УДК 517.984

О ФАКТОРИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО МАТРИЧНОГО ПУЧКА, ИМЕЮЩЕГО БАЗИС ИЗ ЖОРДАНОВЫХ ЦЕПОЧЕК*

И. В. Курбатова

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"

Поступила в редакцию 28.10.2016 г.

Аннотация. Квадратичным матричным пучком называют многочлен $\lambda \mapsto \lambda^2 E+\lambda F+H$ степени 2, коэффициентами E, F и H которого являются матрицы. Говорят, что квадратичный матричный пучок допускает факторизацию, если он может быть представлен в виде произведения $(\lambda E-A)(\lambda\mathbf{1}-B)$ двух линейных множителей $\lambda E-A$ и $\lambda\mathbf{1}-B$. Не всякий квадратичный пучок допускает факторизацию. Известно, что квадратичный матричный пучок допускает факторизацию, если из его собственных векторов удается составить базис. В статье доказывается, что возможность построить факторизацию сохраняется, если для пучка можно построить базис из собственных и присоединенных векторов. Присоединенными векторами коротко называют векторы, образующие так называемые жордановы цепочки.

Ключевые слова: матричный пучок, факторизация, жорданова цепочка.

ON FACTORIZATION OF SQUARE MATRIX PENCIL THAT POSSESSES A BASIS OF JORDAN CHAINS

I. V. Kurbatova

Abstract. A polynomial $\lambda \mapsto \lambda^2 E+\lambda F+H$ of degree 2 with matrix coefficients E, F и H is called a square matrix pencil. They say that a square matrix pencil admits a factorization if it can be represented in the form of the product $(\lambda E-A)(\lambda\mathbf{1}-B)$ of two linear factors $\lambda E-A$ and $\lambda\mathbf{1}-B$. Not every square matrix pencil admits a factorization. It is known that a square matrix pencil admits a factorization if there exists a basis consisting of its eigenvectors. In the paper, it is proved that the possibility to build a factorization preserves if there exists a basis of eigenvectors and associated vectors. Associated vector is the short name for a vector from a Jordan chain.

Keywords: matrix pencil, factorization, Jordan chain.

Квадратичным матричным пучком называют функцию

$$\lambda \mapsto \lambda^2 E+\lambda F+H, \tag{1}$$

где E, F и H — матрицы размера $n\times n$.

Ненулевой вектор ψ называют *собственным вектором* матричного пучка, если

$$(\lambda_0^2 E+\lambda_0 F+H)\psi=0$$

для некоторого числа λ_0, называемого *собственным значением.* Известно [1, с. 280], что если можно набрать базис из собственных векторов, то пучок допускает факторизацию, т.е. представление в виде

$$\lambda^2 E+\lambda F+H=(\lambda E-A)(\lambda\mathbf{1}-B).$$

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16–01–00197.

Наличие факторизации существенно упрощает [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] исследование пучка. Но, как показывает пример [1, с. 523, пример 1], факторизация не всегда возможна.

В настоящей заметке доказывается, что факторизация также возможна, если имеется базис из собственных и присоединенных векторов. Результаты настоящей заметки справедливы как в комплексном, так и в действительном случае.

Матрицу B размера $n \times n$ называют *правым корнем* пучка (1), если

$$EB^2 + FB + H = 0. \tag{2}$$

Предложение 1 ([4, п. 3.1], [8, с. 81], [1, с. 252])**.** *Пусть B — правый корень пучка. Тогда пучок допускает факторизацию*

$$\lambda^2 E + \lambda F + H = (\lambda E + EB + F)(\lambda \mathbf{1} - B),$$

где $\mathbf{1}$ *означает единичную матрицу.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda^2 E + \lambda F + H &= \lambda^2 E + \lambda F + H - (EB^2 + FB + H) = \\ &= E(\lambda^2 - B^2) + F(\lambda \mathbf{1} - B) = (\lambda E + EB + F)(\lambda \mathbf{1} - B). \quad \square \end{aligned}$$

Жордановой цепочкой для пучка (1), отвечающей собственному значению λ_0, называют [1, с. 501], [3, с. 2], [9, с. 255] набор ненулевых векторов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} (\lambda_0^2 E + \lambda_0 F + H)\psi_1 &= 0, \\ (\lambda_0^2 E + \lambda_0 F + H)\psi_2 + (2\lambda_0 E + F)\psi_1 &= 0, \\ (\lambda_0^2 E + \lambda_0 F + H)\psi_3 + (2\lambda_0 E + F)\psi_2 + \psi_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\lambda_0^2 E + \lambda_0 F + H)\psi_k + (2\lambda_0 E + F)\psi_{k-1} + \psi_{k-2} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, в этом случае ψ_1 является собственным вектором. В частности, при $k = 1$ жорданова цепочка сводится к собственному вектору.

Теорема 2. *Пусть из жордановых цепочек пучка* (1) *можно составить базис. Тогда пучок имеет правый корень и, следовательно, допускает факторизацию.*

Доказательство. Предположим вначале, что базис образует одна цепочка ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n, отвечающая собственному значению λ_0. Покажем, что в этом случае правым корнем пучка (1) является матрица

$$B = \Psi \Lambda \Psi^{-1},$$

где $\Psi = (\psi_n, \psi_{n-1}, \dots \psi_1)$ — матрица, столбцами которой являются элементы жордановой цепочки, а

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

— жорданов блок.

Вычислим $\Psi\Lambda$ и $\Psi\Lambda^2$. Имеем

$$\begin{aligned}
\Psi\Lambda &= \lambda_0\Psi + (\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0),\\
\Psi\Lambda^2 &= (\Psi\Lambda)\Lambda = (\lambda_0\Psi + (\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0))\Lambda =\\
&\quad = \lambda_0^2\Psi + \lambda_0(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0) + \lambda_0(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0) +\\
&\quad + (\psi_{n-2}, \psi_{n-3}, \ldots, \psi_1, 0, 0) =\\
&\quad = \lambda_0^2\Psi + 2\lambda_0(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0) + (\psi_{n-2}, \psi_{n-3}, \ldots, \psi_1, 0, 0).
\end{aligned}$$

Подставим $D_2 = \Psi\Lambda\Psi^{-1}$ в формулу (2). Имеем

$$\begin{aligned}
D_2^2 + FD_2 + H = &(\Psi\Lambda^2 + F\Psi\Lambda + H\Psi)\Psi^{-1} =\\
&= [\lambda_0^2\Psi + 2\lambda_0(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0) +\\
&+ (\psi_{n-2}, \psi_{n-3}, \ldots, \psi_1, 0, 0) +\\
&+ \lambda_0 F - F(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0) + H\Psi]\Psi^{-1} =\\
&= [(\lambda_0^2 E + \lambda_0 F + H)\Psi +\\
&+ (F + 2\lambda_0 E)(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0) +\\
&+ (\psi_{n-2}, \psi_{n-3}, \ldots, \psi_1, 0, 0)]\Psi^{-1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что соотношение (3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
(\lambda_0^2 E + \lambda_0 F + H)\Psi = (F + 2\lambda_0 E)(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \ldots, \psi_1, 0) +\\
+ (\psi_{n-2}, \psi_{n-3}, \ldots, \psi_1, 0, 0).
\end{aligned}$$

Следовательно, выражение, стоящее в квадратных скобках в самой правой части равенства (4), равно нулю.

Совершенно аналогично проверяется, что если базис образуют векторы ψ_1^1, ψ_2^1, $\ldots$, $\psi_{k_1}^1$, $\ldots$, ψ_1^m, ψ_2^m, $\ldots$, $\psi_{k_m}^m$, то правым корнем пучка является матрица

$$B = \Psi\Lambda\Psi^{-1},$$

где $\Psi = (\psi_1^1, \psi_2^1, \ldots, \psi_{k_1}^1, \ldots, \psi_1^m, \psi_2^m, \ldots, \psi_{k_m}^m)$ — матрица, столбцами которой являются элементы жордановых цепочек, а Λ является блочно-диагональной матрицей, на диагонали которой стоят жордановы блоки

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,\ldots,m,$$

размера $k_i \times k_i$.

Возможность факторизации при наличии правого корня вытекает из предложения 1. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lancaster, P. The theory of matrices: with applications. Computer Science and Scientific Computing / P. Lancaster, M. Tismenetsky. — Academic Press, 1985.

2. On block roots of matrix polynomials based MIMO control system design / B. Bekhiti et al. // 4th International Conference on Electrical Engineering (ICEE). — IEEE, 2015. — P. 1–6.

3. Gohberg, I. Matrix polynomials. Computer Science and Applied Mathematics / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. — New York–London : Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1982. — xiv+409 p.

4. Крейн, М. Г. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов / М. Г. Крейн, Г. К. Лангер // Тр. межд. симп. по прим. теории функций в мех. спл. среды. — 1965, С. 283–322.

5. Курбатов, В. Г. О нахождении приближенного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка / В. Г. Курбатов, М. Н. Орешина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2003. — № 2. — С. 173–188.

6. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев : Штиинца, 1986. — 260 с.

7. Kurbatov, V. G. Analytic functional calculus for two operators / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova, M. N. Oreshina // arXiv:1604.07393v, April 2016. — 49 p.

8. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 552 с.

9. Tisseur, F. The quadratic eigenvalue problem / F. Tisseur, K. Meerbergen // SIAM Rev. — 2001. — V. 43, № 2. — P. 235–286.

REFERENCES

1. Lancaster P., Tismenetsky M. The theory of matrices: with applications. Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, 1985.

2. Bekhiti B., Dahimene A., Nail B., Hariche K., Hamadouche A. On block roots of matrix polynomials based MIMO control system design. 4th International Conference on Electrical Engineering (ICEE). IEEE, 2015, pp. 1–6.

3. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix polynomials. Computer Science and Applied Mathematics, New York–London : Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1982, xiv+409 p.

4. Kreĭn M.G., Langer H. On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua. [Krejn M.G., Langer G.K. O nekotoryx matematicheskix principax linejnoj teorii dempfirovannyx kolebanij kontinuumov]. *Tr. mezhd. simp. po prim. teorii funkcij v mex. spl. sredy — Proc. Int. Sympos. on Applications of the Theory of Functions in Continuum Mechanics*, 1978, pp. 283–322.

5. Kurbatov V.G., Oreshina M.N. On approximate solution of second order linear differential equation. [Kurbatov V.G., Oreshina M.N. O naxozhdenii priblizhennogo resheniya linejnogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2003, no. 2, pp. 173–188.

6. Markus A.S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. [Markus A.S. Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nyx operatornyx puchkov]. Kishinev : Shtiintsa, 1986, 260 p.

7. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V., Oreshina M. N. Analytic functional calculus for two operators. arXiv:1604.07393v, April 2016, 49 p.

8. Gantmacher F.R. The theory of matrices. [Gantmaxer F.R. Teoriya matric]. Moscow : Nauka, 1988, 552 p.

9. Tisseur F., Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem. SIAM Rev., 2001, vol. 43, no. 2, pp. 235–286.

Курбатова И. В., кандидат физико-математических наук, преподаватель, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", кафедра математики, Воронеж, Россия
E-mail: la_soleil@bk.ru
Тел.: 8920–401–49–24

Kurbatova I. V., Russian Air Force Military Educational and Scientific Center of the "N. E. Zhukovskiy and Yu. A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russia
E-mail: la_soleil@bk.ru
Tel.: 8920–401–49–24