УДК 517.958

ВАРИАНТ АППРОКСИМАЦИОННО-ТОПОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА НА ОСНОВЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ*

В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07.08.2017 г.

Аннотация. В статье приведён один из вариантов аппроксимационно-топологического метода исследования задач математической гидродинамики, основанный на идее параболической регуляризации. Этот метод применён для доказательства слабой разрешимости начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса в ограниченной области трёхмерного пространства. А именно, для трёхмерной системы уравнений Навье-Стокса рассматривается аппроксимирующая задача, которая получается путём добавления квадрата оператора Стокса с малым параметром. Далее на основе теории степени Лере-Шаудера вполне непрерывных векторных полей и априорных оценок решений доказывается существование решений аппроксимационной задачи. Затем на основе априорных оценок решений аппроксимационной задачи, не зависящих от параметра аппроксимации, показывается, что из последовательности слабых решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к слабому решению задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Ключевые слова: Система Навье-Стокса, слабая разрешимость, аппроксимационно-топологический метод.

ONE VARIANT OF APPROXIMATION-TOPOLOGICAL METHOD USING FOR STUDYING THE WEAK SOLVABILITY OF THE NAVIER-STOKES SYSTEM ON THE BASE OF PARABOLIC REGULARIZATION

V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, M. V. Turbin

Abstract. The article presents one of the variants of the approximation–topological method for studying problems of mathematical hydrodynamics, based on the idea of parabolic regularization. This method is used to prove the weak solvability of the initial–boundary value problem for the Navier-Stokes system in a bounded domain of three–dimensional space. Namely, for the three-dimensional Navier–Stokes system, an approximating problem is considered. This problem is obtained by adding the square of the Stokes operator with a small parameter. Further, on the base of the Leray–Schauder degree theory of completely continuous vector fields and a priori estimates of solutions, it is proved that there exists the solution of the approximation problem. Then, on the base of a priori estimates of the solutions of the approximation problem, which do not depend on the approximation parameter, it is shown that from a sequence of weak solutions of the approximating problem one can select a subsequence that weakly converges to the weak solution of the problem as the approximation parameter tends to zero.

Keywords: Navier-Stokes system, weak solvability, approximation-topological method.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16–11–10125, выполняемый в Воронежском государственном университете) — теорема о существовании слабого решения и РФФИ (проект № 16–01–00370) — пункт 9 (утверждение о регулярности решения).

© Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В., 2017

ВВЕДЕНИЕ

Как правило, для исследования разрешимости задач гидродинамики ранее использовался или какой-то вариант метода Галеркина, или итерационный метод, или подход, основанный на интерпретации задачи в виде уравнения в банаховом пространстве и использовании методов полугрупп. Идея аппроксимационно-топологического подхода к исследованию слабой разрешимости задач гидродинамики была впервые озвучена В.Г. Звягиным на международной конференции в 1998 году [1]. В [2] (см. настоящий журнал) описана история, которая способствовала тому, что этот метод был изложен в [3] на примере исследования слабой разрешимости системы Навье-Стокса, хотя слабая разрешимость начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса уже давно была известна.

Коротко, этот метод заключался в том, что вначале находятся аппроксимации исходной начально-краевой задачи вспомогательными задачами с более хорошими топологическими свойствами. Затем на основе топологической степени вполне непрерывных, уплотняющих векторных полей или отображений, удовлетворяющих $(S+)$ условию и априорных оценок решений устанавливается разрешимость этих аппроксимационных задач в некотором вспомогательном пространстве с хорошими топологическими свойствами. Далее показывается, что из последовательности решений аппроксимационных задач можно выделить по норме исходного пространства подпоследовательность, которая в некотором смысле (слабом или в смысле распределений) сходится к решению исходной задачи в естественном для неё пространстве.

В последующие годы произошло дальнейшее развитие и применение аппроксимационно-топологического метода в задачах неньютоновской гидродинамики. В частности, появились новые варианты этого метода, существенно отличающиеся от первоначального в [3]. Один из этих вариантов описан в [2] также на примере начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса.

Настоящая работа также посвящена одному из таких вариантов развития аппроксимационно-топологического метода, примененному к системе Навье-Стокса. А именно, предложен ещё один вариант этого метода, наиболее близкий к методу малого параметра в теории параболических уравнений, но имеющий ряд особенностей, связанных с уравнениями гидродинамики, по сравнению с классическим случаем параболических уравнений. Наряду с априорными оценками в этом подходе большую роль (как и во всех вариантах аппроксимационно-топологического метода) играет использование теории степени различных классов отображений банаховых пространств.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с локально-липшицевой границей. На промежутке времени $[0,T]$, $0 < T < \infty$, рассматривается следующая начально-краевая задача для системы Навье-Стокса:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]; \tag{2}$$

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega; \tag{3}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $v(x,t)$ — вектор скорости жидкости в точке x в момент времени t, $p(x,t)$ — давление в жидкости в точке x в момент времени t, ν — вязкость жидкости, $\nu > 0$, а $f = f(x,t)$ — вектор внешних сил.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Через $H^p(\Omega)^3, p \geqslant 0$ мы будем обозначать пространство функций, которые вместе со своими производными до порядка p включительно принадлежат пространству $L_2(\Omega)^3$. Обычно такие пространства называют пространствами Соболева (или соболевскими пространствами). Известно, что пространство $H^p(\Omega)^3$ банахово относительно нормы

$$\|u\|_{H^p(\Omega)^3} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha:|\alpha|\leqslant p} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Через $C_0^\infty(\Omega)^3$ будем обозначать пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^3$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω.

