УДК 517.977

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО «SWEEPING» ПРОЦЕССА

Н. И. Восковская

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.09.2016 г.

Аннотация. Данная статья посвящена так называемым «sweeping» процессам, которые играют важную роль в эластопластике, квазистатике и динамике. В работе рассматривается следующий «sweeping» процесс: эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$, содержащий внутри себя или на границе точку, движется вдоль своей большой оси, принадлежащей оси абсцисс, по периодическому закону. Основной целью исследования является изучение решения этого «sweeping» процесса. В работе показано, что такой «sweeping» процесс имеет единственное периодическое решение. Также приведен явный вид этого периодического решения.

Ключевые слова: эллипс, «sweeping» процесс, периодическое решение.

AN ELEMENTARY STUDY OF THE STABILITY OF PERIODIC SOLUTION OF ONE «SWEEPING» PROCESS

N. I. Voskovskaya

Abstract. This paper is dedicated to the so-called «sweeping» process that plays an important role in elastoplasticity, quasistatics and dynamics. In this paper we consider the following «sweeping» process: an ellipse described by the equation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$, moves by a periodic law along its major axis, which lays at abscissa axis. The ellipse contains a point inside or on its boundary and this point follows its movement. The main purpose of the research is to study the solutions of this «sweeping» process. In this paper we show that such "sweeping" process has unique periodic solution. We present the explicit form of this solution.

Keywords: ellipse, «sweeping» process, periodic solution.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется описанию так называемых «sweeping» процессов, которые играют важную роль в различных разделах физики и механики (эластопластики, квазистатики, динамики и др.). Для их изучения существует два различных подхода. Первый подход описан, например, М. А. Красносельским, А. В. Покровским в [5]. Второй подход, который и используется в данной статье, излагается в работах М. Кунца (см. [1]) и М. Маркиса (см. [2]).

Настоящая работа посвящена описанию следующего «sweeping» процесса: эллипс, содержащий внутри себя или на границе точку, двигается вдоль своей большой оси по периодическому закону. При этом точка будет оставаться на месте, пока будет находиться внутри эллипса, а скорость точки на границе эллипса будет противоположно направлена внешнему нормальному конусу к эллипсу, который принадлежит нормали к нему в этой точке. В

© Восковская Н. И., 2017

статье изучается устойчивость периодического решения этого «sweeping» процесса. Для нахождения решения используется разностная схема, с последующим предельным переходом, предложенная в работе [1].

Статья организованна следующим образом: в первой части приведены основные обозначения, понятия и факты, необходимые для дальнейшего изложения. Во второй части дается постановка задачи и формулировка полученных результатов. В третьей части приводятся их доказательства.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

В статье приняты следующие обозначения: H — гильбертово пространство, C — замкнутое выпуклое множество, $C(t)$ — закон движения этого множества, $N_C(x)$ — внешний нормальный конус множества C в точке x, $proj(x, C)$ — проекция точки x на множество C.

Приведём основные определения и используемые теоремы из [1], [4], [6].

Определение 1. (см. [4]) Пусть $C \subset H$ — замкнутое выпуклое множество и $x \in C$, тогда $N_C(x) = \{\xi \in H :< \xi, c - x >\leqslant 0 \ \forall x \in C\}$, где $< \xi, c - x >$ — скалярное произведение, называется внешним нормальным конусом множества C в точке x.

Определение 2. (см. [1]) Точка y называется проекцией точки $x \in H$ $(y = proj(x, C))$ на замкнутое выпуклое множество $C \in H$, если выполняется равенство

$$||y - x|| = \inf_{z\in C} ||z - x||$$

Определение 3. (см. [6]) Отображение $t \to C(t)$ называется непрерывным по Липшицу, если оно удовлетворяет условию

$$d_H(C(t_1), C(t_2)) \leqslant L|t_1 - t_2| \tag{1}$$

где $L = const, L > 0$, точки x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[0, T]$, а $d_H(C(t_1), C(t_2))$ — хаусдорфово расстояние между замкнутыми множествами $C(t_1)$ и $C(t_2)$.

