УДК 537.871

ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА-ВИХЕРТА В ФОРМАЛИЗМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

М. И. Пиралли, Э. И. Казанчян, А. Ф. Клинских

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.06.2017 г.

Аннотация. Формализм дифференциальных форм является важным компонентом геометризации физики. Использование указанного формализма позволяет получать соотношения между физическими величинами, не зависящие от конкретной координатной системы. Кроме того, формализм дифференциальных форм позволяет с единой точки зрения подойти к геометрии электромагнетизма и гравитации. В работе обсуждается применение дифференциальных форм в электродинамике для потенциалов Лиенара-Вихерта. В качестве примера рассмотрен вид тензора электромагнитного поля в цилиндрических координатах. Физическая иллюстрация этой задачи в формализме дифференциальных форм подчёркивает важность геометрического аппарата, как одного из инструментов теоретической физики. В статье также подробно прослежена связь классического понятия дифференциала, используемого в стандартных курсах математического анализа, с понятием дифференциальной формы.

Ключевые слова: тензор электромагнитного поля, дифференциальные формы, потенциалы Лиенара-Вихерта.

THE LIENARD-WIECHERT POTENTIALS IN THE FORMALISM OF DIFFERENTIAL FORMS

M. I. Peerally, E. I. Kazanchyan, A. F. Klinskikh

Abstract. Differential forms formalism is an important component in the geometrization of physics. The use of this formalism makes it possible to obtain relations between physical quantities that do not depend on a particular coordinate system. In addition, differential forms formalism makes it possible from a unified point of view to approach the geometry of electromagnetism and gravity. The paper discusses the application of differential forms in electrodynamics for the Liénard-Wiechert potentials. As an example, the form of the electromagnetic field tensor in cylindrical coordinates is considered. The physical demonstration of this problem in the differential forms formalism emphasizes on the importance of this geometric apparatus as one of the tools of theoretical physics. The article also details the connection between the classical concepts of differentials used in standard courses of calculus, with the notion of differential forms.

Keywords: the tensor of electromagnetic field, differential forms, Lienard–Wiechert potentials.

ВВЕДЕНИЕ

Решение физических и математических задач мы чаще всего проводим в конкретных системах координат. При этом выбор соответствующих координат диктуется удобством решения. Но такой подход имеет недостатки. Необходимо чётко различать, какие особенности ответа привнесены данной координатной системой, а какие относятся к рассматриваемому физическому явлению. Этой трудности можно избежать, если изначально решать задачу, используя бескоординатный подход. Для этих целей хорошо подходит аппарат дифференциальных форм. При желании, можно отобразить получающиеся результаты в любой системе координат.

Отметим, что гамильтонову механику нельзя понять без дифференциальных форм [1, стр. 142]. Это важно заметить, т. к. гамильтонова точка зрения удобна при решении задач механики, оптики и квантовой механики. Формализм дифференциальных форм позволяет с единой точки зрения подойти к геометрии электромагнетизма и гравитации ([1], [2], [3], [4]).

В данной статье продемонстрировано применение дифференциальных форм в электродинамике. Показано, как можно получить явный вид для потенциалов Лиенара–Вихерта и тензора электромагнитного поля с применением указанного математического аппарата. Физическая иллюстрация этой задачи в формализме дифференциальных форм подчёркивает важность геометрического аппарата, как одного из инструментов теоретической физики.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Прежде чем определить понятие дифференциальной формы, рассмотрим известное понятие дифференциала под несколько другим углом.

Рассмотрим кривую, задаваемую уравнениями $\vec{x} = \vec{x}(t)$, (t — параметр) и начальными условиями $\vec{x}(0) = \vec{x}$, $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{\xi}$ — касательный вектор к кривой (рис. 1).