Для того, чтобы ввести понятие слабого решения, нам потребуются определения некоторых пространств:

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1,v_2,v_3) \in C_0^\infty(\Omega)^3 : div\, v = 0\}, \tag{6}$$

$$V^0 = \text{ замыкание } \mathcal{V} \text{ по норме } L_2(\Omega)^3; \tag{7}$$

$$V^1 = \text{ замыкание } \mathcal{V} \text{ по норме } H^1(\Omega)^3; \tag{8}$$

$$V^2 = H^2(\Omega)^3 \cap V^1. \tag{9}$$

Отметим, что пространство V^0 можно определить и следующим образом:

$$V^0 = \{v(x) \in L_2(\Omega)^3 : div\, v = 0,\ (v,n)|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{10}$$

где $div\, v$ понимается в смысле теории обобщенных функций, а корректность оператора сужения на $\partial\Omega$ нормальной компоненты v доказана, например, в [4]. Это определение эквивалентно исходному (см., [4]).

Мы будем также использовать хорошо известное разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)^3$ (см., например, [4],[5]):

$$L_2(\Omega)^3 = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega), \tag{11}$$

где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$, $\oplus$ — знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla H^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)^3$).

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^3 \to V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор

$$A = -\pi\Delta. \tag{12}$$

Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее см., например, в [6],[7]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то $\{e_j\}$ — собственные функции оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad N \in \mathbb{Z},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

В [8] доказано, что при $\alpha = 0{,}1{,}2$ пространства, введённые как пополнение E_∞ по норме (13), будут совпадать с пространствами (7)–(9) и что данная норма эквивалентна следующей:

$$\|v\|_{V^1} = \int\limits_\Omega (\nabla v) : (\nabla v)\, dx; \quad \|v\|_{V^2} = \int\limits_\Omega \Delta v \Delta v dx.$$

Также там показано, что при $\alpha \geqslant 0$ имеет место непрерывное вложение $V^\alpha \subset H^\alpha(\Omega)^3$. Поэтому при $\alpha > \beta \geqslant 0$ имеет место компактное вложение $V^\alpha \subset V^\beta$.

Из определения шкалы пространств V^α следует, что оператор $A: V^\alpha \to V^{\alpha-2}$ непрерывно обратим.

По теореме Рисса будем отождествлять пространство V^0 с его сопряженным пространством $(V^0)^*$. Поэтому имеем следующие вложения:

$$V^2 \subset V^1 \subset V^0 \equiv (V^0)^* \subset V^{-1} \subset V^{-2},$$

где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны.

Также введём в этом пункте пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи и задачи, аппроксимирующей исходную:

$$W_0 = \left\{ v : v \in L_2(0,T; V^1) \cap L_\infty(0,T; V^0), v' \in L_{4/3}(0,T; V^{-1}) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{W_0} = \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})},$$

пространство

$$W_1 = \left\{ v : v \in L_2(0,T; V^1) \cap L_\infty(0,T; V^0), v' \in L_2(0,T; V^{-2}) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})},$$

и, наконец, пространство

$$W_2 = \left\{ v : v \in L_2(0,T; V^2), v' \in L_2(0,T; V^{-2}) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{W_2} = \|v\|_{L_2(0,T;V^2)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})}.$$

Приведём также ряд утверждений, которые позволят нам говорить о выполнении начального условия для функции из пространств W_1 и W_2. Дело в том, что в данный момент мы не можем говорить о значении произвольной функции $v \in W_0$, а также из W_1 и W_2 в точке, так как для функции из $L_2(0,T; V^1)(L_2(0,T; V^2))$ значение в точке не определено. Однако, имеет место следующая лемма (подробнее см. [4]), которая является частным случаем общей интерполяционной теоремы Лионса–Мадженеса [9]:

Лемма 1. *Пусть V, H, V^* — тройка гильбертовых пространств, таких что*

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*.$$

Здесь вложения непрерывны, H^* и V^* — пространства сопряженные к пространствам H и V соответственно, пространства H и H^* отождествлены по теореме Рисса. Если функция u принадлежит пространству $L_2(0,T;V)$, а её производная u' принадлежит $L_2(0,T;V^*)$, то функция u почти всюду равна некоторой непрерывной функции из $[0,T]$ в H (то есть функции из $C([0,T],H)$) и имеет место следующее равенство, которое выполняется в смысле скалярных распределений на $(0,T)$:

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\langle u',u\rangle_{V^*\times V}.$$

Поэтому функция из W_2 принадлежит $C([0,T];V^0)$ и начальное условие для аппроксимационной задачи выполняется в обычном смысле.

Для пространств W_0 и W_1 воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 2. *Пусть X и Y — банаховы пространтсва, такие что X рефлексивно и вложение $X \subset Y$ непрерывно. Если функция $u \in L_\infty(a,b;X)$ слабо непрерывна как функция со значениями в Y, то u слабо непрерывна и как функция со значениями в X.*

Тогда в силу этой леммы любая функция из W_1 и W_2 будет слабо непрерывна со значением в V^0, поэтому начальное условие имеет смысл.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^0$.

Дадим определение слабого решения.

Определение 1. Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $v \in W_0$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^1$ равенству

$$\langle v',\varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx = \langle f,\varphi\rangle \tag{14}$$

при почти всех $t \in (0,T)$ и начальному условию

$$v(0) = a. \tag{15}$$

Сначала мы докажем существование более слабого решения, а именно, решения начально-краевой задачи (1)–(4) в пространстве W_1. После чего уже будет доказано, что на самом деле рассматриваемое решение принадлежит W_0. То есть имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^0$. тогда начально-краевая задача* (1)–(4) *имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W_0$.*

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся аппроксимационно-топологическим подходом к исследованию задач гидродинамики. А именно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \varepsilon \Delta^2 v + \nabla p = f, \tag{16}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{17}$$

$$v(0) = a, \tag{18}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{19}$$

$$\Delta v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{20}$$

Сформулируем теперь понятие слабого решения рассматриваемой аппроксимационной задачи.

Определение 3. Слабым решением начально-краевой задачи (16)–(20) называется функция $v \in W_2$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^2$ равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_\Omega \Delta v : \Delta \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \tag{21}$$

при почти всех $t \in (0,T)$ и начальному условию

$$v(0) = a. \tag{22}$$

4. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$B : L_2(\Omega)^3 \to V^{-1}, \quad \langle B(v), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_2(\Omega)^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1.$$

Поскольку в (21) функция $\varphi \in V^2$ произвольна, то задача поиска слабого решения аппроксимационной задачи (функции $v \in W_2$, удовлетворяющей равенству (21) и начальному условию (22)) эквивалентна задаче о поиске решения $v \in W_2$ операторного уравнения

$$v' - B(v) + \nu A v + \varepsilon A^2 v = f, \tag{23}$$

удовлетворяющего начальному условию (22).

Также введем операторы при помощи следующих равенств:

$$L : W_2 \to L_2(0,T; V^{-2}) \times V^0, \quad L(v) = (v' + \nu A v + \varepsilon A^2 v, v|_{t=0});$$

$$K : W_2 \to L_2(0,T; V^{-2}) \times V^0, \quad K(v) = (B(v), 0).$$

Тогда задача о поиске решения $v \in W_2$ операторного уравнения (23), удовлетворяющего начальному условию (22) эквивалентна задаче о поиске решения $v \in W_2$ операторного уравнения:

$$L(v) - K(v) = (f, a). \tag{24}$$

Наряду с уравнением (24), мы будем рассматривать семейство операторных уравнений:

$$L(v) - \lambda K(v) = \lambda(f,a), \tag{25}$$

где $\lambda \in [0,1]$.

5. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

В дальнейшем, чтобы не нагромождать обозначения, мы будем обозначать одной буквой операторы, действующие в разных пространствах, если это не вызывает недопонимания. Например, в следующей лемме символ A обозначает оператор, действующий из V^1 в V^{-1}, и оператор, действующий из $L_2(0,T;V^1)$ в $L_2(0,T;V^{-1})$.

Лемма 3. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

1) Оператор $A : V^1 \to V^{-1}$ линеен, непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{V^1} \leqslant \|u\|_{V^1}. \tag{26}$$

2) Оператор $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ линеен, непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|u\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{27}$$

3) Оператор $A : W_2 \to L_2(0,T;V^{-2})$ и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C_1\|u\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{28}$$

Доказательство. 1) В силу линейности оператора A достаточно доказать его ограниченность. В силу неравенства:

$$|\langle Au,\varphi\rangle| = \left|\int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx\right| \leqslant \|u\|_{V^1}\|\varphi\|_{V^1}$$

получаем, что:

$$\|Au\|_{V^{-1}} \leqslant \|u\|_{V^1}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка и непрерывность оператора $A : V^1 \to V^{-1}$.

2) В силу оценки (26) для функции $u \in L_2(0,T;V^1)$ при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место неравенство:

$$\|Au(t)\|_{V^{-1}} \leqslant \|u(t)\|_{V^1}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя по отрезку $[0,T]$, мы и получим требуемую оценку (27), из которой и следует непрерывность оператора $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$.

3) Требуемая оценка следует из непрерывности вложения $L_2(0,T;V^{-1}) \subset L_2(0,T;V^{-2})$ и оценки (27). $\square$

Для исследования свойств оператора B нам потребуется следующая теорема [10]:

Теорема 4. *Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0,T;X), 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y), 1 \leqslant r \leqslant \infty$. Далее, пусть*

1. множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$;

2. множество $\{f' : f \in F\}$ *ограничено в* $L_r(0,T;Y)$.

Тогда при $p < \infty$ *множество* F *относительно компактно в* $L_p(0,T;E)$, *а при* $p = \infty$ *и* $r > 1$ *множество* F *относительно компактно в* $C([0,T],E)$.

