УДК 517.958

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ АППРОКСИМАЦИОННО-ТОПОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА*

В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 23.05.2016 г.

Аннотация. В статье приведён один из вариантов аппроксимационно-топологического метода исследования задач математической гидродинамики на примере системы Навье-Стокса. Для этого систему уравнений Навье-Стокса аппроксимируют некоторой задачей, которая получается путём добавления квадрата оператора Стокса от производной скорости по времени с малым параметром. Для этой аппроксимационной задачи, обладающей гораздо более лучшими топологическими свойствами, доказывается разрешимость на основе теории степени Лере-Шаудера вполне непрерывных векторных полей и априорных оценок решений. Затем на основе априорных оценок решений, не зависящих от параметра аппроксимации, показывается, что из последовательности слабых решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к слабому решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Ключевые слова: система Навье-Стокса, слабая разрешимость, аппроксимационно-топологический метод.

ON ONE APPROACH OF TOPOLOGICAL APPROXIMATION METHOD FOR WEAK SOLVABILITY INVESTIGATION OF NAVIER-STOKES SYSTEM

V. G. Zvyagin, M. V. Turbin, A. V. Zvyagin

Abstract. The article presents one of approximation–topological methods in the study of problems of mathematical hydrodynamics using the Navier–Stokes system as an example. For this purpose, the Navier–Stokes system of equations is approximated by a certain problem, which is obtained by adding the square of the Stokes operator of the derivative of the velocity with respect to time with a small parameter. For this approximation problem, which has much better topological properties, we prove solvability on the base of the Leray–Schauder theory of completely continuous vector fields and a priori estimates of solutions. Then, based on a priori estimates of solutions that do not depend on the approximation parameter, it is shown that from a sequence of weak solutions of the approximation problem one can select a subsequence that weakly converges to the weak solution of the main problem as the approximation parameter tends to zero.

Keywords: Navier-Stokes system, weak solvability, topological approximation method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как правило, для исследования разрешимости задач гидродинамики ранее использовался или какой-то вариант метода Галеркина, или итерационный метод, или подход, основанный

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16–11–10125, выполняемый в Воронежском государственном университете) (Теорема 1) и РФФИ (проект №16–01–00370) (Теорема 2).

на интерпретации задачи в виде уравнения в банаховом пространстве и использовании методов полугрупп. Идея аппроксимационно-топологического подхода к исследованию слабой разрешимости задач гидродинамики была впервые озвучена на международной конференции в 1998 году [1]. Затем этот метод был использован для исследования ряда задач неньютоновой гидродинамики ([2]-[6] и др.). Но, после доклада В.Г Звягина в Лозанне (Швейцария, 2000 год) [7] американский математик, Михайлофф – директор центра нелинейных исследований в Нью-Йорке, предложил изложить новый метод на примере исследования слабой разрешимости системы Навье-Стокса, что по его мнению, помогло бы лучше понять новый метод. Это и было сделано в книге [8].

Кратко этот метод заключался в следующем. Вначале находятся аппроксимации исходной начально-краевой задачи вспомогательными задачами с более хорошими топологическими свойствами. Затем на основе топологической степени вполне непрерывных, уплотняющих векторных полей или отображений, удовлетворяющих (S^+) условию, и априорных оценок решений устанавливается разрешимость этих аппроксимационных задач в некотором вспомогательном пространстве с хорошими топологическими свойствами. Далее показывается, что из последовательности решений аппроксимационных задач можно выделить подпоследовательность, которая в некотором смысле (слабом или в смысле распределений) сходится к решению исходной задачи. Более подробно это изложено в работе [9].

В последующие годы произошло дальнейшее развитие и применение аппроксимационно-топологического метода в задачах неньютоновской гидродинамики (см. монографии [10], [11] и большое число статей). В частности, появились новые варианты этого метода, существенно отличающиеся от первоначального.

Настоящая работа посвящена одному из таких вариантов развития аппроксимационно-топологического метода, примененному к системе Навье-Стокса. Это продолжает реализацию идеи Михайлоффа о доходчивом изложении новых подходов на примере их применения к простым, хорошо изученным моделям.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, с границей $\partial\Omega$ класса C^3. Мы будем исследовать разрешимость следующей начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{2}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = a. \tag{4}$$

Здесь, $v = (v_1(t,x), \ldots, v_n(t,x))$ — скорость движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — функция плотности внешних сил, $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости.

Исследуем слабую разрешимость рассматриваемой начально-краевой задачи.