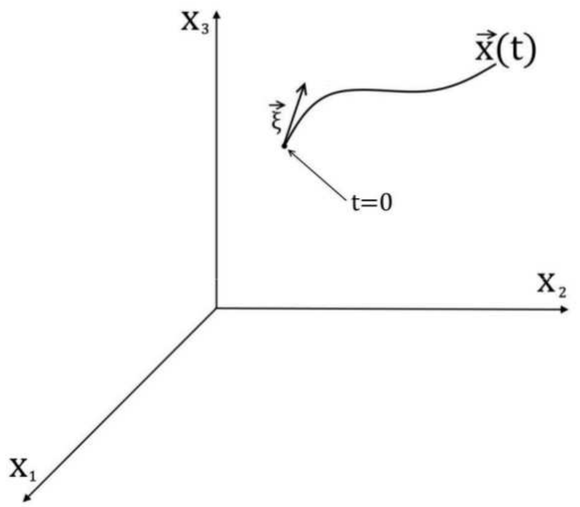

Рис. 1. *Кривая $\vec{x}(t)$ с касательным вектором $\vec{\xi}$*

По определению (см. [1, § 34]), дифференциал $df_{\vec{x}}$ функции $f(x_1, x_2, x_3)$ в точке $\vec{x}$ есть линейное отображение произвольного касательного вектора $\vec{\xi}$ (заданного в этой точке) на числовую прямую, осуществляемое по следующему правилу

$$df_{\vec{x}}(\vec{\xi}) = \frac{d}{dt} f(\vec{x}(t))\Big|_{t=0}. \tag{1}$$

В силу того, что производная функции $f(\vec{x}(t)) = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ по параметру t вычисляется при значении $t = 0$, для нас важна бесконечно малая окрестность точки $\vec{x}(t)$. В этой окрестности кривую $\vec{x}(t)$ можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{x} + t\vec{\xi}(t), \tag{2}$$

т. е. аппроксимировать прямой. Тогда функция $f(\vec{x}(t))$ в интересуемой нас окрестности будет зависеть от параметра t следующим образом

$$f(\vec{x}(t)) = f(\vec{x} + t\vec{\xi}) = f(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, x_3 + t\xi_3), \tag{3}$$

где ξ_i — компоненты вектора $\vec{\xi}$. Тогда, производную в формуле (1) можно вычислять по формуле для производной сложной функции

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_i, \tag{4}$$

$$df_{\vec{x}}(\vec{\xi}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_i. \tag{5}$$

Приведём два частных случая формулы (5).

1) Возьмём в качестве функции $f(x_1, x_2, x_3)$ какую-то из координат, например $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Тогда применяя формулу (5) мы получим

$$dx_1(\vec{\xi}) = \xi_1, \tag{6}$$

т. е. значение дифференциала i–координаты точки на касательном векторе $\vec{\xi}$ есть i–ая координата этого вектора.

2) Рассмотрим функцию одной переменной, т. е. $f(x)$ (пространство аргументов одномерно). В качестве вектора $\vec{\xi}$ возьмём вектор $\Delta\vec{x}$, который имеет единственную координату Δx (приращение аргумента). Тогда из формулы (5) для дифференциала функции $f(x)$ в произвольной точке x получим выражение

$$df_x(\vec{\xi}) = df_x(\Delta\vec{x}) = \frac{df}{dx}\Delta x. \tag{7}$$

Перейдём к определению понятия дифференциальной формы (см., напр. [2, глава 2], [3, глава 2], [5]). Рассмотрим произвольный вектор $\vec{A}$. Разложим его по базису $\vec{e}_i$, соответствующему ортогональным криволинейным координатам q_i (в частном случае, для декартовых координат будем пользоваться обозначением x_i), т. е.

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{e}_i, \tag{8}$$

где $\vec{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ — базисный вектор, соответствующий координате q_i, а h_i — коэффициент Ламэ. Дифференциальную форму 1-ой степени, или просто 1-форму $\omega^1_{\vec{A}}$, соответствующую вектору $\vec{A}$, определим как

$$\omega^1_{\vec{A}} = \sum_{i=1}^{3} A_i h_i \, dq^i, \tag{9}$$

где A_i — компоненты вектора $\vec{A}$ в базисе $\vec{e}_i$, а dq^i — базисные 1-формы, которые имеют следующий смысл: 1-форма dq^i на произвольном векторе $\vec{\xi}$ даёт i–ую координату этого вектора, делённую на соответствующий коэффициент Ламэ, т. е.

