УДК 517.957

# МОДИФИЦИРОВАННОЕ ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ МОНЖА – АМПЕРА

**И. В. Рахмелевич**

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского*

Поступила в редакцию 09.09.2016 г.

**Аннотация**. Исследовано модифицированное двумерное уравнение Монжа – Ампера, содержащее коэффициент при смешанной производной, зависящий от искомой функции. Для решения данного уравнения применяется метод функционального разделения переменных. В результате исходное уравнение сводится к квадратному уравнению относительно вспомогательной переменной, из решения которого получается обыкновенное дифференциальное уравнение относительно искомой функции. Найдены автомодельные решения, а также решения более общего вида. При произвольной зависимости коэффициента при смешанной производной от неизвестной функции решения представлены в неявном виде; найден явный вид решения для частных случаев степенной, экспоненциальной и тригонометрической нелинейностей.

**Ключевые слова**: уравнение Монжа – Ампера, функциональное разделение переменных, автомодельное решение.

# MODIFIED TWO-DIMENSIONAL MONGE – AMPERE EQUATION

**I. V. Rakhmelevich**

**Abstract**. There is investigated modified two-dimensional Monge – Ampere equation which contains a coefficient at the mixed derivative depending on unknown function. Functional variables separation method is applied for the solution of the given equation. In consequence the initial equation is reduced to quadratic equation for auxiliary variable, and from its solution we receive the ordinary differential equation for unknown function. The selfsimilar solutions have been founded, as far as the solutions of the more general type. The solutions are represented in implicit form when the dependence of coefficient at the mixed derivative on unknown function is arbitrary. There are founded the solutions in explicit form for partial cases of power, exponential and trigonometric nonlinearities.

**Keywords**: Monge – Ampere equation, functional separation of variables, selfsimilar solution.

## ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Монжа – Ампера является одним из наиболее интенсивно изучаемых уравнений в современной математической физике. Так, подробно исследованы решения однородного и неоднородного двумерных уравнений Монжа – Ампера [1–4], а также различные обобщения (например, решения уравнения Монжа – Ампера со степенной нелинейностью по первым производным [5]). Также известны некоторые точные решения уравнения, обобщающего уравнение Монжа – Ампера, коэффициенты которого являются функциями независимых переменных [1, с. 255]. Целью данной работы является исследование модифицированного уравнения Монжа – Ампера, где имеется коэффициент при смешанной производной, зависящий от искомой функции. При исследовании этого уравнения используется метод разделения переменных, который остается одним из самых эффективных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [6–13].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующее уравнение относительно неизвестной функции $u\,(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f\,(u)\,\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0, \tag{1}$$

где $f\,(u)$ — некоторая заданная функция. Уравнение (1) будем называть модифицированным уравнением Монжа – Ампера. При $f\,(u) \equiv 1$ это уравнение сводится к известному однородному уравнению Монжа – Ампера [1, с. 248].

В данном параграфе рассмотрим автомодельные решения уравнения (1).

**Теорема 1.** *Уравнение (1) имеет автомодельные решения, которые в неявном виде определяются следующими формулами:*

$$xy = z_1 \exp\left(\int \frac{du}{G_1\,(u) + A_1}\right), \quad G_1\,(u) = \int \frac{du}{1 - \sqrt{f\,(u)}}, \tag{2}$$

$$xy = z_2 \exp\left(\int \frac{du}{G_2\,(u) + A_2}\right), \quad G_2\,(u) = \int \frac{du}{1 + \sqrt{f\,(u)}}, \tag{3}$$

$$y/x = z_3 \exp\left(\int \frac{du}{H\,(u) + A_3}\right), \quad H\,(u) = \int \frac{du}{\sqrt{1 - f\,(u)}}, \tag{4}$$

$$y/x = z_4 \exp\left(-\int \frac{du}{H\,(u) + A_4}\right). \tag{5}$$

*Решения, определяемые формулами (2), (3), существуют в действительной области при условии* $f\,(u) \geqslant 0$*; решения, определяемые формулами (4), (5), – при условии* $f\,(u) < 1$*. В формулах (2, 3), (4, 5) и далее* $z_1, z_2, z_3, z_4, A_1, A_2, A_3, A_4$*– произвольные постоянные.*

*Доказательство.* 1. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$u\,(x,y) = U\,(z)\,, \quad z = xy. \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (1), в результате дифференцирования и элементарных преобразований приводим его к виду:

$$\left[zU''\,(z)\right]^2 (1 - f\,(U\,(z))) - f\,(U\,(z))\left\{\left[U'\,(z)\right]^2 + 2zU'\,(z)\,U''\,(z)\right\} = 0. \tag{7}$$

Разделив почленно уравнение (7) на $\left[U'\,(z)\right]^2$ и вводя новую величину

$$\varsigma = \frac{zU''\,(z)}{U'\,(z)}, \tag{8}$$

получаем:

$$\varsigma^2\,(1 - f\,(U)) - 2\varsigma f\,(U) - f\,(U) = 0, \tag{9}$$

здесь и далее для сокращения записи принято $f\,(U\,(z)) \equiv f\,(U)$.