Лемма 4. *Для оператора* B *имеют место следующие свойства:*

1) Отображение $B : L_4(\Omega)^3 \to V^{-1}$ *— непрерывно и имеет место оценка:*

$$\|B(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_1\|u\|^2_{L_4(\Omega)^3}. \tag{29}$$

2) Отображение $B : L_4(0,T;L_4(\Omega)^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *— непрерывно.*

3) Отображение $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-2})$ *компактно, и имеет место оценка:*

$$\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C_5\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)}. \tag{30}$$

Доказательство. 1) Для любых $v \in L_4(\Omega)^3, \varphi \in V^1$ имеем

$$|\langle B_1(u),\varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega} u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\left|\int\limits_{\Omega} u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}|u_i||u_j|\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right|dx \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u_i\|_{L_4(\Omega)}\|u_j\|_{L_4(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u\|_{L_4(\Omega)^3}\|u\|_{L_4(\Omega)^3}\|\varphi\|_{V^1} \leqslant C_1\|u\|^2_{L_4(\Omega)^3}\|\varphi\|_{V^1},$$

откуда и следует, что

$$\|B_1(u)\|_{V^{-1}} \leqslant C_1\|u\|^2_{L_4(\Omega)^3}$$

с некоторой константой C_1.

Покажем непрерывность отображения

$$B : V^1 \to V^{-1}, \quad v \mapsto B(v).$$

Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)^3$ имеем:

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle - \langle B(v^0),\varphi\rangle| = \left|\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}v_i^mv_j^m\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}v_i^0v_j^0\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\left\|v_i^mv_j^m - v_i^0v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\left\|v_i^mv_j^m - v_i^0v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} \leqslant \|\varphi\|_{V^1}\sum_{i,j=1}^{3}\left\|v_i^mv_j^m - v_i^0v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|B(v^m) - B(v^0)\right\|_{V^{-1}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\left\|v_i^mv_j^m - v_i^0v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{3} \left\|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 + v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3} \left\|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{3} \left\|v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} \left\|v_i^m (v_j^m - v_j^0)\right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{3} \left\|v_j^0 (v_i^m - v_i^0)\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3} \|v_i^m\|_{L_4(\Omega)} \left\|v_j^m - v_j^0\right\|_{L_4(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{3} \left\|v_j^0\right\|_{L_4(\Omega)} \left\|v_i^m - v_i^0\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^3} \left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^3} + C_2 \left\|v^0\right\|_{L_4(\Omega)^3} \left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^3} =$$
$$= C_2 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^3} + \left\|v^0\right\|_{L_4(\Omega)^3}\right) \left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^3}.$$

Таким образом получили, что

$$\left\|B(v^m) - B(v^0)\right\|_{V^{-1}} \leqslant C_2 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^3} + \left\|v^0\right\|_{L_4(\Omega)^3}\right) \left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^3}. \tag{31}$$

Полагая $v^m \to v^0$ в $L_4(\Omega)^3$, получаем из последнего неравенства непрерывность отображения $B : L_4(\Omega)^3 \to V^{-1}$.

2) Пусть $v \in L_4(0,T; L_4(\Omega)^3)$. В силу оценки (19) при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\|B(v)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_1 \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^3}.$$

Возведем это неравенство в квадрат, проинтегрируем по t от 0 до T и оценим правую часть сверху:

$$\int_0^T \|B(v)(t)\|^2_{V^{-1}} dt \leqslant C_1^2 \int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)^3} dt = C_1^2 \|v\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)} < \infty.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства конечна, то конечна и левая часть. Таким образом для $v \in L_4(0,T; L_4(\Omega)^3)$ мы имеем, что $B(v) \in L_2(0,T; V^{-1})$, и имеет место оценка (20).

Переходим теперь к доказательству непрерывности отображения $B : L_4(0,T; L_4(\Omega)^3) \to L_2(0,T; V^{-1})$. Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0,T; L_4(\Omega)^3)$ сходится к некоторому пределу $v^0 \in L_4(0,T; L_4(\Omega)^3)$. Из неравенства (31) получим, что при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место оценка

$$\left\|B(v^m)(t) - B(v^0)(t)\right\|_{V^{-1}} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^3} + \left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^3}\right) \left\|(v^m - v^0)(t)\right\|_{L_4(\Omega)^3}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T. Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим:

$$\int_0^T \left\|B(v^m)(t) - B(v^0)(t)\right\|^2_{V^{-1}} dt \leqslant$$
$$\leqslant C_2^2 \int_0^T \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^3} + \left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^3}\right)^2 \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^3} dt \leqslant$$
$$\leqslant C_2^2 \left(\int_0^T \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^3} + \left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^3}\right)^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int_0^T \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^4_{L_4(\Omega)^3} dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку в силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^T \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^3} + \left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^3}\right)^4 dt \leqslant$$
$$\leqslant 8 \int_0^T \left(\|v^m(t)\|^4_{L_4(\Omega)^3} + \|v^0(t)\|^4_{L_4(\Omega)^3}\right) dt =$$
$$= 8 \int_0^T \|v^m(t)\|^4_{L_4(\Omega)^3} dt + 8 \int_0^T \|v^0(t)\|^4_{L_4(\Omega)^3} dt =$$
$$= 8\|v^m\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)} + 8\|v^0\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)}.$$

То:

$$\left\|B(v^m) - B(v^0)\right\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant 2\sqrt{2}C_2^2 \left\|v^m - v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)} \times$$
$$\times \left(\|v^m\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)} + \|v^0\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)}\right)^{1/2} \leqslant 2\sqrt{2}C_2^2 \left\|v^m - v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)} \times$$
$$\times \left(\|v^m\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)} + \|v^0\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)}\right)$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. А это и значит, что отображение

$$B : L_4(0,T; L_4(\Omega)^3) \to L_2(0,T; V^{-1})$$

непрерывно.

3) В силу леммы 1 каждая функция $u \in W_2$ принадлежит $C([0,T]; V^0)$. Поэтому каждая функция из W_2 принадлежит не только $L_2(0,T; V^2)$, но и $L_2(0,T; V^2) \cap L_\infty(0,T; V^0)$.

Далее, отметим, что в силу [9] имеет место вложение:

$$L_2(0,T; V^2) \cap L_\infty(0,T; V^0) \subset L_4(0,T; V^1).$$

Таким образом для пространства W_2 имеет место вложение:

$$W_2 \subset Y = \left\{v : v \in L_4(0,T; V^1), v' \in L_2(0,T; V^{-2})\right\}.$$

В силу теоремы 4 имеет место компактное вложение:

$$Y \hookrightarrow L_4(0,T;L_4(\Omega)^3)$$

Таким образом, действие отображения B можно представить следующим образом:

$$W_2 \subset Y \hookrightarrow L_4(0,T;L_4(\Omega)^3) \xrightarrow{B} L_2(0,T;V^{-1}) \subset L_2(0,T;V^{-2}).$$

Здесь первое и последнее вложения непрерывны, второе вложение вполне непрерывно и отображение $B : L_4(0,T;L_3(\Omega)^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывно в силу пункта (2) этой леммы. Таким образом, отображение $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-2})$ вполне непрерывно.

Оценим теперь $\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})}$. Имеем:

$$|\langle B(v),\varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\left|\int\limits_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}|v_i||v_j|\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right|dx \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|v_i\|_{L_4(\Omega)}\|v_j\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\|v\|_{L_4(\Omega)^3}\|v\|_{V^0}\|\varphi\|_{V^2}.$$

Откуда для любой функции $v \in W_2$ при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место оценка:

$$\|B(v)(t)\|_{V^{-2}} \leqslant C_3\|v(t)\|_{L_4(\Omega)^3}\|v(t)\|_{V^0}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя полученное неравенство по отрезку $[0,T]$ получим:

$$\int\limits_0^T \|B(v)(t)\|^2_{V^{-2}}dt \leqslant C_3^2\int\limits_0^T \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^3}\|v(t)\|^2_{V^0}dt \leqslant$$

$$\leqslant C_3^2\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\int\limits_0^T \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^3}dt = C_3^2\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\|v\|^2_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^3)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3^2 C_2\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Откуда и следует требуемое неравенство (30). □

Для дальнейшего доказательства нам потребуется следующее утверждение [11]:

Лемма 5. *Предположим, что X и Y — два гильбертова пространства и $X \subset Y$ с непрерывным оператором вложения $i : X \to Y$, и $i(X)$ плотно в Y. Далее, пусть X — сепарабельное пространство и $A : X \to X^*$ непрерывный линейный оператор. Предположим, что существует $\alpha > 0$ такое, что*

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \alpha\|u\|^2_X, \quad \forall u \in X.$$

Тогда, если $a \in Y$ и $f \in L_2(0,T;X^*)$, то задача Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in (0,T), \tag{32}$$

$$u(0) = a \tag{33}$$

имеет единственное решение

$$u \in L_2(0,T;X), \quad u' \in L_2(0,T;X^*),$$

которое непрерывно зависит от f и a.

Лемма 6. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства:*

1) Оператор $L : W_2 \to L_2(0,T; V^{-2}) \times V^0$ непрерывно обратим и обратный к нему оператор $L^{-1} : L_2(0,T; V^{-1}) \times V^0 \to W_2$ непрерывен.

2) Оператор $K : W_2 \to L_2(0,T; V^{-2}) \times V^0$ вполне непрерывен.

Доказательство. 1) Покажем выполняемость условий леммы 5 для оператора $\nu A + \varepsilon A^2 : V^2 \to V^{-2}$. Имеем:

$$\langle \nu Av + \varepsilon A^2 v, v\rangle = \langle \nu Av, v\rangle + \langle \varepsilon A^2 v, v\rangle = \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx + \varepsilon \int\limits_\Omega \Delta v \Delta v dx =$$
$$= \nu \|v\|^2_{V^1} + \varepsilon \|v\|^2_{V^2} \geqslant \varepsilon \|v\|^2_{V^2}.$$

Следовательно, выполнены все условия леммы 5, и оператор L является непрерывно обратимым.

2) Доказательство утверждения этого пункта непосредственно следует из пункта 3 леммы 4. □

6. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

В этом пункте мы докажем утверждения об априорных оценках решений семейства уравнений (25) или, что то же самое, семейства

$$v' - \lambda B(v) + \nu Av + \varepsilon A^2 v = \lambda f, \tag{34}$$
$$v(0) = \lambda a, \quad \lambda \in [0,1]. \tag{35}$$

Теорема 5. *Если $v \in W_2$ — решение (30) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место оценка:*

$$\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0}; \tag{36}$$
$$\nu\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0}; \tag{37}$$
$$\varepsilon\|v\|^2_{L_2(0,T;V^2)} \leqslant \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0}. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (34),(35) для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Применим уравнение (34) к функции $v \in W_2$.

Получим:
$$\langle v', v\rangle - \lambda\langle B(v), v\rangle + \nu\langle Av, v\rangle + \varepsilon\langle A^2 v, v\rangle = \lambda\langle f, v\rangle.$$

Преобразуем слагаемые в последнем равенстве:

$$\langle v', v\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0};$$
$$\langle B(v), v\rangle = \sum_{i,j=1}^3 \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^3 \int\limits_\Omega v_j \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_i) dx = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3 \int\limits_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j} v_i v_i dx = 0;$$
$$\nu\langle Av, v\rangle = \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx = \nu\|v\|^2_{V^1};$$
$$\varepsilon\langle A^2 v, v\rangle = \varepsilon \int\limits_\Omega \Delta v \Delta v dx = \varepsilon\|v\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, получили, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \nu\|v(t)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(t)\|^2_{V^2} = \lambda\langle f(t),v(t)\rangle.$$

Оценим правую часть последнего равенства сверху:

$$|\lambda\langle f(t),v(t)\rangle| \leqslant \lambda\,|\langle f(t), v(t)\rangle| \leqslant \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1} \leqslant \frac{1}{2\nu}\|f(t)\|^2_{V^{-1}} + \frac{\nu}{2}\|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством:

$$ab \leqslant \frac{\nu a^2}{2} + \frac{b^2}{2\nu}.$$

Откуда получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\nu}{2}\|v(t)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2\nu} \leqslant \|f\|^2_{V^{-1}}.$$

Умножая последнее неравенство на 2 и интегрируя от 0 до t, имеем:

$$\|v(t)\|^2_{V^0} + \int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{V^1}ds + 2\varepsilon\int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{V^2}ds \leqslant \frac{1}{\nu}\int\limits_0^t \|f(s)\|^2_{V^{-1}}ds + \|a\|^2_{V^0}.$$

Оценивая правую часть сверху и пользуясь неотрицательностью каждого слагаемого в левой части, получаем три неравенства:

$$\|v(t)\|^2_{V^0} \leqslant \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0};$$

$$\int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{V^1}ds \leqslant \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0};$$

$$2\varepsilon\int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{V^2}ds \leqslant \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0}.$$

Так как в каждом из этих неравенств правая часть от t не зависит, то можно перейти к максимуму по t в левой части. Откуда и получаем требуемые неравенства (36)–(38). $\square$

Теорема 6. *Если $v \in W_2$ — решение* (30) *для какого то $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место оценка:*

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C_6\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{C_5}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_5\|u\|^2_{V^0} + \tag{39}$$

$$+\left(\nu C_6 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0}}.$$

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (34),(35) для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Тогда v удовлетворяет уравнению:

$$v' - \lambda B(v) + \nu Av + \varepsilon A^2 v = \lambda f.$$

Выразим отсюда v' и оценим его по норме $L_2(0,T;V^{-2})$.

$$\begin{aligned}
\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} &= \|\lambda f + \lambda B(v) - \nu Av - \varepsilon A^2 v\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant \\
&\leqslant \|\lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|\lambda B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \\
&+ \varepsilon\|A^2 v\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant \lambda C_6\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \lambda\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \\
&+ \nu C_6\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \varepsilon\|A^2 v\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C_6\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\
&+ C_5\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \nu C_6\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \sqrt{\varepsilon}\|v\|_{L_2(0,T;V^2)} \leqslant \\
&\leqslant C_6\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_5\left(\frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0}\right) + \\
&+ \nu C_6\sqrt{\frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0}} + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0}} = \\
&= C_6\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{C_5}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_5\|a\|^2_{V^0} + \\
&+ \left(\nu C_6 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|a\|^2_{V^0}}.
\end{aligned}$$

Это и дает нам требуемую оценку (39). □

7. РАЗРЕШИМОСТЬ АППРОКСИМАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

В прошлом пункте мы доказали оценки для решений семейства (25). А именно, для его решений имеют место оценки (36), (38) и (39). Из этих оценок непосредственно следует, что если $v \in W_2$ — решение семейства (25), то для него имеет место оценка:

$$\|v\|_{W_2} \leqslant C_7, \tag{40}$$

где константа C зависит вообще говоря от $\frac{1}{\varepsilon}$.

На основе этой оценки и степени Лере-Шаудера вполне непрерывных векторных полей мы докажем следующую теорему о существовании решений аппроксимационной задачи.

Теорема 7. *Для любых $\varepsilon > 0, f \in L_2(0,T;V^{-1}), a \in V^0$ существует хотя бы одно слабое решение аппроксимационной задачи* (16)–(20).

Доказательство. Так как задача о слабых решениях аппроксимационной задачи (16)–(20) эквивалентна задаче о существовании решения $v \in W_2$ операторного уравнения (24), то докажем разрешимость операторного уравнения (24).

Отметим, что семейство операторных уравнений (25) совпадает с (24) при $\lambda = 1$.

В силу оценки (40) все решения $v \in W_2$ семейства операторных уравнений (25) заведомо лежат внутри шара B_R радиуса $R = C_7 + 1$ с центром в нуле.

Так как в силу леммы 6 оператор $K(\cdot)$ вполне непрерывен, то оператор $K + (f,a)$ также будет вполне непрерывен.

