УДК 517.9; 519.216.2

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ*

Е. Ю. Машков

Юго-Западный государственный университет

Поступила в редакцию 27.01.2017 г.

Аннотация. Под стохастическим уравнением леонтьевского типа понимается специальный класс стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, у которых в левой части имеется вырожденный постоянный линейный оператор, а в правой части — невырожденный постоянный линейный оператор. Также в правой части имеется детерминированное слагаемое, которое зависит только от времени. Предполагается, что коэффициент диффузии данной системы задается квадратной матрицей, зависящей только от времени. Для изучения рассматриваемых уравнений требуется рассмотрение производных достаточно высоких порядков от свободных членов, включая винеровский процесс. В связи с этим для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, что позволяет при исследовании уравнения не применять аппарат теории обобщенных функций. В результате получаются физически осмысленные аналитические формулы для решений уравнения в терминах производных в среднем случайных процессов.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, стохастическое уравнение леонтьевского типа.

STOCHASTIC LEONTIEFF TYPE EQUATION WITH DEPENDING ON TIME DIFFUSION COEFFICIENTS

E. Yu. Mashkov

Abstract. We understand Leontieff type equations as a special class of stochastic differential equations in Ito form such that in their left-hand side there is a degenerate constant linear operator and the right-hand side — a non-degenerfate constant linear operator. Besides, in the right-hand side there is a summand depending only on time. It is assumed that the diffusion coefficient of this system is defined by a square matrix depending only on time. For the study of these equations requires a consideration of quite high order derivatives from free members, including Wiener process. For differentiation of the Wiener process we use the machinery of Nelson's mean derivatives. This allows us to avoid using the generalized functions. As a result we obtain analytical formulae for solutions in terms of mean derivatives of the Wiener process.

Keywords: mean derivative, current velocity, Wiener process, stochastic Leontieff type equation.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15–01–00620).

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается специальная система стохастических дифференциальных уравнений в R^n вида

$$\widetilde{L}\xi(t) = \widetilde{M}\int\limits_0^t \xi(s)ds + \int\limits_0^t f(s)ds + \int\limits_0^t P(s)dw(s), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\lambda\widetilde{L} + \widetilde{M}$ — регулярный пучок постоянных матриц размера $n \times n$, причем матрица $\widetilde{L}$ — вырождена, а $\widetilde{M}$ — невырождена, $P(t)$ — достаточно гладкая $n{\times}n$ — матрица, $f(t)$ — достаточно гладкая детерминированная вектор функция, зависящая от времени, $w(t)$ — винеровский процесс, $\xi(t)$ — искомый случайный процесс. Данные системы встречаются в приложениях при математическом описании технических [1], экономических [2] и других систем. Здесь процессом белого шума $\frac{dw(t)}{dt}$ описываются помехи в системе.

Для изучения данного класса уравнений требуется рассмотрение производных высших порядков от свободных членов — в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса или белого шума. Известно, что производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для использования в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает прямое исследование нашей системы сложным.

Следуя работам [3], [4], [5], [6], [7], в которых был изучен данный класс уравнений с постоянным невырожденным коэффициентом диффузии, мы для изучения решений рассматриваемых уравнений применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не применяются обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией производных в среднем, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате для рассматриваемой системы мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

1. ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0,l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс порождает семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$ "настоящее" $\mathcal{N}_t^\xi$, которое будем считать полным, т. е. пополненным всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно "настоящего" $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ. Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону [8], [9], [10] даем следующее определение:

Определение 1 ([11])**.** *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}(\frac{\xi(t) - \xi(t - \triangle t)}{\triangle t}),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [12]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}|\xi(t) = x)$$
$$Y_*^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}(\frac{\xi(t) - \xi(t - \triangle t)}{\triangle t}|\xi(t) = x)$$

на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t,\xi(t))$.

Определение 2 ([11]). *Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y_*^0(t,x))$ и $u^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y_*^0(t,x))$.