Определение 4. (см. [1]) Функция $u : [0, T] \to H$ называется решением «sweeping» процесса, если:

1) u удовлетворяет начальному условию $u(0) = u_0$, где u_0 — некоторый элемент, принадлежащий $C(0)$;

2) $u(t) \in C(t)$ при всех $t \in [0, T]$;

3) функция u дифференцируема почти всюду на отрезке $[0, T]$;

4) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ почти при всех $t \in [0, T]$;

Теорема 1. [см. 1] Пусть при всех $t \in [0, T]$ множество $C(t) \subset H$ — непустое, замкнутое, выпуклое и $C(t)$ удовлетворяет условию (1). Пусть $u_0 \in C(0)$. Тогда существует решение $u : [0, T] \to H$ данного «sweeping» процесса, которое непрерывно по Липшицу с константой L.

Теорема 2. [см. 1] Решение «sweeping» процесса единственно в классе абсолютно непрерывных функций.

Для нахождения решения «sweeping» процесса будем пользоваться следующей разностной схемой, предложенной в работе [1].

1) Разобьем отрезок времени $[a, b]$ на равные промежутки точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

с шагом разбиения $\frac{b-a}{n}$;

2) В каждой точке разбиения определим значения с помощью проекций следующим образом:

$$u(t_{i+1}) = proj(u(t_i), C(t_{i+1})) \in C(t_{i+1})$$

3) Составим кусочно-линейную функцию вида

$$u_n(t) = u(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(u(t_{i+1}) - u(t_i))$$

4) Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$u(t) = \lim_{n \to \infty} u_n(t)$$

где $u(t)$ и есть решение заданного «sweeping» процесса. Корректность такого подхода также обоснована в работе [1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА УТВЕРЖДЕНИЙ

Пусть эллипс, определяемый уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$, движется вдоль своей большой оси, принадлежащей оси абсцисс, по закону, определяемому движением его центра $O(t) = (x(t), 0)$, где $x(t)$ — T-периодическая функция, имеющая следующий вид:

$$x(t) = \begin{cases} x = Lt, & \text{при } t \in [0, \frac{T}{4}], \\ x = -L(t - \frac{T}{2}), & \text{при } t \in [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}], \\ x = L(t - T), & \text{при } t \in [\frac{3T}{4}, T]. \end{cases}$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ центр эллипса $O(t_0)$ находится в точке $(0, 0)$. Центр эллипса движется по отрезку $[XY]$, где точка $X = (x(\frac{3T}{4}), 0)$, причем $x(\frac{3T}{4}) < 0$, а точка $Y = (x(\frac{T}{4}), 0)$, причем $x(\frac{T}{4}) > 0$. Положим $|O(t_0)X| = |O(t_0)Y| = 2a$, то есть

$$L = \frac{8a}{T} \tag{2}$$

Теорема 3. Пусть точка A в условиях «sweeping» процесса, описанного выше, в начальный момент времени $t_0 = 0$ имеет координаты $(-a, 0)$. Тогда решение данного «sweeping» процесса является T-периодическим, принадлежит отрезку $[XY]$ и имеет следующий вид:

$$u(t) = \begin{cases} (x(t) - a, 0), & \text{при } t \in [0, \frac{T}{4}), \\ (a, 0), & \text{при } t \in [\frac{T}{4}, \frac{T}{2}], \\ (x(t) + a, 0), & \text{при } t \in (\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}), \\ (-a, 0), & \text{при } t \in [\frac{3T}{4}, T]. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 4. Пусть точка A в условиях «sweeping» процесса, описанного выше, в начальный момент времени $t_0 = 0$ находится на большой оси эллипса. Тогда решение данного «sweeping» процесса, начиная со второго периода функции $x(t)$, является T-периодическим и имеет вид (3).

Теорема 5. Пусть точка A в условиях «sweeping» процесса, описанного выше, в начальный момент $t_0 = 0$ лежит внутри или на эллипсе и имеет координаты $(v(t_0), h(t_0))$, причём $h(t_0) \neq 0$. Тогда точка A, начиная со второго периода функции $x(t)$, приближается к оси Ox и выполняется неравенство $\widetilde{h} \leqslant e^{\frac{-aLT}{4b^2}} h$, где h — расстояние от точки A до оси Ox в начале периода, а $\widetilde{h}$ — расстояние от точки A до оси Ox в конце периода.