$$dq^i(\vec{\xi}) = \frac{\xi_i}{h_i}. \tag{10}$$

Формула (10) есть обобщение формулы (6) на случай произвольных ортогональных криволинейных координат. Из этой формулы и формулы (9) получаем, что 1-форма $\omega^1_{\vec{a}}$ на произвольном векторе $\vec{\xi}$ определяется следующим образом

$$\omega^1_{\vec{A}}(\vec{\xi}) = \sum_{i=1}^{3} A_i h_i dq^i(\vec{\xi}) = \sum_{i=1}^{3} A_i \xi_i. \tag{11}$$

Из формулы (11) также видно, что

$$\omega^1_{\vec{A}}(\vec{e}_i) = A_i. \tag{12}$$

Видно, что дифференциал функции $df_{\vec{x}}$, определённый ранее — 1-форма, соответствующая градиенту функции $f(x_1, x_2, x_3)$, т. е. $df_{\vec{x}} = \omega^1_{\nabla f}$. Согласно формуле (11), $\omega^1_{\nabla f}$ на произвольном векторе $\vec{\xi}$ даёт производную функции f по направлению вектора $\vec{\xi}$

$$\omega^1_{\nabla f}(\vec{\xi}) = \vec{\xi}\nabla f. \tag{13}$$

Иллюстрацией формулы (13) в физике может служить работа. Действительно, если в формуле (13) положим

$$f = U, \vec{\xi} = d\vec{r}, \vec{F} = -\nabla U, \tag{14}$$

где U — потенциальная энергия частицы в поле, а $d\vec{r}$ — бесконечно малое перемещение, совершаемое частицей под действием силы $\vec{F}$, то элементарная работа δA этой силы будет определяться следующей формулой

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla U\, d\vec{r} = -\omega^1_{\nabla U}(d\vec{r}). \tag{15}$$

Дифференциальную форму 2-ой степени, или просто 2-форму ω^2 определим как (см., напр., [3, глава 4])

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \omega^2_{ij} dq^i \wedge dq^j, \tag{16}$$

где $dq^i \wedge dq^j$ — базисные 2-формы, которые имеют следующий смысл: 2-форма $dq^i \wedge dq^j$ на произвольных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ даёт следующее выражение (см., напр., [3, глава 4])

$$dq^i \wedge dq^j(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{h_i h_j}(a_i b_j - a_j b_i). \tag{17}$$

Используя формулы (16) и (17) можно показать, что

$$\omega^2(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\omega^2_{ij} a_i b_j}{h_i h_j}. \tag{18}$$

Коснёмся ещё одного важного понятия из теории дифференциальных форм. 2-форму можно получить, действуя на 1-форму оператором внешнего дифференцирования d (см., напр., [3, глава 4])

$$(d\omega^1_{\vec{A}})_{ij} = \omega^2_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}. \tag{19}$$

Формула (19) соответствует декартовой системе координат. Для случая произвольных криволинейных координат её нужно обобщить следующим образом

$$(d\omega^1_{\vec{A}})_{ij} = h_j \frac{\partial A_j}{\partial q^i} + A_j \frac{\partial h_j}{\partial q^i} - h_i \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - A_i \frac{\partial h_i}{\partial q^j}. \tag{20}$$

ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА-ВИХЕРТА

Рассмотрим задачу о нахождении структуры поля излучения произвольным образом движущейся заряженной частицы, пользуясь формализмом дифференциальных форм. Её решение сводится к нахождению компонент 2-формы электромагнитного поля $F_{\alpha\mu}$, который определяется, как внешняя производная от 1-формы потенциала $\omega^1_A = \sum\limits_{\nu=0}^{3} A_\nu dx^\nu$ (см., напр., [2], [3, глава 5]), где A_ν — ковариантные компоненты 4-потенциала электромагнитного поля $A = (\varphi, \vec{A})$:

$$F_{\alpha\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu} = A_{\mu,\alpha} - A_{\alpha,\mu} = \partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha. \tag{21}$$

В системе отсчёта, в которой в момент времени t' частица покоится, полев точке наблюдения в момент t дается просто кулоновским потенциалом (см. [6, глава 8]), т. е.