Определение 3 ([11]). *$v^{\xi}(t) = v^{\xi}(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^{\xi}(t) = u^{\xi}(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов (см. [11]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает "случайность" процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс ([11]), который мы обозначим символом $w(t)$. Имеют место следующие

Лемма 1 ([7]). *Пусть $w(t)$ — n-мерный винеровский процесс, $P(t)$ — достаточно гладкая $k \times n$-матрица, $t \in (0,T)$. Тогда для любого t имеет место формула*

$$D_S^w \int_0^t P(s)dw(s) = P(t)\frac{w(t)}{2t}.$$

Лемма 2 ([5],[11]). *Для $t \in (0,T)$ имеют место равенства*

$$Dw(t) = 0, \;\; D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}, \;\; D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$$

При целом $k \geqslant 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}.$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Как уже было сказано во введении, изучается стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$\widetilde{L}\xi(t) = \widetilde{M}\int\limits_0^t \xi(s)ds + \int\limits_0^t f(s)ds + \int\limits_0^t P(s)dw(s),\ \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где $\lambda\widetilde{L} + \widetilde{M}$ — регулярный пучок постоянных матриц размера $n \times n$, причем матрица $\widetilde{L}$ — вырождена, а $\widetilde{M}$ — невырождена, $P(t)$ — достаточно гладкая $n \times n$–матрица, $f(t)$ — достаточно гладкая детерминированная вектор–функция, зависящая от времени, $w(t)$ — винеровский процесс, $\xi(t)$ — искомый случайный процесс.

Рассматриваемое уравнение в общем виде неудобно для изучения, поэтому приведем его к каноническому виду. Выполняя для регулярного пучка матриц $\lambda\widetilde{L} + \widetilde{M}$ преобразование Кронекера-Вейерштрасса (задается парой невырожденных матриц (операторов) $A = (a^i_j)$ и A_R), получим квазидиагональные матрицы $\widetilde{L}$ и $\widetilde{M}$ (см. [13]), причем, при соответствующей нумерации векторов базиса, в $L = A\widetilde{L}A_R$ сначала вдоль главной диагонали стоят жордановы клетки с нулями по диагонали, а последняя матрица вдоль главной диагонали — единичная. В $M = A\widetilde{M}A_R$ в строках, соответствующих жордановым клеткам стоит единичная матрица, а последний блок вдоль главной диагонали представляет собой некоторую невырожденную матрицу. Приведем матрицы L и M в общем явном виде:

$$L = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{n-q}_{n-q} & a^{n-q}_{n-q+1} & \dots & a^{n-q}_n\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{n-q+1}_{n-q} & a^{n-q+1}_{n-q+1} & \dots & a^{n-q+1}_n\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^n_{n-q} & a^n_{n-q+1} & \dots & a^n_n
\end{pmatrix}.$$

После применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса дифференциальное уравнение леонтьевского типа приобретает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + \int_0^t B(s)dw(s), \qquad (2)$$

где $B(t) = AP(t)$.

Из вида (2) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (2) предполагается вида $\eta(0) = 0$. Скажем сразу, что для построенных нами ниже решений это условие не выполняется. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Замечание 4. Как уже было сказано во введении, для изучения уравнения (1), а следовательно и уравнения (2), требуется рассмотрение производных высших порядков от винеровского процесса. В этой работе для вычисления симметрических производных высших порядков будет использоваться σ-алгебра "настоящее" винеровского процесса. Отметим, что для вычисления производных в среднем можно использовать и какую-либо другую σ-алгебру, но тогда формулы для вычисления симметрических производных высших порядков от винеровского процесса изменятся.