Теорема 6. Пусть точка A в условиях «sweeping» процесса, описанного выше, в начальный момент времени $t_0 = 0$ лежит внутри или на эллипсе и имеет координаты $(v(t_0), h(t_0))$, причём $h(t_0) \neq 0$. Тогда точка A никогда не достигнет оси Ox.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

3.1. Доказательство теоремы 3.

По теоремам 1 и 2 решение данного «sweeping» процесса существует и единственно.

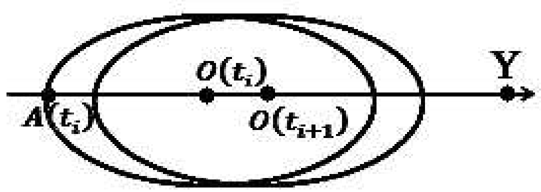

Рис. 1.

1. Рассмотрим отрезок времени $t_0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{4}$. Разобьем его на равные части точками $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = \frac{T}{4}$. На этом отрезке времени центр эллипса будет двигаться к точке Y. Тогда скалярное произведение $\overline{O(t_i)A(t_i)} \cdot \overline{O(t_i)O(t_{i+1})} < 0$ (рис. 1). Следовательно, точка A придет в движение и будет определяться предельным значением разностной схемы, приведенной выше. Значение $u(t_{i+1})$ будет определяться следующим образом:

$$u(t_{i+1}) = proj(A(t_i), C(t_{i+1}))$$

Эта проекция определяется точкой пересечения эллипса в момент времени $t = t_{i+1}$ с отрезком, соединяющем центр этого эллипса с точкой $A(t_i)$. То есть

$$u(t_{i+1}) = (x(t_{i+1}) - a, 0)$$

При $n \to \infty$, получим

$$u(t) = (x(t) - a, 0)$$

причем при $t = \frac{T}{4}$

$$u(\frac{T}{4}) = (x(\frac{T}{4}) - a, 0) = (a, 0)$$

2. Рассмотрим отрезок времени $\frac{T}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3T}{4}$. Разобьем его на равные части точками $\frac{T}{4} = t_n < t_{n+1} < \ldots < t_m = \frac{3T}{4}$. На этом отрезке времени центр эллипса будет двигаться к точке X. Видим, что вначале скалярное произведение $\overline{O(t_n)A(t_n)} \cdot \overline{O(t_n)O(t_{n+1})} > 0$ (рис. 2). Значит, при $t = t_{n+1}$ точка A останется на месте.

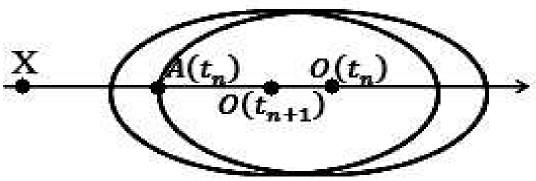

Рис. 2.

Таким образом, эллипс вновь «зацепит» точку, когда пройдет расстояние, равное $2a$. Это расстояние, в силу равенства (2), эллипс пройдет в момент времени $t = \frac{T}{2}$. На отрезке времени $[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}]$ точка остается на месте, то есть ее координаты равны $(a, 0)$. Рассмотрим отрезок времени $\frac{T}{2} = t_k \leqslant t \leqslant \frac{3T}{4}$. Разобьем его на равные части точками $\frac{T}{2} = t_k < t_{k+1} < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_m = \frac{3T}{4}$. Так как центр движется к точке X, то скалярное произведение
$\overline{O(t_j)A(t_j)} \cdot \overline{O(t_j)O(t_{j+1})} < 0$
Следовательно, точка A придет в движение и будет определяться предельным значением разностной схемы, приведенной выше. Значение $u(t_{j+1})$ будет определяться следующим образом:

$$u(t_{j+1}) = proj(A(t_j), C(t_{j+1}))$$

Эта проекция определяется точкой пересечения эллипса в момент времени $t = t_{j+1}$ с отрезком, соединяющем центр этого эллипса с точкой $A(t_j)$. То есть

$$u(t_{j+1}) = (x(t_{j+1}) + a, 0)$$

При $m \to \infty$, получим

$$u(t) = (x(t) + a, 0)$$

причем при $t = \frac{3T}{4}$

$$u(\frac{3T}{4}) = (x(\frac{3T}{4}) + a, 0) = (-a, 0)$$

3. Рассмотрим отрезок времени $\frac{3T}{4} \leqslant t \leqslant T$. Разобьем его на равные части точками $\frac{3T}{4} = t_m < t_{m+1} < \ldots < t_p = T$. На этом отрезке времени центр эллипса будет двигаться к началу координат. Значит скалярное произведение $\overline{O(t_m)A(t_m)} \cdot \overline{O(t_m)O(t_{m+1})} < 0$ (рис. 3). Следовательно, точка A останется на месте. Таким образом, эллипс, в силу равенства (2), достигнет точки A только в момент времени $t = T$. Следовательно, при $t \in [\frac{3T}{4}, T]$ точка имеет координаты $(-a, 0)$.

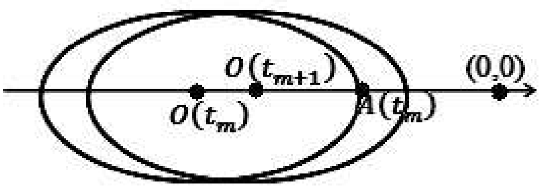

Рис. 3.

4. В момент времени $t = T$ система вернется в начальное положение. Так как функция $x(t)$ T–периодическая функция, то, далее, ситуация будет рассматриваться аналогично пунктам 1–3. Получаем функцию

$$u(t) = \begin{cases} (x(t) - a, 0), & \text{при } t \in [0, \frac{T}{4}), \\ (a, 0), & \text{при } t \in [\frac{T}{4}, \frac{T}{2}], \\ (x(t) + a, 0), & \text{при } t \in (\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}), \\ (-a, 0), & \text{при } t \in [\frac{3T}{4}, T]. \end{cases}$$

которая является T-периодической функцией. Теорема 3 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 4.

По теоремам 1 и 2 решение данного «sweeping» процесса существует и единственно.

1. Если точка A в начальный момент времени $t_0 = 0$ имеет координаты $(-a, 0)$, то теорема доказана (по теореме 3).

2. Рассмотрим случай, когда координаты точки A равна $(c, 0)$, где $c \neq -a$.

1) Рассмотрим отрезок времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_k$, где $t = t_k$ — время, за которое центр эллипса пройдет расстояние, равное $c + a$. Разобьем его на равные части точками $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < t_{p+1} < \ldots < t_k$. Возможны 2 случая:
а) $c = a$.
На этом отрезке времени центр эллипса будет двигаться к точке Y. Тогда скалярное произведение $\overline{O(t_i)A(t_i)} \cdot \overline{O(t_i)O(t_{i+1})} > 0$. Следовательно, точка A будет оставаться на месте. Таким образом, эллипс вновь «зацепит» точку A, когда пройдет расстояние, равное $c{+}a = a{+}a = 2a$, то есть, в силу равенства (2), в момент времени $t_k = \frac{T}{4}$. Тогда, при $t_k = \frac{T}{4}$ получим, что $u(\frac{T}{4}) = (c, 0) = (a, 0)$. Следовательно, далее, ситуация рассматривается аналогично пунктам 2-4 доказательства теоремы 3. Тогда, начиная со второго периода функции $x(t)$ решение «sweeping» процесса будет T-периодическим и определяться функцией

$$u(t) = \begin{cases} (x(t) - a, 0), & \text{при } t \in [0, \frac{T}{4}), \\ (a, 0), & \text{при } t \in [\frac{T}{4}, \frac{T}{2}], \\ (x(t) + a, 0), & \text{при } t \in (\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}), \\ (-a, 0), & \text{при } t \in [\frac{3T}{4}, T]. \end{cases}$$