$$\varphi = \frac{1}{R(t')} = \frac{e}{c(t-t')}, \vec{A} = 0, \tag{22}$$

где $R(t')$ — расстояние от заряда до точки наблюдения, e — элементарный заряд, c — скорость света в вакууме. Выражение для потенциалов в произвольной системе отсчета мы получим, написав такую 1-форму, которая бы при скорости $\vec{u} = 0$ давала для φ и $\vec{A}$ значения (22). Можно убедиться, что он равен (см. [6, глава 8])

$$A_\mu = e \sum_{\nu=0}^{3} \frac{u_\mu}{R^\nu u_\nu}, \tag{23}$$

где $R^\nu = (R, \vec{R}) = (c(t - t'), \vec{r} - \vec{r}')$ ($\vec{r}$ и $\vec{r}'$ — радиус-векторы точки наблюдения и заряда), $u_\nu = (\gamma c, -\gamma \vec{u})$ ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ — лоренц-фактор) Подставим формулу (23) в выражение (21) и продифференцируем. В итоге получим

$$F_{\alpha\mu} = \frac{e}{\|Ru\|^2} \sum_{\nu=0}^{3} \{R^\nu u_{\mu,\alpha} u_\nu - R^\nu u_{\alpha,\mu} u_\nu + R^\nu{}_{,\mu} u_\alpha u_\nu - R^\nu{}_{,\alpha} u_\mu u_\nu + R^\nu u_\alpha u_{\nu,\mu} - R^\nu u_\mu u_{\nu,\alpha}\}. \tag{24}$$

Мы ввели обозначение $\|Ru\|^2$ для выражения

$$\|Ru\|^2 = \left(\sum_{\nu=0}^{3} R^\nu u_\nu\right)^2 = \gamma^2 (Rc - \vec{R}\vec{u})^2. \tag{25}$$

Каждое слагаемое в скобках в выражении (24) содержит дифференцирование компонент некоторого тензора по компонентам 4-радиус-вектора. Пусть M — произвольный тензор, зависящий от t'. Тогда

$$\partial_\mu M = \frac{\partial M}{\partial x^\mu} = \frac{\partial M}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}. \tag{26}$$

Определим 4 – вектор L^μ, ковариантные компоненты которого определяются следующим образом

$$L_\mu = \frac{\partial t'}{\partial x^\mu} = \frac{1}{Rc - \vec{R}\vec{u}} (R, -\vec{R}) = \frac{1}{Rc - \vec{R}\vec{u}} R_\mu. \tag{27}$$

Подставим формулу (27) в (26)

$$\partial_\mu M = \frac{\partial M}{\partial t'} L_\mu = \frac{\partial M}{\gamma \partial \tau} L_\mu, \tag{28}$$

где $\partial\tau = \frac{ds}{c}$.

Используя формулу (28) можно вычислить все слагаемые в выражении (24). Например для слагаемого $R^\mu u_{\mu,\alpha} u_\nu$ получим

$$\sum_{\nu=0}^{3} R^\nu u_{\mu,\alpha} u_\nu = a_\mu L_\alpha (Rc - \vec{R}\vec{u}), \tag{29}$$

где $a_\mu = \frac{\partial u_\mu}{\partial \tau} = (c\gamma\dot{\gamma}, -\gamma^2 \vec{a} - \vec{u}\gamma\dot{\gamma})$ — 1-форма ускорения. Остальные слагаемые вычисляются аналогично. В результате для 2-формы электромагнитного поля получим следующее выражение

$$F_{\alpha\mu} = \left[a_\mu R_\alpha - a_\alpha R_\mu + \frac{u_\mu R_\alpha c^2}{\gamma(Rc - \vec{R}\vec{u})} - u_\mu R_\alpha \dot{\gamma} + \frac{u_\mu R_\alpha \vec{R}\vec{a}\gamma}{Rc - \vec{R}\vec{u}} - \frac{u_\alpha R_\mu c^2}{\gamma(Rc - \vec{R}\vec{u})} + u_\alpha R_\mu \dot{\gamma} - \right.$$
$$\left. - \frac{u_\alpha R_\mu \vec{R}\vec{a}\gamma}{Rc - \vec{R}\vec{u}}\right] \frac{e}{\gamma^2 (Rc - \vec{R}\vec{u})^2}, \tag{30}$$

где $\dot{\gamma} = \frac{\partial\gamma}{\partial t'}$. Выражение (30) даёт в общем виде решение задачи о структуре поля, создаваемого произвольным образом движущейся заряженной частицы.