Учитывая структуру матриц L и M нетрудно видеть, что (2) распадается на несколько независимых систем уравнений. Самое "нижнее" из них соответствует единичному отрезку диагонали в L и блоку, состоящему из матрицы в правом нижнем углу в M. Обозначим последнюю матрицу через K, через $\vartheta(t)$ обозначим вектор размерности $q+1$, составленный из последних $q+1$ координат вектора $\eta(t)$. Тогда $\vartheta(t)$ описывается уравнением

$$\vartheta(t) = K\int_0^t \vartheta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + \int_0^t B_{(q+1)}(s)dw(s), \qquad (3)$$

в R^{q+1}. Здесь $B_{(q+1)}(t)$ — матрица, составленный из последних $q+1$ строк матрицы $B(t)$, а $Af(t)$ — $(q+1)$-мерный вектор, составленный из последних $q+1$ координат $Af(t)$. Для уравнения (3) известна аналитическая формула для решений (см. [14]):

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}Af(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}B_{(q+1)}(\tau)dw(\tau).$$

Другие системы соответствуют клеткам Жордана в L и единичным матрицам соответствующей размерности, выбранным из строк и столбцов M. Рассмотрим этот случай на примере $(p+1)\times(p+1)$-матрицы (жордановой клетки) N в левом верхнем углу L

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующей ей единичной матрице в M. Через $(Af)_{(p+1)}$ обозначим $(p+1)$-мерный вектор, составленный из первых $p+1$ координат вектора $Af(t)$, через $\eta_{(p+1)}(t)$ — $(p+1)$-мерный вектор с координатами $(\eta^1(t), \eta^2(t), \dots, \eta^{p+1}(t))$, составленный из первых $p+1$ координат вектора $\eta(t)$. Заметим, что координаты вектора Af имеют вид $(Af)^i = \sum_{j=1}^n a_j^i f^j$. Через $B_{(p+1)}(t)$ обозначим матрицу

$$B_{(p+1)}(t) = \begin{pmatrix} b_1^1(t) & b_2^1(t) & \dots & b_{n-1}^1(t) & b_n^1(t) \\ b_1^1(t) & b_2^1(t) & \dots & b_{n-1}^1(t) & b_n^1(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b_1^p(t) & b_2^p(t) & \dots & b_{n-1}^p(t) & b_n^p(t) \\ b_1^{p+1}(t) & b_2^{p+1}(t) & \dots & b_{n-1}^{p+1}(t) & b_n^{p+1}(t) \end{pmatrix}$$

составленную из первых $p+1$ строк матрицы $P(t)$.

Тогда $\eta_{(p+1)}(t)$ описывается уравнением

$$N\eta_{(p+1)}(t) = \int_0^t (\eta_{(p+1)}(s) + (Af)_{(p+1)}(s))ds + \int_0^t B_{(p+1)}(s)dw(s).$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^p(t) \\ \eta^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t(\eta^1(s) + \sum_{j=1}^n a_j^1 f^j)ds \\ \int_0^t(\eta^2(s) + \sum_{j=1}^n a_j^2 f^j)ds \\ \vdots \\ \int_0^t(\eta^p(s) + \sum_{j=1}^n a_j^p f^j)ds \\ \int_0^t(\eta^{p+1}(s) + \sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j)ds \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} b_1^1(s) & b_2^1(s) & \dots & b_{n-1}^1(s) & b_n^1(s) \\ b_1^1(s) & b_2^1(s) & \dots & b_{n-1}^1(s) & b_n^1(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b_1^p(s) & b_2^p(s) & \dots & b_{n-1}^p(s) & b_n^p(s) \\ b_1^{p+1}(s) & b_2^{p+1}(s) & \dots & b_{n-1}^{p+1}(s) & b_n^{p+1}(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s) \\ w^2(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из последнего уравнения системы (4) получаем, что

$$\int_0^t \eta^{p+1}(s)ds = -\int_0^t (\sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j)ds - \sum_{j=1}^n \int_0^t b_j^{p+1}(s)dw_j(s).$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения при $0 < t < T$ мы находим $\eta^{p+1}(t)$ применением к обеим частям равенства производной D_S^w (см. Замечание 4). Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D_*^w (и, следовательно, D_S^w) к интегралам Римана в левой и правой частях при $0 < t < T$ дает одинаковые результаты $\eta^{p+1}(t)$ и $\sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j$). Таким образом, мы при $0 < t < T$ с применением Леммы 1 получаем, что

$$\eta^{p+1} = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j - \sum_{l=1}^n b_l^{p+1} \frac{w^l(t)}{2t}, \quad (5)$$