б) $c \neq a$.
Таким образом, что точка A лежит внутри эллипса и, следовательно, остается на месте. Эллипс вновь «зацепит» точку A тогда, когда он пройдет расстояние, равное $c + a$, то есть при $t = t_k < \frac{T}{4}$.
Рассмотрим отрезок времени $t_k \leqslant t \leqslant t_n = \frac{T}{4}$. Разобьем его на равные части точками $t_k < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = \frac{T}{4}$. На этом отрезке времени центр эллипса будет двигаться к точке Y. Тогда скалярное произведение $\overline{O(t_i)A(t_i)} \cdot \overline{O(t_i)O(t_{i+1})} < 0$ (рис. 1).
Следовательно, точка A придет в движение и будет определяться предельным значением разностной схемы, приведенной выше. Значение $u(t_{i+1})$ будет определяться следующим образом:

$$u(t_{i+1}) = proj(A(t_i), C(t_{i+1}))$$

Эта проекция определяется точкой пересечения эллипса в момент времени $t = t_{i+1}$ с отрезком, соединяющем центр этого эллипса с точкой $A(t_i)$. То есть

$$u(t_{i+1}) = (x(t_{i+1}) - a, 0)$$

При $n \to \infty$, получим

$$u(t) = (x(t) - a, 0)$$

причем при $t = \frac{T}{4}$

$$u(\frac{T}{4}) = (x(\frac{T}{4}) - a, 0) = (a, 0)$$

Следовательно, далее, ситуация рассматривается аналогично пунктам 2-4 доказательства теоремы 3. Итак, начиная со второго периода функции $x(t)$ решение «sweeping» процесса будет T-периодическим и определяться функцией:

$$u(t) = \begin{cases} (x(t) - a, 0), & \text{при } t \in [0, \frac{T}{4}), \\ (a, 0), & \text{при } t \in [\frac{T}{4}, \frac{T}{2}], \\ (x(t) + a, 0), & \text{при } t \in (\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}), \\ (-a, 0), & \text{при } t \in [\frac{3T}{4}, T]. \end{cases}$$

3.3. Доказательство теоремы 5.

По теоремам 1 и 2 решение данного «sweeping» процесса существует и единственно. Рассмотрим ситуацию, когда точка A будет находиться в движении. Покажем, что это движение существует. Так как при $t = 0$ и $t = \frac{T}{4}$ соответствующие положения эллипса имеют только одну точку пересечения $(a, 0)$, а $h(t_0) \neq 0$ по условию, то существует по крайней мере один отрезок времени, при котором точка A будет находиться в движении. Рассмотрим это движение (рис. 4).

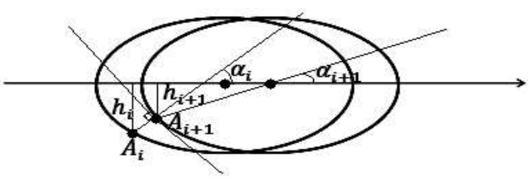

Рис. 4.

Уравнение эллипса в параметрическом виде имеет вид:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi + x(t), \\ y = b\sin\varphi, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Так как точка A_i принадлежит эллипсу, то она имеет координаты

$$A_i = \begin{cases} x = a\cos(180^0 + \alpha_i) + x(t_i), \\ y = b\sin(180^0 + \alpha_i). \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} x = -a\cos\alpha_i + x(t_i), \\ y = -b\sin\alpha_i. \end{cases}$$

Чтобы найти точку A_{i+1} нам нужно найти наименьшее расстояние до эллипса. Для этого нам нужно построить нормаль к эллипсу, которая будет проходить через точки A_i и A_{i+1}. Докажем это. Предположим, что это не так и отрезок A_iA_{i+1} не является нормалью к эллипсу в точке A_{i+1}. Рассмотрим рисунок 5. Пусть минимальное расстояние — это отрезок $[A_iA'_{i+1}]$. Рассмотрим треугольник $A_iA_{i+1}X$, где $|A_{i+1}X|$ принадлежит касательной в точке A_{i+1}. Так как (A_iA_{i+1}) нормаль, то этот треугольник будет прямоугольным с гипотенузой A_iX. Следовательно, $|A_iX| > |A_iA_{i+1})|$. А так как $|A_iA'_{i+1}| > |A_iX|$, то $|A_iA'_{i+1}| > |A_iA_{i+1}|$. В силу произвольности выбора точки A'_{i+1} получаем, что минимальное расстояние строится по нормали к эллипсу. Так как точка A_{i+1} принадлежит эллипсу, то она имеет координаты

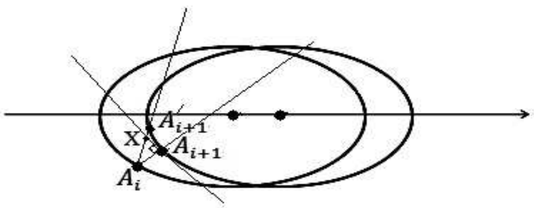

Рис. 5.

$$A_{i+1} = \begin{cases} x = a\cos(180^0 + \alpha_{i+1}) + x(t_{i+1}), \\ y = b\sin(180^0 + \alpha_{i+1}). \end{cases}$$

$$A_{i+1} = \begin{cases} x = -a\cos\alpha_{i+1} + x(t_{i+1}), \\ y = -b\sin\alpha_{i+1}. \end{cases}$$

Положим $\Delta = x(t_{i+1}) - x(t_i)$. Найдем уравнение нормали в точке A_{i+1}:

$$f'(\varphi) = \frac{b\cos\varphi}{-a\sin\varphi} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$$

$$f'(\beta) = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}a_{i+1}$$

$$y = \frac{b}{a}\operatorname{tg}a_{i+1}(x + a\cos a_{i+1} - x(t_{i+1})) - b\sin a_{i+1}$$

Так как точка A_i должна принадлежать этой нормали, то можем записать следующее уравнение:

$$-b\sin a_i = \frac{b}{a}\operatorname{tg}a_{i+1}(-a\cos a_i + x(t_i) + a\cos a_{i+1} - \Delta) - b\sin a_{i+1}$$

$$-b\sin a_i = \frac{b}{a}\operatorname{tg}a_{i+1}(-a\cos a_i + x(t_i) + a\cos a_{i+1} - \Delta) - b\sin a_{i+1}$$

$$-b\sin a_i = \frac{a^2}{b}\sin a_{i+1} - \frac{a^2}{b}\operatorname{tg}a_{i+1}\cos a_i - \frac{a}{b}\Delta\operatorname{tg}a_{i+1} - b\sin a_{i+1}$$

$$\frac{\sin a_i}{\sin a_{i+1}} = -\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{\cos a_i}{\cos a_{i+1}} + \frac{a}{b^2}\Delta\frac{1}{\cos a_{i+1}} + 1$$

$$\frac{\sin a_i}{\sin a_{i+1}} = 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b^2 \cos a_{i+1}}(a \cos a_i + \Delta)$$

Так как ординаты точек A_i и A_{i+1} равны $b \sin a_i$ и $b \sin a_{i+1}$ соответственно, то

$$\frac{h_i}{h_{i+1}} = \frac{-b \sin a_i}{-b \sin a_{i+1}} = \frac{\sin a_i}{\sin a_{i+1}}$$

Следовательно

$$\frac{h_i}{h_{i+1}} = 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b^2 \cos a_{i+1}}(a \cos a_i + \Delta)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть дан эллипс, заданный параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases}$$

$A = (0,0)$ — центр этого эллипса, (BC) — его касательная в точке C, а ω — угол между прямыми (AB) и (AC) (рис. 6). Используя уравнение эллипса можем записать, что $C = (a \cos \omega, b \sin \omega)$. Тогда направляющий вектор l прямой (AC) имеет координаты $(a \cos \omega, b \sin \omega)$. Направляющий вектор ρ касательной равняется

$$((a \cos \omega)', (b \sin \omega)') = (-a \sin \omega, b \cos \omega)$$

Скалярное произведение между векторами l и ρ равняется:

$$a \cos \omega(-a \sin \omega) + b \sin \omega b \cos \omega = \sin \omega \cos \omega (b^2 - a^2)$$

Так как точка C принадлежит третьей координатной четверти, то $\sin \omega \cos \omega > 0$, а, так как $a > b$, $b^2 - a^2 < 0$, следовательно

$$\sin \omega \cos \omega (b^2 - a^2) < 0$$

Значит угол BCA тупой. Вернемся к исходной задаче. По доказанному во вспомогательной задаче, получим $\angle a_i > \angle a_{i+1}$, следовательно, последовательность $\{a_i\}$ является монотонно убывающей последовательностью. Тогда $\{\cos a_i\}$ — монотонно возрастающая последовательность, то есть последовательность $\{\cos a_i\}$ — ограниченная последовательность, имеющая предел $\lim_{i \to \infty} \cos a_i = k$. Рассмотрим отношение $\frac{h_i}{h_{i+1}}$.

$$\frac{h_i}{h_{i+1}} = 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b^2 cos a_{i+1}}(a \cos a_i + \Delta) =$$

$$= 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2 \cos a_i}{b^2 cos a_{i+1}} + \frac{a\Delta}{b^2 \cos a_{i+1}}$$

Покажем, что отношение $\frac{h_i}{h_{i+1}}$ имеет конечный предел при $i \to \infty$. Рассмотрим следующий предел при $i \to \infty$:

$$\lim_{i \to \infty} (1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2 \cos a_i}{b^2 cos a_{i+1}} + \frac{a\Delta}{b^2 \cos a_{i+1}}) =$$

$$= 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2 k}{b^2 k} + \frac{a\Delta}{b^2 k} = 1 + \frac{a\Delta}{b^2 k} > 1$$

Тогда, при достаточно мелком разбиении (то есть при достаточно больших значениях i), получим, что отношение

$$\frac{h_i}{h_{i+1}} > 1 + \frac{a\Delta}{2b^2} > 1$$

То есть $h_i > (1 + \frac{a\Delta}{2nb^2})h_{i+1}$. на шаге разбиения n, имеем

$$\frac{h}{h_n} > (1 + \frac{a\Delta}{2nb^2})^n$$

$$\frac{h_n}{h} < (1 + \frac{a\Delta}{2nb^2})^{-n}$$

то есть $\frac{h_n}{h} = q(1 + \frac{a\Delta}{2nb^2})^{-n}$, где $0 < q < 1$ Тогда, при $n \to \infty$

$$\frac{h_n}{h} = \lim_{n\to\infty} q(1 + \frac{a\Delta}{2nb^2})^{-n} = qe^{-\frac{a\Delta}{2b^2}} < 1$$

значит $h_n < h$. Ордината точки A_2 будет уменьшаться. Рассмотрим второй период функции $x(t)$.

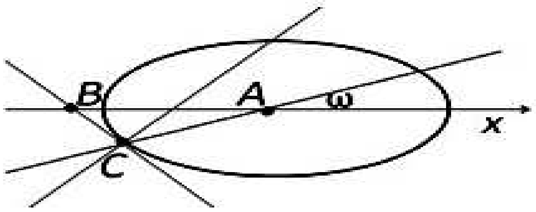

Рис. 6.

Пусть на отрезке времени $[T, \frac{5T}{4}]$ время движения точки A равняется $\overline{\tau}$. Обозначим через $\overline{h}$ расстояние от точки A до оси Ox в момент времени $t = \frac{5T}{4}$. Так как движение эллипса равномерно на отрезке $[\frac{T}{5T/4}$, то $\Delta = L\overline{\tau}$, следовательно

$$\overline{h} \leqslant e^{-\frac{aL\overline{\tau}}{2b^2}}h = e^{-\frac{aLT}{8b^2}}h$$

Пусть на отрезке времени $[\frac{5T}{4}, \frac{7T}{4}]$ время движения точки A равняется $\overline{\overline{\tau}}$. Обозначим через $\overline{\overline{h}}$ расстояние от точки A до оси Ox в момент времени $t = \frac{7T}{4}$. Так как движение эллипса равномерно на отрезке $[\frac{5T}{4}, \frac{7T}{4}]$, то $\Delta = L\overline{\overline{\tau}}$, следовательно

$$\overline{\overline{h}} \leqslant e^{-\frac{aL\overline{\overline{\tau}}}{2b^2}}\overline{h} \leqslant e^{-\frac{aL\overline{\overline{\tau}}}{2b^2}}e^{-\frac{aLT}{8b^2}}h \leqslant e^{-\frac{aLT}{8b^2}}e^{-\frac{aLT}{8b^2}}h \leqslant e^{-\frac{aLT}{4b^2}}h$$

Пусть на отрезке времени $[\frac{7T}{4}, 2T]$ время движения точки A равняется $\widetilde{\tau}$. Обозначим через $\widetilde{h}$ расстояние от точки A до оси Ox в момент времени $t = 2T$. Так как движение эллипса равномерно на отрезке $[\frac{7T}{4}, 2T]$, то $\delta = L\widetilde{\tau}$, следовательно

$$\widetilde{h} \leqslant e^{-\frac{aL\widetilde{\tau}}{2b^2}}\overline{\overline{h}} \leqslant e^{-\frac{aL\widetilde{\tau}}{2b^2}}e^{-\frac{aLT}{4b^2}}h \leqslant e^{-\frac{aLT}{4b^2}}h$$

На следующих периодах ситуация будет аналогична. Следовательно, точка A, начиная со второго периода функции $x(t)$, приближается к оси Ox и выполняется неравенство $\widetilde{h} \leqslant e^{-\frac{aLT}{4b^2}}h$, где h — расстояние от точки A до оси Ox в начале периода, а $\widetilde{h}$ — расстояние от точки A до оси Ox в конце периода.

3.4. Доказательство теоремы 6.

Из доказательства теоремы 5 имеем верное равенство:

$$\frac{h_n}{h} = \lim_{n\to\infty} q(1 + \frac{a\Delta}{2b^2})^{-n} = qe^{-\frac{a\Delta}{2b^2}} > 0$$

где h — расстояние от точки A до оси Ox в начальный момент времени, а h_n — расстояние от точки A до оси Ox в момент времени, за которое центр эллипса продвинется по оси Ox на расстояние Δ. То есть

$$h_n = qe^{-\frac{a\Delta}{2b^2}}h$$

где $0 < q < 1$. Так как функция $y = e^x$ никогда не равняется нулю, $q \neq 0$, $h \neq 0$ по условию, то и $h_n \neq 0$, следовательно, точка A никогда не достигнет оси Ox.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kunze, M. An Introduction to Moreau's Sweeping Process / M. Kunze, M. Marques. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2000. — 60 p.

2. Marques, M. Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems : shocks and dry friction / M. Marques — Basel; Boston; Berlin : Birkhauser, 1993. — 179 p.

3. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости : Учебное пособие, 3-е изд., стер. — СПб. : Изд-во «Лань», 2008. — 480 с.

4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. Ф. Фомин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 572 с.

5. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.

6. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Изд-во «Лань», 2009. — 656 с.

REFERENCES

1. Kunze M., Marques M. An Introduction to Moreau's Sweeping Process. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000, 60 p.

2. Marques M. Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems: shocks and dry friction. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1993, 179 p.

3. Demidovich B.P. Lectures on mathematical theory of stability. [Demidovich B. P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti]. SPb.: «Lan'», 2008, 480 p.

4. Kolmogorov A.N., Fomin S.F. Elements of the theory of functions and functional analysis. [Kolmogorov A.N., Fomin S.F. Elementi teorii funktsii I funktsional'nogo analiza]. Moscow, 2012, 572 p.

5. Krasnoselskii M.A., Pokrovskii A.V. System with hysteresis. [Krasnoselskii M.A., Pokrovskii A.V. Sistemi s gisterezisom]. Moscow: Nauka, 1983, 272 p.

6. Fihtengolts G.M. A course of differential and integral calculus. V. 3. [Fihtengolts G.M. Kurs integeal'nogo i differentsial'nogo ischislenija. T. 3]. SPb.: «Lan'», 2009, 656 p.

Восковская Наталья Игоревна, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: natashavskvskaja@rambler.ru
Тел.: +7(950)767–77–14

Voskovskaya Natalia Igorevna, postgraduate student of the Department of functional analysis and operator equations of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: natashavskvskaja@rambler.ru
Tel.: +7(950)767–77–14