Вычислим при помощи формулы (30) компоненту E_x напряжённости электромагнитного поля. Для этого воспользуемся тем, что $E_x = F_{01}$:

$$E_x = F_{01} = \left[a_1R_0 - a_0R_1 + \frac{u_1R_0c^2}{\gamma(Rc - \vec{R}\vec{u})} - u_1R_0\dot{\gamma} + \frac{u_1R_0\vec{R}\vec{a}\gamma}{Rc - \vec{R}\vec{u}} - \frac{u_0R_1c^2}{\gamma(Rc - \vec{R}\vec{u})} + u_0R_1\dot{\gamma} - \right.$$
$$\left. - \frac{u_0R_1\vec{R}\vec{a}\gamma}{Rc - \vec{R}\vec{u}}\right] \frac{e}{\gamma^2(Rc - \vec{R}\vec{u})^2} = \left[-\gamma^2a_xR - \dot{\gamma}R + R_x\gamma\dot{\gamma}c - \frac{u_xRc^2}{Rc - \vec{R}\vec{u}} + \gamma u_xR\dot{\gamma} - \frac{u_xR\vec{R}\vec{a}\gamma^2}{Rc - \vec{R}\vec{u}} + \right.$$
$$\left. + \frac{cR_xc^2}{Rc - \vec{R}\vec{u}} - \gamma cR_x\dot{\gamma} + \frac{\gamma cR_x\vec{R}\vec{a}\gamma}{Rc - \vec{R}\vec{u}}\right] \frac{e}{\gamma^2(Rc - \vec{R}\vec{u})^2}. \quad (31)$$

После приведения к общему знаменателю слагаемых в скобках приходим к выражению

$$E_x = \left[-\gamma^2a_xR^2c + R\gamma^2a_x\vec{R}\vec{u} - u_xR\vec{R}\vec{a}\gamma^2 + c^3R_x + \gamma^2cR_x\vec{R}\vec{u} - u_xRc^2\right] \frac{e}{\gamma^2(Rc - \vec{R}\vec{u})^3}. \quad (32)$$

Внесём множитель $\frac{1}{\gamma^2}$ в скобку

$$E_x = \left[-a_xR^2c + Ra_x\vec{R}\vec{u} - u_xR\vec{R}\vec{a} + c^3R_x + cR_x\vec{R}\vec{u} - \frac{u_xRc^2}{\gamma^2}\right] \frac{e}{(Rc - \vec{R}\vec{u})^3} \quad (33)$$

Выражение (33) для иксовой компоненты напряжённости электромагнитного поля совпадает с таковым, полученным с использованием запаздывающих потенциалов (см., напр., [6, глава 8], [7], [8]).

2-ФОРМА ЭЛЕКТРОМАГИТНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим теперь, как будут выглядеть компоненты тензора электромагнитного поля в цилиндрических координатах. Для этого воспользуемся формулой (20), в которой, в случае цилиндрических координат нужно подставить: $q^0 = ct$, $q^1 = \rho$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$. Тогда придём к следующему выражению

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \\ -E_\rho & 0 & -\rho B_z & B_\varphi \\ -\rho E_\varphi & \rho B_z & 0 & -\rho B_\rho \\ -E_z & B_\varphi & \rho B_\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где E_ρ, E_φ, E_z компоненты вектора напряжённости, а B_ρ, B_φ и B_z компоненты вектора индукции электромагнитного поля в базисе цилиндрической системы координат (коэффициенты Ламэ соответственно $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_z = 1$). Воспользовавшись формулой (16), можем записать 2-форму электромагнитного поля

$$F = cE_\rho dt \wedge d\rho + c\rho E_\varphi dt \wedge d\varphi + cE_z dt \wedge dz + \rho B_z d\varphi \wedge d\rho + B_\varphi d\rho \wedge dz + \rho B_\rho dz \wedge d\varphi. \quad (35)$$

Отметим, что к формуле (35) можно прийти и другим путём, не прибегая к формуле (20). Для этого нужно записать 2-форму электромагнитного поля в декартовой системе координат и затем воспользоваться следующими выражениями для базисных один форм

$$dx = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi, \quad (36)$$

$$dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi, \tag{37}$$

$$dz = dz, \tag{38}$$

которые следуют из формул

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{39}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен тензор электромагнитного поля в рамках формализма дифференциальных форм. Данный подход удобен тем, что позволяет получать общие формулы безотносительно каких-либо конкретных координатных систем. В качестве примера рассмотрен вид тензора электромагнитного поля в цилиндрических координатах. Также получено выражение для тензора электромагнитного поля, соответствующего потенциалам Лиенара-Вихерта в рамках указанного формализма. Также отметим, что формула (34) может быть применена в классической теории черенковского излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики : учебное пособие для студ. мех.-мат.спец. ун-тов / В. И. Арнольд. — 3-е издание перераб. и доп. — М. : Наука, 1989. — 472 с.

2. Мизнер, Ч. Гравитация : [В 3 т.], Т. 1 / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер. — Пер. с англ. — М. : Мир, 1977. — 527 с.

3. Шутц, Б. Ф. Геометрические методы математической физики / Б. Ф. Шутц. — Волгоград : Платон, 1995. — 304 с.

4. Бёрке, У. Пространство-время, геометрия, космология / У. Бёрке. — Пер. с англ. — М. : Мир, 1985. — 416 с.

5. Weintraub, S. H. Differential forms: A Complement to Vector Calculus / S. H. Weintraub. — Academicpress, 1997. — 268 p.

6. Ландау, Л. Д. Теория поля : учеб. пособие для вузов в 10 т. Т. 2 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — 7-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

7. Соколов, А. А. Релятивистский электрон / А. А. Соколов, И. М. Тернов. — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, 1983. — 304 с.

8. Гальцов, Д. В. Классические поля / Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, В. Ч. Жуковский. — М. : Изд-во МГУ, 1991. — 150 с.

REFERENCES

1. Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. [Arnold V.I. Matematicheskie metodi klassicheskoy mechaniki]. Moscow: Nauka, 1989, 472 p.

2. Misner W.Ch.,Thorn S., Wheeler J.A. Gravitation V. 1. [Misner W.Ch., Thorn S., Wheeler J.A. Gravitaciya T. 1]. Moscow, 1977, 527 p.

3. Shutz B.F. Geometrical methods of mathematical physics. [Shutz B.F. Geometricheskie metodi matematicheskoy fiziki]. Volgograd: Platon, 1995, 304 p.

4. Burke W.L. Spacetime, geometry, cosmology. [Burke W.L. Prostranstvo-vremy, geometriya, kosmologiya]. Moscow: Mir, 1985, 416 p.

5. Weintraub S. H. Differential forms:A Complement to Vector Calculus. Weintraub – Academic press, 1997, 268 p.

6. Landau L., Lifshitz E.M., Pitaevski L.P. The Theory of Fields. [Landau L., Lifshitz E.M., Pitaevski L.P. Teoriya polya: ucheb. posobie dlya vuzov v 10 t, T II]. Moscow: Nauka, 1988, 512 p.

7. Sokolov A.A., Ternov I.M. The relativistic electron. [Sokolov A.A., Ternov I.M. Relytivistskiy electron]. Moscow: Nauka, 1983, 304 p.

8. Galcov D.V., Grac Y.V., Zhukovsky V.Ch. Classic field. [Galcov D.V., Grac Y.V., Zhukovsky V.Ch. Klassicheskie polya]. Galcov – Moscow: 1991, 150 p.

Пиралли Мохаммад Ишфаак, студент 3 курса кафедры теоретической физики физического факультета Воронежсского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: ishfaaq.peerally@gmail.com

Peerally M. I., student of Department of Theoretical Physics of Physical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ishfaaq.peerally@gmail.com

Казанчян Эдгар Ишханович, аспирант физического факультета Воронежсского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: edgarghazanchyan@mail.ru

Kazanchyan E. I., Post-graduated of Department of Physics. Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: edgarghazanchyan@mail.ru

Клинских Александр Федотович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики Воронежсского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru

Klinskikh A. F., Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor, Head of the Department General Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru