УДК 517.927

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 23.11.2016 г.

Аннотация. Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассматривается краевая задача

$$x''(t) + \sum_{i-1}^{n} a_i(t)(T_i x)^{\frac{p}{q}}(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad p,q \in (1,\infty) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \\ \alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(5) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(5) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i,j = 1,2)$ — действительные числа, $a_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ — положительные суммируемые функции, $T_i : C \to L_p$ $(i = \overline{1,n},\ 1 < p < \infty)$ — линейные положительные (монотонные) непрерывные операторы.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

В работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения для краевой задачи (1)–(2).

Ключевые слова: конус, полуупорядоченность, оператор, положительное решение, краевая задача.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE POSITIVE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER NONLINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

G. E. Abduragimov

Abstract. Let's denote space $C[0,1]$ through C, space $L_p(0,1)$ through L_p $(1 < p < \infty)$ and space of functions, determined on $[0,1]$ with absolute uninterrupted derivative through W^2.

Boundary value

$$x''(t)+\sum_{i-1}^{n}a_i(t)(T_ix)^{\frac{p}{q}}(t)=0,\quad 0<t<1,\quad p,q\in(1,\infty) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x(0)+\alpha_{12}x(1)+\beta_{11}x'(0)+\beta_{12}x'(1)=0,\\ \alpha_{21}x(0)+\alpha_{22}x(1)+\beta_{21}x'(0)+\beta_{22}x'(1)=0,\end{aligned} \tag{4}$$

where α_{ij}, β_{ij} $(i,j=1{,}2)$ are real numbers, $a_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ is a positive added functions, $T_i:C\to L_p$ $(i=\overline{1,n},\ 1<p<\infty)$ is a linear positive (monotone) uninterrupted operators.

Under the positive solution of the problem (1)–(2) we shall consider the function $x\in W^2$, positive in the interval (0,1), satisfying almost everywhere the equation (1) and boundary conditions (2).

On the basis of the theory of semi regulated spaces the sufficient conditions of solving the boundary value problem (1)–(2) are received in this article.

Keywords: cone, semi regulation, operator, positive solution, boundary value problem.

Вопросам исследования существования и единственности положительных решений для функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, например, [1]–[11]. Практически во всех вышеупомянутых работах естественным орудием исследования положительных решений являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

В настоящей работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения второго порядка.

Обозначим через C пространство $C[0{,}1]$, через L_p $(1<p<\infty)$ — пространство $L_p(0{,}1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на [0,1], с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t)+\sum_{i-1}^{n}a_i(t)(T_ix)^{\frac{p}{q}}(t)=0,\quad 0<t<1,\quad p,q\in(1,\infty) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x(0)+\alpha_{12}x(5)+\beta_{11}x'(0)+\beta_{12}x'(5)=0,\\ \alpha_{21}x(0)+\alpha_{22}x(5)+\beta_{21}x'(0)+\beta_{22}x'(5)=0,\end{aligned} \tag{6}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i,j=1{,}2)$ — действительные числа, $a_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ — положительные суммируемые функции, $T_i:C\to L_p$ $(i=\overline{1,n},\ 1<p<\infty)$ — линейные положительные (монотонные) непрерывные операторы.

Под положительным решением задачи (5)–(2) будем понимать функцию $x\in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (5) и краевым условиям (2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (5)–(2) интегральное уравнение

$$x(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)\sum_{i=1}^{n}a_i(s)(T_ix)^{\frac{p}{q}}(s)ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{7}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2).

Введем обозначения

$$\alpha \equiv \frac{\alpha_{12}+\beta_{11}+\beta_{12}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}, \quad \beta \equiv \frac{\alpha_{22}+\beta_{21}+\beta_{22}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}.$$

При выполнении условий

A) $\alpha \neq \beta$, $\alpha_{11}+\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{21}+\alpha_{22} \neq 0$;

B) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha)-\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right]<0$;

C) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha)-\frac{\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right]>0$;

D) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha-\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta\right]>0$;

E) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta+1\right]<0$

как показано в [12], функция Грина существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s)=\begin{cases} a_1(s)(t-\alpha)+a_2(s)(t-\beta),\ 0\leqslant t\leqslant s; \\ b_1(s)(t-\alpha)+b_2(s)(t-\beta),\ s\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

где

$$a_1(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta-\frac{\alpha_{22}s+\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\right], \quad a_2(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{12}s+\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}-\alpha\right], \quad s\in[0,1],$$

$$b_1(s)=\frac{\alpha_{21}s-\beta_{21}}{(\beta-\alpha)(\alpha_{21}+\alpha_{22})}, \quad b_2(s)=\frac{\alpha_{11}s-\beta_{11}}{(\alpha-\beta)(\alpha_{11}+\alpha_{12})} \quad , \quad s\in[0,1].$$

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)\sum_{i=1}^n a_i(s)(T_ix)^{\frac{p}{q}}(s)ds, 0<t<1, \tag{8}$$

действует в пространстве C, вполне непрерывен ([13], с. 161) и оставляет инвариантным конус $\widetilde{K}$ неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$\min_{t\in[0,1]} x(t)\geqslant \frac{m}{M}\max_{t\in[0,1]} x(t)=\frac{m}{M}\left\|x\right\|_C,$$

где m и M представляют собой нижние и верхние оценки функции Грина.