Поскольку в силу той же леммы 6 оператор L непрерывно обратим, то оператор $G(\lambda,v) = \lambda L^{-1}(K(v) + (f,a))$ будем вполне непрерывен по совокупности переменных как суперпозиция вполне непрерывного и непрерывного операторов, а также в связи с тем, что это линейная гомотопия.

Таким образом, (25) можно переписать в виде

$$v - \lambda G(v) = 0, \tag{41}$$

и для вполне непрерывного векторного поля $I - \lambda G(\cdot)$ определена степень Лере-Шаудера:

$$\deg_{LS}(I - \lambda G, B_R, 0).$$

В силу свойства гомотопической инвариантности степени Лере-Шаудера:

$$\deg_{LS}(I, B_R, 0) = \deg_{LS}(I - G, B_R, 0).$$

Но в силу аксиомы нормировки $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$.

Следовательно,

$$\deg_{LS}(I - G, B_R, 0) = 1.$$

Откуда получаем, что уравнение (41) при $\lambda = 1$ имеет решение $v \in W_2$. Следовательно, и операторное уравнение (24) имеет хотя бы одно решение. □

8. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

В силу теоремы 6 для каждого $\varepsilon > 0$ существует решение аппроксимационной задачи (16)–(20), и для этого решения имеют место оценки (36), (37), (38) и (39).

Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \to 0$, при $n \to \infty$. Тогда при каждом ε_n существует решение $v_n \in W_2 \subset W_1$, удовлетворяющее для любого $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0,T)$ равенству:

$$\langle v_n', \varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (v_n)_i (v_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla v_n : \nabla \varphi dx + \varepsilon_n \int_\Omega \Delta v_n \Delta \varphi dx = \langle f, \varphi\rangle \qquad (42)$$

и начальному условию

$$v_n(0) = a. \qquad (43)$$

В силу оценки (36) последовательность $\{v_n\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^0)$. Следовательно, без ограничения общности, в случае необходимости, переходя к подпоследовательности, $v_n \to u$ $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$. В силу оценки (37) последовательность v_n без ограничения общности слабо сходится к функции u в $L_2(0,T;V^1)$. Следовательно,

$$\nu \int_\Omega \nabla v_n : \nabla \varphi dx \to \nu \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi dx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В силу оценки (38) последовательность $\sqrt{\varepsilon_n} v_n$ ограничена в $L_2(0,T;V^2)$. Откуда, в случае необходимости переходя к подпоследовательности,

$$\sqrt{\varepsilon_n} v_n \to w \quad \text{в} \quad L_2(0,T;V^2).$$

Таким образом, поскольку $\sqrt{\varepsilon_n} \to 0$ при $n \to \infty$, имеем, что

$$\varepsilon_n \int_\Omega \Delta v_n \Delta \varphi dx = \sqrt{\varepsilon}_n \left(\sqrt{\varepsilon}_n \int_\Omega \Delta v_n \Delta \varphi dx \right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее, в силу оценки (39) последовательность v_n' сходится слабо (в случае необходимости перехода к подпоследовательности) к u' в $L_2(0,T;V^{-2})$. То есть,

$$\langle v_n', \varphi\rangle \to \langle u', \varphi\rangle \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Наконец, по теореме Обена-Дубинского-Симона (теорема 4) имеет место компактное вложение

$$W_1 \hookrightarrow L_2(0,T;L_4(\Omega)^4).$$

Поэтому последовательность $v_n \to u$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega)^4)$ при $n \to \infty$. Откуда для конвективного члена:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (v_n)_i (v_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \to \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь $(v_n)_i$ сходится $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$, $(v_n)_j$ сходится сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Поэтому $(v_n)_i(v_n)_j$ сходится слабо в $L_2(0,T;L_{4/3}(\Omega))$.

Поскольку $v_n(0) = a$ и $v_n \to u$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$ и $v_n' \to u'$ слабо в $L_2(0,T;V^{-2})$, то $v_n(0) \to u(0)$ слабо, например, V^{-2} и $u(0) = a$.

Таким образом, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (42), (43), мы получили, что существует функция $u \in W_1$, которая удовлетворяет соотношению

$$\langle u',\varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx = \langle f,\varphi \rangle \tag{44}$$

и начальному условию

$$u(0) = a. \tag{45}$$

9. РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЯ

В прошлом пункте мы доказали существование слабого решения начально-краевой задачи (1)-(4), принадлежащего пространству W_1. То есть, для любого $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ и любого $a \in V^0$ существует функция $v \in W_1$, являющаяся слабым решением начально-краевой задачи (1)-(4). Или, что то же самое, эта функция $v \in W_1$, должна удовлетворять равенству (44) и начальному условию (45).

Поскольку в (44) пробная функция $\varphi \in V^2$ произвольна, то слабое решение $u \in W_1$ начально-краевой задачи (1)-(4) должно удовлетворять операторному уравнению

$$u' - B(u) + \nu A u = f \tag{46}$$

и начальному условию (45). Отметим, что равенство (46) имеет место в $L_2(0,T;V^{-2})$.