Из предпоследнего уравнения системы (4) мы получаем, что

$$\eta^{p+1} = \int_0^t (\eta^p + \sum_{j=1}^n a_j^p f^j)ds + \sum_{l=1}^n \int_0^t b_l^p dw^l(s)$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, при $0 < t < T$ с использованием Леммы 2 выводим

$$\eta^p = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1}\frac{df^j}{dt} - \sum_{l=1}^n D_S(b_l^{p+1}\frac{w^l}{2t}) - \sum_{j=1}^n a_j^p f^j - \sum_{l=1}^n b_l^p\frac{w^l}{2t},$$

что тождественно

$$\eta^p = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1}\frac{df^j}{dt} - \sum_{j=1}^n a_j^p f^j - \sum_{l=1}^n \frac{db_l^{p+1}}{dt}\frac{w^l}{2t} + \sum_{l=1}^n b_l^{p+1}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{l=1}^n b_l^p\frac{w^l}{2t} \tag{6}$$

Также для третьего уравнения "снизу" системы (4)

$$\eta^p = \int_0^t (\eta^{p-1} + \sum_{j=1}^n a_j^{p-1} f^j)ds + \sum_{l=1}^n \int_0^t b_l^{p-1} dw^l(s)$$

имеем

$$\eta^{p-1} = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1}\frac{d^2f^j}{dt^2} - \sum_{j=1}^n a_j^p\frac{df^j}{dt} - \sum_{j=1}^n a_j^{p-1} f^j - \sum_{l=1}^n D_S^{(2)}(b_l^{p+1}\frac{w^l}{2t}) -$$
$$- \sum_{l=1}^n D_S(b_l^p\frac{w^l}{2t}) - \sum_{l=1}^n b_l^{p-1}\frac{w^l}{2t},$$

что тождественно

$$\eta^{p-1} = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1}\frac{d^2f^j}{dt^2} - \sum_{j=1}^n a_j^p\frac{df^j}{dt} - \sum_{j=1}^n a_j^{p-1} f^j -$$
$$-\sum_{l=1}^n \frac{d^2b_l^{p+1}}{dt^2}\frac{w^l}{2t} + 2\sum_{l=1}^n \frac{db_l^{p+1}}{dt}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{l=1}^n b_l^{p+1}\frac{3w^l}{8t^3} -$$
$$-\sum_{l=1}^n \frac{db_l^p}{dt}\frac{w^l}{2t} + \sum_{l=1}^n b_l^p\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{l=1}^n b_l^{p-1}\frac{w^l}{2t} \tag{7}$$

В точности аналогично, для $1 \leqslant i \leqslant p$ мы при $0 < t < T$ получаем рекурентную формулу

$$\eta^i(t) = D_S^w\eta^{i+1}(t) - D_S^w\{\int_0^t b_1^i(s)dw^1(s) +$$
$$+ \int_0^t b_2^i(s)dw^2(s) + \ldots + \int_0^t b_n^i(s)dw^n(s)\} - \sum_{j=1}^n a_j^i f^j,$$

По методу математической индукции при $0 < t < T$ получаем выражение для любого $\eta^i(t)$

$$\eta^i = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1}\frac{d^{(p+1-i)}f^j}{dt^{(p+1-i)}} - \sum_{j=1}^n a_j^p\frac{d^{(p-i)}f^j}{dt^{(p-i)}} -$$
$$-\sum_{j=1}^n a_j^{p-1}\frac{d^{(p-i-1)}f^j}{dt^{(p-i-1)}} - \sum_{j=1}^n a_j^i f^j - \sum_{l=1}^n D_S^{(p+1-i)}(b_l^{p+1}\frac{w^l}{2t}) - \sum_{l=1}^n D_S^{(p-i)}(b_l^p\frac{w^l}{2t}) -$$
$$-\sum_{l=1}^n D_S^{(p-i-1)}(b_l^{p-1}\frac{w^l}{2t}) - \ldots - \sum_{l=1}^n b_l^i\frac{w^l}{2t},\ \ 1 \leqslant i \leqslant p,$$