Теорема. Краевая задача (5)–(2) при $\frac{p}{q}<1$ имеет единственное положительное решение, если

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{p}{q}+2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^1 a_i(s)(T_i1)^{p/q}(s)ds\leqslant\sum_{i=1}^n\left\|a_i\right\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\left\|T_i\right\|_{L_p}^{\frac{p}{q}}.$$

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u\prec v$ и $u\bar{\prec}v$ в конусе $\widetilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(t)\leqslant v(t)$ и $u(t)>v(t)$, $t\in[0,1]$.

Покажем, что найдется такое число $r>0$, что при $x\in\widetilde{K}$, $\left\|x\right\|_C\leqslant r$ и $x\neq 0$

$$Ax\bar{\prec}x. \tag{9}$$

Действительно, в силу монотонности операторов $T_i: C\to L_p$ $(i=\overline{1,n})$ имеем

$$(Ax)(t)\geqslant m\int\limits_0^1\sum_{i=1}^n a_i(s)\left(T_ix\right)^{p/q}(s)ds\geqslant\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}}\left\|x\right\|_C^{p/q}\int\limits_0^1\sum_{i=1}^n a_i(s)\left(T_i1\right)^{p/q}(s)ds\geqslant$$

$$\geqslant \frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}} r^{\frac{p}{q}-1} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 a_i(s) \left(T_i 1\right)^{p/q}(s) ds \cdot x(t).$$

Отсюда, при $0 < r < \left(\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}} \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 a_i(s) \left(T_i 1\right)^{p/q}(s) ds \right)^{\frac{q}{q-p}}$ следует (9).

Найдем теперь $R > 0$ такое, что для всех $\varepsilon > 0$ при $x \in \widetilde{K}$ и $\|x\|_C \geqslant R$

$$Ax \bar{\succ} (1+\varepsilon) x. \tag{10}$$

Имеем

$$(Ax)(t) \leqslant M \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i(s) \left(T_i x\right)^{p/q}(s) ds \leqslant M \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 a_i(s) \left(T_i x\right)^{p/q}(s) ds \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \|T_i x\|_{L_p}^{p/q} \leqslant M \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \gamma_i^{p/q} \|x\|_C^{p/q} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \gamma_i^{p/q} R^{\frac{p}{q}-1} \|x\|_C \leqslant \frac{M^2}{m} \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L_{\frac{q}{q=1}}} \gamma_i^{p/q} R^{\frac{p}{q}-1} \cdot x(t)$$

где γ_i — норма оператора $T_i : C \to L_p$. Отсюда, при $R > \left(\frac{M^2}{m} \sum\limits_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \gamma_i^{p/q} \right)^{\frac{q}{q-p}}$ следует (10).

Нетрудно проверить, что $r \leqslant R$. Из (9) и (10) следует, что положительный оператор (4) является сжатием конуса $\widetilde{K}$. Тогда согласно теореме ([14], с. 145) о сжатии конуса оператор (4) имеет в конусе $\widetilde{K}$ пространства C по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (5)–(2).

Для доказательства единственности положительного решения, покажем, что вогнутый и монотонный оператор A, определяемый равенством (4) является u_0–вогнутым ([14], с. 199).

Действительно, для любого положительного числа $\lambda \in (0,1)$ в силу монотонности операторов $T_i : C \to L_p$ $(i = \overline{1,n})$, имеем

$$(A(\lambda x))(t) = \int_0^1 G(t,s) \sum_{i=1}^{n} a_i(s) (T_i (\lambda x)^{\frac{p}{q}})(s) ds = \lambda^{\frac{p}{q}} (Ax)(t) = \lambda^{\frac{p}{q}-1} \cdot \lambda (Ax)(t).$$

Положив в определении u_0–вогнутости $\eta = \lambda^{\frac{p}{q}-1} - 1$ и взяв в качестве $u_0(t) \equiv 1$ в соответствии с теоремой ([14], с. 200) краевая задача (5)–(2) имеет единственное положительное решение.

Замечание. В линейном случае $\frac{p}{q} = 1$ существование положительного решения краевой задачи (5)–(2) следует из ([15]).

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(S_{h_i} x\right)^{\frac{p}{q}}(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & x(0) - 9x'(0) = 0, \\ & 10x(0) - 99x'(0) - x'(5) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где h_i $(i = 1{,}2,\ldots,n)$ — заданные действительные числа из интервала $(0,1)$ и $(S_{h_i}x)(t) = \begin{cases} 0, 0 < t < h_i, \\ x(t-h_i), h_i < t < 1. \end{cases}$ Несложно проверить, что функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (10) существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} 0{,}1(t+9),\ 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (-9{,}9-s)(t+9)+(s+9)(t+10),\ s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

причем $0{,}9 \leqslant G(t,s) \leqslant 1$, $(t,s \in [0{,}1])$.