Решая (9) как квадратное уравнение относительно $\varsigma$, находим следующие корни:

$$\varsigma_1 = \frac{\sqrt{f\,(U)}}{1 - \sqrt{f\,(U)}}, \quad \varsigma_2 = -\frac{\sqrt{f\,(U)}}{1 + \sqrt{f\,(U)}}. \tag{10}$$

Подставляя (8) в левую часть первой из формул (10), получаем следующее:

$$\frac{d}{dz}\left(zU'(z)\right)=\frac{U'(z)}{1-\sqrt{f(U)}}. \tag{11}$$

Уравнение (11) нетрудно представить в виде:

$$\frac{d}{dz}\left(zU'(z)-G_1(U)\right)=0, \tag{12}$$

где $G_1(U)=\int\frac{dU}{1-\sqrt{f(U)}}$.

В результате понижения порядка уравнение (12) принимает вид:

$$zU'(z)=G_1(U)+A_1. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) в неявном виде запишется так:

$$z=z_1\exp\left(\int\frac{dU}{G_1(U)+A_1}\right). \tag{14}$$

Проводя аналогичные рассуждения для корня $\varsigma_2$, определяемого второй формулой (10), получаем уравнение первого порядка, аналогичное (13), и его решение в неявном виде:

$$z=z_2\exp\left(\int\frac{dU}{G_2(U)+A_2}\right), \tag{15}$$

где $G_2(U)=\int\frac{dU}{1+\sqrt{f(U)}}$.

Подставляя в левые части формул (14), (15) выражение для $z$ из (6), получаем решения, определяемые формулами (2), (3).

2. Решение уравнения (1) ищем в виде:

$$u(x,y)=U(z),\quad z=y/x. \tag{16}$$

Аналогично первой части доказательства, подставляя выражение (16) в уравнение (1), в результате преобразований приводим его к виду:

$$\left\{\left[zU''(z)\right]^2+2zU'(z)\,U''(z)\right\}\ (1-f(U(z)))-f(U(z))\ \left[U'(z)\right]^2=0. \tag{17}$$

Разделив почленно это уравнение на $[U'(z)]^2(1-f(U(z)))$, и вводя новую величину $\varsigma$, определяемую формулой (8), приводим (17) к виду:

$$\varsigma^2+2\varsigma-\frac{f(U)}{1-f(U)}=0. \tag{18}$$

Корни квадратного уравнения (18) определяются выражениями:

$$\varsigma_1=-1+\frac{1}{\sqrt{1-f(U)}},\quad \varsigma_2=-1-\frac{1}{\sqrt{1-f(U)}}. \tag{19}$$

Подставляя (8) в левую часть первой из формул (19), и понижая порядок уравнения, нетрудно получить следующее:

$$zU'(z)=H(U)+A_3, \tag{20}$$

где $H(U)=\int\frac{dU}{\sqrt{1-f(U)}}$.

Аналогично уравнению (13), решение уравнения (20) можно представить в неявном виде:

$$z = z_3 \exp\left(\int \frac{dU}{H(U) + A_3}\right). \tag{21}$$

Проводя аналогичные рассуждения для корня $\varsigma_2$, определяемого второй формулой (19), получаем уравнение первого порядка, аналогичное (20) и его решение в неявном виде:

$$z = z_4 \exp\left(-\int \frac{dU}{H(U) + A_4}\right). \tag{22}$$

Подставляя в левые части формул (21), (22) выражение для $z$ из (16), получаем решения, выражающиеся формулами (4), (5). Теорема доказана.

## 2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном параграфе рассмотрим более широкий класс решений уравнения (1), которые определяются нижеследующей теоремой.