Несмотря на то, что данное равенство имеет место в $L_2(0,T;V^{-2})$, его правая часть f по условию принадлежит $L_2(0,T;V^{-1})$. Далее, $\nu A v \in L_2(0,T;V^{-1})$ (пункт 2 леммы 3). В силу известной оценки Ладыженской:

$$\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \left(\int\limits_0^T \|B(v(t))\|_{V^{-1}}^{4/3} dt \right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \left(\int\limits_0^T \|v(t)\|_{V^0}^{2/3} \|v(t)\|_{V^1}^2 dt \right)^{3/4} \leqslant C_8 \left(\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)}^{2/3} \int\limits_0^T \|v(t)\|_{V^1}^2 dt \right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)}^{1/2} \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{3/2}.$$

Получим, что $B(v) \in L_{4/3}(0,T;V^{-1})$.

Таким образом, выражая из (46) функцию u', получим, что

$$u' = f + B(u) - \nu A u \in L_{4/3}(0,T; V^{-1}).$$

Следовательно, мы получили, что два функционала из $L_2(0,T; V^{-2})$ равны. Но так как один из них принадлежит $L_{4/3}(0,T; V^{-1})$, то второй также принадлежит $L_{4/3}(0,T; V^{-1})$. Таким образом, $u' \in L_{4/3}(0,T; V^{-1})$. Таким образом, полученное слабое решение начально-краевой задачи (1)-(4) принадлежит пространству W_0, что и завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zvyagin, V. G. Of a some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids / В. Г. Звягин // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 75-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л. Д. Кудрявцева. — Москва, 1998. — С. 197.

2. Звягин, В. Г. Об одном варианте аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье-Стокса / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 3. — С. 104–124.

3. Звягин, В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 112 с.

4. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.

5. Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М. : ГИФМЛ, 1961. — 204 с.

6. Солонников, В. А. Оценки тензоров Грина для некоторых граничных задач / В. А. Солонников // Доклады АН СССР. — 1960. — Т. 130, № 5. — С. 988–991.

7. Ворович И. И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости / И. И. Ворович, В. И. Юдович // Математический сборник. — 1961. — Т. 53, № 4. — С. 393–428.

8. Звягин, В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — М. : КРАСАНД, 2012. — 416 с.

9. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 371 с.

10. Simon, J. Compact sets in the space $L^p(0,T; B)$ / J. Simon// Annali di Matematica pura ed applicata. — 1987. — V. 146. — P. 65–96.

11. Zvyagin, V. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics / V. Zvyagin, D. Vorotnikov. — De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications, 12. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2008. — 248 p.

REFERENCES

1. Zvyagin V.G. Of a some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids. [Zvyagin V.G. Of a some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids]. Functional spaces. Differential operators. Problems of mathematical education. Abstracts of the international conference devoted to the 75th anniversary of Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor L.D. Kudryavtsev, Moscow, 1998, p. 197.

2. Zvyagin V.G., Zvyagin A.V., Turbin M.V. On one approach of topological approximation method for weak solvability investigation of Navier-Stokes system. [Zvyagin V.G., Zvyagin A.V., Turbin M.V. Ob odnom variante approksimacionno-topologicheskogo metoda issledovaniya slaboj

razreshimosti sistemy Nav'e-Stoksa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 104–124.

3. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Topological approximation method for hydrodynamics investigation. The Navier-Stokes system. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Approksimacionno-topologicheskij podxod k issledovaniyu zadach gidrodinamiki. Sistema Nav'e-Stoksa]. Moscow: URSS, 2004, 112 p.

4. Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. [Temam R. Uravneniya Nav'e-Stoksa. Teoriya i chislennyj analiz]. Moscow: Mir, 1981, 408 p.

5. Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. [Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti]. Moscow, 1961, 204 p.

6. Solonnikov V. A. On estimates of Green's tensors for certain boundary problems. [Solonnikov V.A. Ocenki tenzorov Grina dlya nekotoryx granichnyx zadach]. *Doklady AN SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1960, vol. 130, no. 5, pp. 988–991.

7. Vorovich I.I., Yudovich V.I. Steady flow of a viscous incompressible fluid. [Vorovich I.I., Yudovich V.I. Stacionarnye techeniya vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1961, vol. 53, no. 4, pp. 393–428.

8. Zvyagin V.G., Turbin M.V. Mathematical problems of hydrodynamics of viscoelastic fluids. [Zvyagin V.G., Turbin M.V. Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugix sred]. Moscow, 2012, 416 p.

9. Lions J.L., Magenes E. Problemés aux limites non homogénes et applications. [Lions Zh.-L., Madzhenes E'. Neodnorodnye granichnye zadachi i ix prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 371 p.

10. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica pura ed applicata, 1987, vol. 146, pp. 65–96.

11. Zvyagin V., Vorotnikov D. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics. De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications, 12. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2008, 248 p.

Звягин Виктор Григорьевич, заведующий кафедрой, математический факультет, кафедра алгебры и топологических методов анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvg@math.vsu.ru

Zvyagin Victor G., head of chair, Department of Mathematics, Chair of Algebra and Topological Analysis Methods, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvg@math.vsu.ru

Звягин Андрей Викторович, заведующий лабораторией, НИИ математики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Zvyagin Andrey V., head of laboratory, Institute of Mathematics of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Турбин Михаил Вячеславович, доцент кафедры, математический факультет, кафедра алгебры и топологических методов анализа, Воронеж, Россия
E-mail: mrmike@mail.ru

Turbin Mikhail V., associate professor, Department of Mathematics, Chair of Algebra and Topological Analysis Methods, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mrmike@mail.ru