Существование и единственность положительного решения краевой задачи (11)–(8) как следует из вышеприведенных утверждений возможно при выполнения условия $(0{,}9)^{\frac{p}{q}+2}\sum\limits_{i=1}^{n}(1-h_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}(1-h_i)^{\frac{1}{q}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев, Н. В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2009. — вып. 1. — С. 3–23.

2. Wong, F. H. Existence of positive solutions for second order functional differential equations / F. H. Wong, S. P. Wang, T. G. Chen // Computers & Mathematics with Applications. — 2008. — V. 56, iss. 10. — P. 2580–2587.

3. Ma, R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations / R. Ma // Appl. Math. Comput. — 2007. — V. 193, № 1. — P. 66–72.

4. Zima, M. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces / M. Zima // Journal of Inequalities and Applications. — 2000. — V. 6, iss 3. — P. 359–371.

5. Agarwal, R. P. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations / R. P. Agarwal, S. Stanek // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № . — P. 755–770.

6. Existence of positive solutions for functional equations / C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong // Computer & Mathematics with Applications. — 2000. — V. 40, iss. 6–7. — P. 783–792.

7. Sun Y. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations / Y. Sun, M. Han, L. Debnath // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — V. 190, iss. 1. — P. 699–704.

8. Weng, P. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE / P. Weng, D. Jiang // Computers & Mathematics with Applications. — 1999. — V. 37, iss. 10. — P. 1–9.

9. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations / C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — V. 297, № 1. — P. 14–23.

10. Yin, F. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations / F. Yin, F. Fugi, Y. Li // J. Math. Study. — 2002. — V. 35, № 4. — P. 364–370.

11. Agarwal, R. Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations / R. Agarwal, S. Stanmk // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № 4. — P. 755–770.

12. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

13. Крейн, С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1972. – 544 с.

14. Красносельский, М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

15. Абдурагимов, Г. Э. О существовании положительного решения краевой задачи для одного линейного функционально–дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 57–62.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Functional differential equations and applications. [Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Funkcional'no-differencial'nye uravneniya i ix prilozheniya]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika — Bulletin of Udmurt University. Mathematics*, 2009, iss. 1, pp. 3–23.

2. Wong F.H., Wang S.P., Chen T.G. Existence of positive solutions for second order functional differential equations. Computers & Mathematics with Applications, 2008, vol. 56, iss. 10, pp. 2580–2587.

3. Ma R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations. Appl. Math. Comput., 2007, vol. 193, no. 1, pp. 66–72.

4. Zima M. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces. Journal of Inequalities and Applications, 2000, vol. 6, iss. 3, pp. 359–371.

5. Agarwal, R.P., Stanek S. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. Appl., 2007, vol. 16, no. 4, pp. 755–770.

6. Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for functional equations. Computer & Mathematics with Applications, 2000, vol. 40, iss. 6–7, pp. 783–792.

7. Sun Y., Han M., Debnath L. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2007, vol. 190, iss. 1, pp. 699–704.

8. Weng P., Jiang D. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE. Computers & Mathematics with Applications. 1999, vol. 37, iss. 10, pp. 1–9.

9. Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 2004, vol. 297, no. 1, pp. 14–23.

10. Yin F., FugiF., Li Y. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations. J. Math. Study, 2002, vol. 35, no. 4, pp. 364–370.

11. Agarwal R., Stanmk S. Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. Appl., 2007, vol. 16, no. 4, pp. 755–770.

12. Naimark M.A. Linear differential operators. [Najmark M.A. Linejnye differencial'nye operatory]. Moscow, 1969, 528 p.

13. Krein S.G. Functional analysis. [Krejn S.G. Funkcional'nyj analiz]. Moscow, 1972, 544 p.

14. Krasnosel'skii M.A. Positive solutions of operator equations. [Krasnosel'skij M. A. Polozhitel'nye resheniya operatornyx uravnenij]. Moscow, 1962, 396 p.

15. Abduragimov G.E. On the existence of the positive solution of a boundary value problem for a second-order linear functional-differential equation. [Abduragimov G.E'. O sushhestvovanii polozhitel'nogo resheniya kraevoj zadachi dlya odnogo linejnogo funkcional'no–differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2, pp. 57–62.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико–математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и информатики Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия
E-mail: gusen_e@mail.ru
Тел.: +7(8722) 92–25–87

Abduragimov Gusen Elderhanovich, Candidate of Physical–Mathematical Sciences, Assistant Professor, The Chair of Applied Mathematics and Informatics, Makhachkala, Russia
E-mail: gusen_e@mail.ru
Tel.: +7(8722) 92–25–87