**Теорема 2**. *Уравнение (1) имеет решения, которые в неявном виде определяются следующими формулами:*

$$X(x) + Y(y) - z_i = \int \frac{du}{H_i(u) + B_i}, \tag{23}$$

*где $i = 1, 2$; функции $H_i(u)$ ,$X(x)$ ,$Y(y)$ выражаются так:*

$$H_i(u) = \int \frac{\mu + \nu \pm \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\mu\nu f(u)}}{2(f(u) - 1)} du, \tag{24}$$

$$X(x) = \begin{cases} c_1 x + b_1 & (\mu = 0) \\ -\frac{1}{\mu}\ln|x - x_0| + b_1 & (\mu \neq 0) \end{cases}, \quad Y(y) = \begin{cases} c_2 y + b_2 & (\nu = 0) \\ -\frac{1}{\nu}\ln|y - y_0| + b_2 & (\nu \neq 0) \end{cases}, \tag{25}$$

*верхний знак в (24) и всюду ниже относится к $i = 1$, нижний – к $i = 2$; $\mu$,$\nu$, $x_0$,$y_0$,$c_i$,$b_i$,$z_i$,$B_i$ — произвольные постоянные.*

*Доказательство.* Используем метод функционального разделения переменных [1,6,7], в соответствии с которым ищем решение в виде:

$$u(x, y) = U(z), \quad z = X(x) + Y(y), \tag{26}$$

где $U(z)$ ,$X(x)$ ,$Y(y)$ – неизвестные функции, подлежащие определению в дальнейшем. Подставляя выражение (26) в уравнение (1), после дифференцирования и элементарных преобразований приводим его к виду:

$$\eta^2 (1 - f(U(z))) + \eta \left(\frac{X''(x)}{[X'(x)]^2} + \frac{Y''(y)}{[Y'(y)]^2}\right) + \frac{X''(x)}{[X'(x)]^2} \cdot \frac{Y''(y)}{[Y'(y)]^2} = 0, \tag{27}$$

где введена величина

$$\eta = \frac{U''(z)}{U'(z)}. \tag{28}$$

Уравнение (1) допускает разделение переменных вида (26) только в том случае, если каждая из неизвестных функций $U(z)$ ,$X(x)$ ,$Y(y)$ может быть определена как решение некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Такое уравнение для функции $U(z)$ может быть получено из (27), если коэффициенты этого уравнения зависят только от переменной $z$, но не от $x, y$ в отдельности. Следовательно, разделение переменных вида (26) возможно, если выполнены условия:

$$\frac{X''(x)}{[X'(x)]^2} + \frac{Y''(y)}{[Y'(y)]^2} = \varphi(z) \ , \quad \frac{X''(x)}{[X'(x)]^2} \cdot \frac{Y''(y)}{[Y'(y)]^2} = \psi(z) \,, \tag{29}$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ – некоторые неизвестные функции.

Продифференцируем первое из соотношений (29) по $x, y$, тогда:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi(z) = 0. \tag{30}$$

Учитывая выражение (26) для $z$, из (30) следует, что $\varphi''(z) = 0$, или $\varphi(z) = \alpha z + \beta$, где $\alpha$,$\beta$ – некоторые постоянные. Тогда первое из соотношений (29) запишется в виде:

$$\left( \frac{X''(x)}{[X'(x)]^2} - \alpha X(x) \right) + \left( \frac{Y''(y)}{[Y'(y)]^2} - \alpha Y(y) \right) = \beta. \tag{31}$$

Левая часть (31) представляет собой сумму двух слагаемых, зависящих от разных переменных, а правая часть – постоянная, поэтому функции $X(x)$,$Y(y)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{X''(x)}{[X'(x)]^2} - \alpha X(x) = \mu, \quad \frac{Y''(y)}{[Y'(y)]^2} - \alpha Y(y) = \nu, \tag{32}$$

где $\mu$,$\nu$ — постоянные, удовлетворяющие условию $\mu + \nu = \beta$. Тогда из (32) и второго условия (29) следует:

$$(\alpha X(x) + \mu) \ (\alpha Y(y) + \nu) = \psi(z) \,. \tag{33}$$

Прологарифмируем (33) и продифференцируем полученное уравнение по $x, y$, тогда:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{\ln \psi(z)\} = 0, \tag{34}$$

откуда получаем:

$$\psi(z) = \psi_0 \exp(\sigma z) \,, \tag{35}$$

где $\psi_0, \sigma$ — произвольные постоянные.

В свою очередь, из (33), (26) и (35) следует:

$$\{(\alpha X(x) + \mu) \exp(-\sigma X(x))\} \cdot \{(\alpha Y(y) + \nu) \exp(-\sigma Y(y))\} = \psi_0. \tag{36}$$

Левая часть (36) представлена в виде произведения двух сомножителей в фигурных скобках, зависящих от разных переменных. Так как правая часть постоянна, то это уравнение можно удовлетворить, только если $\alpha = 0$, $\sigma = 0$. Тогда из (32) окончательно получаем, что функции $X(x)$,$Y(y)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{X''(x)}{[X'(x)]^2} = \mu, \quad \frac{Y''(y)}{[Y'(y)]^2} = \nu. \tag{37}$$

Тогда уравнение (27) можно переписать в виде:

$$\eta^2 (1 - f(U(z))) \ + \eta \ (\mu + \nu) + \mu\nu = 0. \tag{38}$$

Решая (38) как квадратное уравнение относительно $\eta$, находим его корни:

$$\eta_1 = \frac{\mu + \nu + \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\mu\nu f(U(z))}}{2(f(U(z)) - 1)}, \quad \eta_2 = \frac{\mu + \nu - \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\mu\nu f(U(z))}}{2(f(U(z)) - 1)}. \tag{39}$$

Аналогично п. 1, подставив выражение (28) в левую часть первой из формул (39), находим уравнение относительно $U(z)$:

$$\frac{d}{dz}\big(U'(z) - H_1(U)\big) = 0, \tag{40}$$

где

$$H_1(U) = \int \frac{\mu + \nu + \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\mu\nu f(U)}}{2(f(U) - 1)}\, dU. \tag{41}$$

Аналогичным образом находим, что для корня $\eta_2$, определяемого второй из формул (39), получается уравнение относительно $U(z)$:

$$\frac{d}{dz}\big(U'(z) - H_2(U)\big) = 0, \tag{42}$$

где

$$H_2(U) = \int \frac{\mu + \nu - \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\mu\nu f(U)}}{2(f(U) - 1)}\, dU. \tag{43}$$

Понижая порядок каждого из уравнений (40), (42), решая полученные уравнения первого порядка, учитывая выражение (26) для $z$, а также формулы (41) и (43), находим решение, определяемое формулами (23), (24).

Далее, решая уравнения (37), находим выражения для функций $X(x)$,$Y(y)$ в виде (25). Теорема доказана.

Ниже приводятся следствия из теоремы 2, в которых конкретизируется вид решений, определяемых этой теоремой, для некоторых частных случаев.

**Следствие 1.** *1) Если постоянные $\mu$,$\nu$, входящие в (24), удовлетворяют условиям $\mu = \nu \neq 0$, то решение в неявном виде определяется формулой (23), причем выражение для $H_i(u)$ имеет вид:*

$$H_i(u) = -\mu \int \frac{du}{1 \mp \sqrt{f(u)}}. \tag{44}$$

*2) Если для указанных постоянных выполнены условия $\mu = -\nu \neq 0$, то выражение для $H_i(u)$ имеет вид:*

$$H_i(u) = \mp\mu \int \frac{du}{\sqrt{1 - f(u)}}. \tag{45}$$

*Доказательство.* Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2, если преобразовать выражение (24) с учетом условий $\mu = \nu \neq 0$ и $\mu = -\nu \neq 0$. Следствие доказано.

**Следствие 2.** *Если постоянные $\mu$,$\nu$, входящие в (24), удовлетворяют условию $\mu = \nu = 0$, то уравнение (1) имеет следующее решение:*

$$u(x, y) = \begin{cases} c_1 x + c_2 y + z_0 & (f(u) \neq 1) \\ U(c_1 x + c_2 y + z_0) & (f(u) \equiv 1) \end{cases}. \tag{46}$$

*Здесь $U(z)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция, $z_0$ – новая произвольная постоянная.*

*Доказательство.* Решение (46) для случая $f(u) \neq 1$ получается из (23), (24) путем вычисления интегралов с учетом условия $\mu = \nu = 0$ и последующей подстановки выражений (25) в левую часть (23). В случае $f(u) \equiv 1$ решение (46) получается путем подстановки функции $U(z)$ непосредственно в уравнение (1) с учетом выражений (25); это соответствует известному решению типа бегущей волны для однородного уравнения Монжа – Ампера [1]. Следствие доказано.

**Следствие 3.** *Пусть $f(u) \equiv b_0 \neq 1; \mu,\nu$– произвольные, тогда уравнение (1) имеет решения следующего вида:*

$$u_i(x,y) = \begin{cases} U_0 |x-x_0|^{-\frac{\eta_i}{\mu}} |y-y_0|^{-\frac{\eta_i}{\nu}} & (\mu \neq 0, \nu \neq 0) \\ U_0 |x-x_0|^{-\frac{\eta_i}{\mu}} \exp(\eta_i c_2 y) & (\mu \neq 0, \nu = 0) \\ U_0 \exp(\eta_i c_1 x) |y-y_0|^{-\frac{\eta_i}{\nu}} & (\mu = 0, \nu \neq 0) \end{cases}, \tag{47}$$

*где $i = 1, 2, U_0$ – произвольная постоянная, $\eta_i$ определяются выражением:*

$$\eta_i = \frac{\mu + \nu \pm \sqrt{(\mu-\nu)^2 + 4\mu\nu b_0}}{2(b_0 - 1)}. \tag{48}$$

*Доказательство.* В случае $f(u) \equiv b_0 \neq 1$ из (23) и (24) следует, что $U(z) = U_0 \exp(\eta_i z)$ ($i$=1,2), где $\eta_i$ определяются выражением (48). Далее, подставляя в $U(z)$ выражение для $z$ из (26) и выражения для $X(x)$ ,$Y(y)$ из (25), находим решение (47). Следствие доказано.

**Следствие 4.** *Если постоянные $\mu$,$\nu$, входящие в (24), удовлетворяют условиям $\mu \neq 0$, $\nu = 0$, то одно из частных решений, определяемых теоремой 2, выражается формулой (23), причем $H_1(u)$ имеет вид:*

$$H_1(u) = \mu \int \frac{du}{f(u) - 1}, \tag{49}$$

*а второе решение можно представить в явном виде:*

$$u(x,y) = -\frac{1}{\mu} \ln|x - x_0| + c_2 y + z_0. \tag{50}$$

*Доказательство.* При условиях $\mu \neq 0, \nu = 0$ из (39) получаем:

$$\eta_1 = \frac{\mu}{f(U(z)) - 1}, \quad \eta_2 = 0. \tag{51}$$

Для корня $\eta_2$ из (28) и (51) следует $U''(z) = 0$, откуда с учетом (25) находим решение (50). Для корня $\eta_1$ решение определяется формулой (23), причем выражение (24) для $H_1(u)$ преобразуется к виду (49). Следствие доказано.

*Примечание.* Нетрудно обобщить решение (50) следующим образом:

$$u(x,y) = X(x) + c_2 y, \tag{52}$$

где $X(x)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. Решение (52) удовлетворяет также и классическому уравнению Монжа – Ампера [1, с. 248].

**Пример**. Рассмотрим решение, определяемое формулами (23), (49) при условиях следствия 4, для некоторых конкретных типов нелинейностей.

а) Степенная нелинейность: $f(u) = u^\gamma + 1 \quad (\gamma \neq 1)$. Тогда по формуле (49) находим: $H_1(u) = \frac{\mu u^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. Подставляя это выражение в (23), получаем решение, которое при $B_1 = 0$ можно представить в явном виде:

$$u(x,y) = \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ \ln|x - x_0| - \mu c_2 y + u_0 \right] \right\}^{\frac{1}{\gamma}}.$$

б) Экспоненциальная нелинейность: $f(u) = e^u + 1$. Аналогично предыдущему пункту, приведем для случая $B_1 = 0$ решение в явном виде:

$$u(x,y) = \ln\left\{ \ln|x - x_0| - \mu c_2 y + u_0 \right\}.$$

в) Тригонометрическая нелинейность: $f(u) = \sin^2 u$. Решение в явном виде для случая $B_1 = 0$:

$$u(x, y) = \arcsin\{u_0 |x - x_0| \exp(-\mu c_2 y)\}.$$

В формулах, приведенных в данном примере, $u_0$ — произвольная постоянная, остальные величины определены выше.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе исследованы решения модифицированного уравнения Монжа – Ампера, которое, в отличие от классического уравнения Монжа – Ампера, содержит коэффициент при смешанной производной, зависящий от искомой функции. Найдены автомодельные решения рассматриваемого уравнения, а также другие частные решения с помощью метода функционального разделения переменных. Рассмотрены частные случаи, когда решение может быть представлено в явном виде.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин, А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики : точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 432 с.

2. Хабиров, С. В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа – Ампера / С. В. Хабиров // Математический сборник. — 1990. — Т. 181, № 12. — С. 1607–1622.

3. Шабловский, О. Н. Параметрические решения уравнения Монжа – Ампера и течения газа с переменной энтропией / О. Н. Шабловский // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2015. — № 1. — С. 105–118.