которое тождественно

$$\eta^i = -\sum_{k=i}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{(k-i+1)}f^j}{dt^{(k-i+1)}} - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j - \sum_{l=1}^{n} D_S(b_l^{i+1}\frac{w^l}{2t})-$$
$$-\sum_{m=i+1}^{p}\sum_{l=1}^{n} D_S^{(m-i+1)}(b_l^{m+1}\frac{w^l}{2t}) - \sum_{l=1}^{n} b_l^i \frac{w^l}{2t},\ \ 1 \leqslant i \leqslant p-1$$

Согласно формуле Лейбница для дифференцирования произведения, получаем

$$D_S^{(m-i+1)}(b_l^{m+1}\frac{w^l}{2t}) = \frac{d^{(m-i+1)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1)}}\frac{w^l}{2t} + b_l^{m+1}D_S^{(m-i+1)}\frac{w^l}{2t}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-i} C_{m-i+1}^k \frac{d^{(m-i+1-k)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1-k)}} D_S^{(k)}\frac{w^l}{2t},$$
$$1 \leqslant i \leqslant p-1,\ \ i+1 \leqslant m \leqslant p$$

а также

$$\sum_{l=1}^{n} D_S(b_l^{i+1}\frac{w^l}{2t}) = \sum_{l=1}^{n}\frac{db_l^{i+1}}{dt}\frac{w^l}{2t} - \sum_{l=1}^{n} b_l^{i+1}\frac{w^l}{4t^2}$$

Следовательно,

$$\eta^i = -\sum_{k=i}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{(k-i+1)}f^j}{dt^{(k-i+1)}} - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j - \sum_{l=1}^{n}\frac{db_l^{i+1}}{dt}\frac{w^l}{2t}+$$
$$+\sum_{l=1}^{n} b_l^{i+1}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{m=i+1}^{p}\sum_{l=1}^{n}\{\frac{d^{(m-i+1)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1)}}\frac{w^l}{2t} + b_l^{m+1}D_S^{(m-i+1)}\frac{w^l}{2t}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-i} C_{m-i+1}^k \frac{d^{(m-i+1-k)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1-k)}} D_S^{(k)}\frac{w^l}{2t}\} - \sum_{l=1}^{n} b_l^i\frac{w^l}{2t},\ \ 1 \leqslant i \leqslant p-1$$

Принимая во внимание Лемму 2, при $0 < t < T$ мы получаем явное выражение для любого $\eta^i(t)$

$$\eta^i = -\sum_{k=i}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{(k-i+1)}f^j}{dt^{(k-i+1)}} - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j - \sum_{l=1}^{n}\frac{db_l^{i+1}}{dt}\frac{w^l}{2t}+$$
$$+\sum_{l=1}^{n} b_l^{i+1}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{m=i+1}^{p}\sum_{l=1}^{n}\{\frac{d^{(m-i+1)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1)}}\frac{w^l}{2t}+$$
$$+b_l^{m+1}(-1)^{m-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{m-i+1}(2j-1)}{2^{m-i+2}}\frac{w^l(t)}{t^{m-i+2}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-i} C_{m-i+1}^k \frac{d^{(m-i+1-k)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1-k)}}(-1)^k\frac{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{2^{k+1}}\frac{w^l(t)}{t^{k+1}}\} - \sum_{l=1}^{n} b_l^i\frac{w^l}{2t}, \tag{8}$$
$$1 \leqslant i \leqslant p-1$$

Перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (4). Принимая во внимание определение симметрических производных в среднем, нетрудно заметить, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы как приращения по времени вправо, так и влево. Тогда из формул (5), (6), (7) и (8) видно, что решения $\eta^l(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geqslant 1$. Следовательно, решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т.е. значения решений при $t = 0$ не существуют. Один из вариантов разрешения указанной ситуации (как и в [3], [5]) состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0,T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant t_0; \\ t, \text{ если } t_0 \leqslant t. \end{cases} \tag{9}$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в формулах (5), (6), (7) и (8) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t_0 \leqslant t < T$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t \geqslant \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Таким образом, мы получаем

Теорема 5. *Пусть $\lambda\widetilde{L}+\widetilde{M}$ — регулярный пучок $n\times n$-матриц, причем $\widetilde{L}$ — вырождена, а $\widetilde{M}$ — невырождена, $P(t)$ — достаточно гладкая $n \times n$–матрица, а $f(t)$ — достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \leqslant t \leqslant T$; A и A_R — невырожденные матрицы размера $n \times n$, приводящие пучок $\lambda\widetilde{L} + \widetilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т. е. к квазидиагональному виду), $L = A\widetilde{L}A_R$ и $M = A\widetilde{M}A_R$. Тогда: 1) уравнение (1) трансформируется в уравнение (2), которое распадается на независимые подсистемы уравнений;*
2) для подсистемы, соответствующей единичной матрице в L и невырожденной матрице K в M, имеет место аналитическая формула для решений вида

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}Af(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}B_{(q+1)}(\tau)dw(\tau);$$

3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1)\times(p+1)$ с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в M, при $0 < t < T$ имеют место формулы для решений вида

$$\eta^{p+1} = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - \sum_{l=1}^{n} b_l^{p+1}\frac{w^l(t)}{2t},$$

$$\eta^{p} = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1}\frac{df^j}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_j^{p} f^j - \sum_{l=1}^{n}\frac{db_l^{p+1}}{dt}\frac{w^l}{2t} + \sum_{l=1}^{n} b_l^{p+1}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{l=1}^{n} b_l^{p}\frac{w^l}{2t},$$

$$\eta^{i} = -\sum_{k=i}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{(k-i+1)}f^j}{dt^{(k-i+1)}} - \sum_{j=1}^{n} a_j^{i} f^j - \sum_{l=1}^{n}\frac{db_l^{i+1}}{dt}\frac{w^l}{2t} +$$

$$+\sum_{l=1}^{n} b_l^{i+1}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{m=i+1}^{p}\sum_{l=1}^{n}\{\frac{d^{(m-i+1)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1)}}\frac{w^l}{2t} +$$

$$+ b_l^{m+1}(-1)^{m-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{m-i+1}(2j-1)}{2^{m-i+2}}\frac{w^l(t)}{t^{m-i+2}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-i} C_{m-i+1}^{k}\frac{d^{(m-i+1-k)}b_l^{m+1}}{dt^{(m-i+1-k)}}(-1)^k\frac{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{2^{k+1}}\frac{w^l(t)}{t^{k+1}}\} - \sum_{l=1}^{n} b_l^{i}\frac{w^l}{2t},$$

$$1 \leqslant i \leqslant p-1;$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях полученных в пункте 3) процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (9) и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \leqslant t < T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестаков, А. Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2010. — № 16(192). — С. 116–120.

2. Келлер, А. В. Методика построения статической и динамической балансовых моделей на уровне предприятия / А. В. Келлер, Т. А. Шишкина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия : Экономика и менеджмент. — 2013. — Т. 7, № 3. — С. 6–11.

3. Гликлих, Ю. Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю. Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия : Математическое моделирование и программирование. — 2012. — № 27(286), вып. 13. — С. 24–34.

4. Гликлих, Ю. Е. О приведении стохастических уравнений леонтьевского типа к каноническому виду / Ю. Е. Гликлих, Е. Ю. Машков // Измерения : состояние, перспективы развития. Материалы международной научно-практической конференции. — Челябинск, 25-27 сентября 2012 г. — Т. 1. — С. 73–75.

5. Гликлих, Ю. Е. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов / Ю. Е. Гликлих, Е. Ю. Машков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2013. — Т. 6, № 2. — С. 25–39.

6. Машков, Е. Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа / Е. Ю. Машков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 121–128.

7. Gliklikh, Yu. E. Stochastic Leontieff type equation with non-constant coefficients / Yu. E. Gliklikh, E. Yu. Mashkov // Applicable Analysis : An International Journal. Taylor and Francis. — 2015. — V. 94, iss. 8. — P. 1614–1623.

8. Nelson, E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews. — 1966. — V. 150, № 4. — P. 1079–1085.

9. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. — Princeton : Princeton University Press, 1967. — 142 p.

10. Nelson, E. Quantum fluctuations / E. Nelson. — Princeton : Princeton University Press, 1985. — 147 p.

11. Гликлих, Ю. Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю. Е. Гликлих. — М. : Комкнига, 2005. — 416 с.

12. Партасарати, К. Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Р. Партасарати. — М. : Мир, 1988. — 343 с.

13. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Физматлит, 1967. — 575 с.

14. Gihman, I. I. Theory of stochastic processes / I. I. Gihman, A. V. Scorohod // Vol. 3. New York (NY) : Springer-Verlag, 1979.

REFERENCES

1. Shestakov A.L., Sviridyk G.A. A New Approach to Measurement of Dynamically Perturbed Signals. [Shestakov A.L., Sviridyk G.A. Novyj podxod k izmereniyu dinamicheski iskazhennyx signalov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the South Ural State University, Series of Mathematical Modelling, Programming* & *Computer Software*, 2010, no. 16(192), pp. 116–120.

2. Keller A.V., Shishkina T.A. The method of constructing dynamic and static balance models at the company level. [Keller A.V., Shishkina T.A. Metodika postroeniya staticheskoy i dinamicheskoy balansovykh modeley na urovne predpriyatiya]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya : E'konomika i menedzhment — Bulletin of SUSU. Series «Economics and Management»*, 2013, vol. 7, no. 3, pp. 6–11.

3. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise by the Method of Mean Derivatives of Stochastic Processes. [Gliklix Yu.E. Izuchenie uravnenij leont'evskogo tipa s belym shumom metodami proizvodnyx v srednem sluchajnyx processov]. *Vestnik YuUrGU. Seriya : Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2012, no. 27 (286), iss. 13, pp. 24–34.

4. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. On Reduction of Leontieff Type Stochastic Equations to Canonical Form. [Gliklix Yu.E., Mashkov E.Yu. O privedenii stoxasticheskix uravnenij leont'evskogo tipa k kanonicheskomu vidu]. Measurements: the State of the Problem and the Prospects of Developmets. Abstracts of Communications of the International Scientific-Practical Conference. Chelyabinsk, 25–27 September 2012. V. 1, pp. 73–75.

5. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes. [Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stoxasticheskie uravneniya leont'evskogo tipa i proizvodnye v srednem sluchajnyx processov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2013, vol. 6, iss. 2, pp. 25–39.

6. Mashkov E.Yu. On the stochastic Leontieff type equation. [Mashkov E.Yu. O stoxasticheskix yravneniayh leontevskogo tipa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 121–128.

7. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equation with non-constant coefficients. Applicable Analysis: An International Journal. Taylor and Francis, 2015, vol. 94, iss. 8, pp. 1614–1623.

8. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. Phys. Reviews, 1966, vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085.

9. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967, 142 p.

10. Nelson E. Quantum fluctuations. Princeton: Princeton University Press, 1985, 147 p.

11. Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. [Gliklix Yu.E. Global'nyj i stoxasticheskij analiz v zadachax matematicheskoj fiziki]. Moscow, 2005, 416 p.

12. Parthasarathy K.R. Introduction to probability and measure. [Partasarati K.R. Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i teoriyu mery]. Moscow: Mir, 1988, 343 p.

13. Gantmakher F.R. The Theory of Matrices. [Gantmaxer F.R. Teoriya matric]. Moscow: Fizmatlit, 1967, 575 p.

14. Gihman I.I., Scorohod A.V. Theory of stochastic processes. vol. 3. New York (NY): Springer-Verlag; 1979.

Машков Евгений Юрьевич, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры высшей математики, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская федерация
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Mashkov Evgenii Yu., Candidate of physical and mathematical science, Lecturer, Southwest State University, Kursk, Russian Federation
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru