_1^2x_2^2+2x_1^2$. Оценим это выражение снизу. Обозначим также $\sigma=\{x_1|x_1\in(-1{,}5;-0{,}5)\cup(0{,}5;\,1{,}5)\}$. Пусть $x_1\in\sigma$. Тогда$d\geqslant\ 2x_1^2\ \geqslant\ 0{,}5$. Пусть теперь $x_1\in\ R\backslash\sigma$. Тогда $d\geqslant\ (x^2-1)^2\geqslant\ 0{,}25$. Из последних оценок следует, что при всех $x_1\in R$ справедлива оценка $d\ \geqslant\ 0{,}25$. Из представления (64) и последней оценки знаменателя d ясно, что интеграл (64) является непрерывной функцией внешних переменных, ограниченной на каждом компакте $K\in R^2$. Второе слагаемое в правой части равенства (63) оценивается как в лемме 12.

Лемма 15. Пусть $q_r\in C^1([-1;1])$; $r\in\{1;2\}$. Тогда для интеграла (52) справедливо следующее асимптотическое представление

$$\widetilde{H}_{30r}=\frac{q_r(x_1)}{4\pi(k^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+U_{12r},$$

где $U_{12r}(x_1,x_2)$ — непрерывная ограниченная на любом компакте $K\in R^2$ функция своих аргументов.

Доказательство леммы повторяет доказательство леммы 13.

На основании представлений (29) и результатов лемм 12-15 имеем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $q_r \in C^1([-1;1]);\ r \in \{1;2\}$. Справедливы следующие асимптотические при $x_2 \to 0;\ x_1 \to \pm 1$ представления производных компонент решения

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \left(\frac{q_1(x_1)(2k^2-2k+1)}{4\pi(k^2-1)} \left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right) - \ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right) \right) + W_{11}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \left(\frac{q_1(x_1)}{2\pi} \left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2} - \frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2} - 2arctg\frac{x_1-1}{x_2} + 2arctg\frac{x_1+1}{x_2} \right) \right) -$$
$$- \frac{q_2(x_1)}{2\pi(k-1)} \left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right) - \ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right) + W_{12}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{q_2(x_1)(2k^2+2k)}{4\pi(k^2-1)} \left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right) - \ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right) + W_{21}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\frac{q_1(x_1)}{\pi(k+1)} \left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right) - \ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2} - \frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2} - 2arctg\frac{x_1-1}{x_2} + 2arctg\frac{x_1+1}{x_2} \right) q_2(x_1) + W_{21}(x_1,x_2).$$

Здесь функции $W_{pq}(x_1,x_2),\ 1 \leqslant p,q \leqslant 2-$ непрерывные ограниченные на любом компакте $K \in R^2$ функции своих аргументов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. El-Borgi, S. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // International Journal of Engineering Science. — 2004. — № 42. — P. 371–393.

2. Глушко, А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 47–50.

3. Логинова, Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. — 2012. — Вып. 1. — С. 40–47.

4. Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko, V. E. Petrova, E. A. Loginova // Asymptotic Analysis. — 2016. — V. 98. — P. 285–307.

5. Владимирова, В. С. Уравнения математической физики : учеб. пособие / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1981. — 512 с.

6. Никольский, С. М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1977. — 456 с.

7. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 358 с.

REFERENCES

1. El-Borgi S., Erdogan F., Hidri L. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading. International Journal of Engineering Science, 2004, no. 42, pp. 371–393.

2. Glushko A.V., Loginova E.A. Asymptotic properties of the solution of the problem of stationary heat distribution in an inhomogeneous plane with a crack. [Glushko A.V., Loginova E.A. Asimptoticheskiye svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 47–50.

3. Loginova E.A. Heat distribution in an inhomogeneous material with a crack. [Loginova E.A. Postroyeniye resheniya zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshchinoy].

Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mexanika. Astronomiya — Vestnik of Saint Petersburg University Mathematics. Mechanics. Astronomy, 2012, no. 1, pp. 40–47.

4. Glushko A.V., Ryabenko A.S., Petrova V.E., Loginova E.A. Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity. Asymptotic Analysis, 2016, vol. 98, pp. 285–307.

5. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1981, 512 p.

6. Nikolsky S.M. Approximations of functions of several variables and imbedding theorems. [Nikolsky S.M. Priblizheniya funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya]. Moscow: Nauka, 1977, 456 p.

7. Lebedev N.N. Special functions and their applications. [Lebedev N.N. Spetsial'nyye funktsii i ikh prilozheniya]. Moscow, 1963, 512 p.

Глушко А. В., доктор физико-математических наук; профессор, зав. кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Glushko A. V., doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)220–86–18

Логинова Е. А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: vangog2007@list.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Loginova E.A., PhD of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: vangog2007@list.ru
Tel.: +7(473)220–86–18

Пронина С. В., магистр, выпускник кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: svetlana-razinkina@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Pronina S. V., master of mathematics, graduate of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: svetlana-razinkina@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–86–18