4. Кушнер, А. Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа – Ампера и инварианты Лапласа / А. Г. Кушнер // Доклады РАН. — 2008. — Т. 422, № 5. — С. 1–4.

5. Рахмелевич, И. В. О решениях двумерного уравнения Монжа – Ампера со степенной нелинейностью по первым производным / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2016. — № 4(42). — С. 33–43.

6. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 256 с.

7. Полянин, А. Д. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике / А. Д. Полянин, А. И. Журов // Доклады РАН. — 2002. — Т. 382, № 5. — С. 606–611.

8. Рахмелевич, И. В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2013. — № 3(23). — С. 37–44.

9. Рахмелевич, И. В. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2014. — № 1(27). — С. 42–50.

10. Рахмелевич, И. В. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2015. — № 1(33). — С. 12–19.

11. Рахмелевич, И. В. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2015. — № 3(35). — С. 18–25.

12. Miller, J. (Jr.) Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions / J. Miller (Jr.), L. A. Rubel // Journal of Physics A. — 1993. — V. 26. — P. 1901–1913.

13. Zhdanov, R. Z. Separation of variables in the non-linear wave equation / R. Z. Zhdanov // Journal of Physics A. — 1994. — V. 27. — P. L291–L297.

## REFERENCES

1. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook on non-linear equations in mathematical physics: exact solutions. [Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoi fiziki: tochnye resheniya]. Moscow, 2002, 432 p.

2. Khabirov S.V. Non-isentropical one-dimensional gas movement constructed with the help of contact group of the Monge–Ampere equation. [Khabirov S.V. Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennye s pomoshyu kontaktnoy gruppy uravneniya Monga–Ampera]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1990, vol. 181, no. 12, pp. 1607–1622.

3. Shablovsky O.N. Parametric solutions for the Monge–Ampere equation and gas flow with variable entropy. [Shablovsky O.N. Parametricheskie resheniya uravneniya Monga–Ampera i techeniya gaza s peremennoy entropiey]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 1, pp. 105–118.

4. Kushner A.G. Contact linearization of the Monge–Ampere equations and Laplace invariants. [Kushner A.G. Kontaktnaya linearizatsya uravneniy Monga–Ampera i invarianty Laplasa]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 5, pp. 1–4.

5. Rakhmelevich I.V. On the solutions of two-dimensional Monge–Ampere equation with power-law non-linearity on the first derivatives. [Rakhmelevich I.V. O resheniyah dvumernogo uravneniya Monga–Ampera so stepennoy nelineynostyu po pervym proizvodnym]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2016, no. 4(42), pp. 33–43.

6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. Methods of solving of non-linear equations in mathematical physics and mechanics. [Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoi fiziki: i mekhaniki]. Moscow, 2005, 256 p.

7. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separation of variables in mathematical physics and mechanics. [Polyanin A.D., Zhurov A.I. Obobshennoe i funktsional'noe razdelenie peremennykh v matematicheskoi fizike i mekhanike]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2002, vol. 382, no. 5, pp. 606–611.

8. Rakhmelevich I.V. On application of the variable separation method to mathematical physics equations containing homogeneous functions of derivatives. [Rakhmelevich I.V. O primenenii metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoi fiziki, soderzhashim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2013, no. 3(23), pp. 37–44.

9. Rakhmelevich I.V. On equations of mathematical physics containing multi-homogeneous functions of derivatives. [Rakhmelevich I.V. Ob uravneniyah matematicheskoi fiziki, soderzhashih multiodnorodnye funktsii ot proizvodnykh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 1(27), pp. 42–50.

10. Rakhmelevich I.V. On two-dimensional hyperbolic equations with power-law non-linearity in the derivatives. [Rakhmelevich I.V. O dvumernyh gyperbolicheskih uravneniyah so stepennoy nelineynostyu po proizvodnym]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 1(33), pp. 12–19.

11. Rakhmelevich I.V. On some new solutions of the multi-dimensional first order partial differential equation with power-law non-linearities. [Rakhmelevich I.V. O nekotorykh novykh

resheniakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynostyami]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 3(35), pp. 18–25.

12. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. Journal of Physics A, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.

13. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. Journal of Physics A, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.

*Рахмелевич Игорь Владимирович, к. т. н., доцент, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*
*E-mail: igor-kitpd@yandex.ru*

*Rakhmelevich Igor Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation*
*E-mail: igor-kitpd@yandex.ru*