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых функций, суммируемых с p-ой степенью. Через $W_p^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, будем обозначать пространство Соболева функций, которые со своими производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$. Через $C_0^\infty(\Omega)$ мы обозначим пространство бесконечно-дифференцируемых функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, и с компактным носителем в Ω. Пусть $\mathcal{V}$ множество $\{u \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$.

Введем шкалу пространств V^α (см. [12]). Через V^0 мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 — по норме $W_2^1(\Omega)$ и через V^2 пространство $V^2 = W_2^2(\Omega) \cap V^1$. Мы также будем использовать разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)$: $L_2(\Omega) = V^0 \oplus \nabla W_2^1(\Omega)$, где $\nabla W_2^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in W_2^1(\Omega)\}$ (т. е. пространства V^0 и $\nabla W_2^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)$).

Далее введем проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$. Рассмотрим оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A)$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots$ — собственные значения оператора A. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j и определим пространство V^β, $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В [11] показано, что норма в V^β эквивалентна норме $W_2^\beta(\Omega)$, если $\beta > -\frac{1}{2}$. Заметим, что в случае β равным 0, 1, 2 и 3, мы получим

$$\|u\|_{V^0} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{V^1} = \left(\int\limits_\Omega \nabla u(x) : \nabla u(x) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{V^2} = \left(\int\limits_\Omega \Delta u(x) \Delta u(x) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{V^3} = \left(\int\limits_\Omega \nabla \Delta u(x) : \nabla \Delta u(x) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь символ : обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$, $i, j = 1, \dots m$, имеем $C : D = \sum\limits_{i,j=1}^{m} c_{ij} d_{ij}$.

Кроме того, из определения шкалы пространств V^β следует, что оператор $A : V^\beta \to V^{\beta-2}$ непрерывно обратим. Через $V^{-\beta} = (V^\beta)^*$, $\beta \in \mathbb{N}$, мы будем обозначать сопряженное пространство к V^β. Используя теорему Рисса, мы отождествим пространство V^0 с его сопряженным $(V^0)^*$. Поэтому имеют место следующие вложения

$$V^3 \subset V^1 \subset V^0 \equiv (V^0)^* \subset V^{-1},$$

где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны.

Через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать действие функционала f из $V^{-\alpha}$ на элемент φ из V^α, $\alpha \geqslant 0$. Символами $C([0,T]; F)$, $C_w([0,T]; F)$, $L_2(0,T; F)$ мы обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных и суммируемых с квадратом функций на $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве F.

Введем пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{ v \in L_2(0,T; V^1) \cap L_\infty(0,T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0,T; V^{-1}) \}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$.

Введем понятие слабого решения начально-краевой задачи (1) – (4). Положим $f \in L_2(0,T; V^{-1})$, $a \in V^0$.

Определение 1. Функция $v \in W_1$ называется слабым решением начально-краевой задачи (1) – (4), если для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0, T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle,$$

и начальному условию (4).

Замечание 2. Известно [13, Глава III, Лемма 1.1, Лемма 1.4], что $W_1 \subset C_w(0, T; V^0)$. Следовательно, начальное условие (4) имеет смысл.

Основным утверждением является следующая

Теорема 3. *Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $a \in V^0$. Тогда начально-краевая задача (1) – (4) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W_1$.*

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $a \in V^3$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon \Delta^2 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{6}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \Delta v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

$$v|_{t=0} = a. \tag{8}$$

Мы будем рассматривать эту вспомогательную задачу в следующем функциональном пространстве:

$$W_2 = \{v \in C(0, T; V^3), \quad v' \in L_2(0, T; V^3)\}.$$

с нормой $\|v\|_{W_2} = \|v\|_{C(0,T;V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$.

Введем определение слабого решения для вспомогательной задачи:

Определение 4. Функция $v \in W_2$ называется слабым решением вспомогательной задачи, если для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi\, dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{9}$$

и начальному условию (8).

Далее мы докажем существование слабого решения вспомогательной задачи (5) – (8) и покажем, что из последовательности ее решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению начально-краевой задачи (1) – (4) при стремлении параметра ε к нулю.

Перепишем вспомогательную задачу (5) – (8) в операторной форме. Используя слагаемые в равенстве (5), мы введем операторы с помощью следующих равенств:

$$A^2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A^2 v, \varphi\rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi\, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1,$$

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1,$$

$$B : L_4(\Omega) \to V^{-1}, \quad \langle B(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} v_i v \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1,$$

$$J : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega v\varphi\, dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1.$$

Поскольку в (9) функция $\varphi \in V^1$ произвольна, то это равенство эквивалентно следующему операторному уравнению в $L_2(0, T; V^{-1})$:

$$Jv' + \varepsilon A^2 v' - B(v) + \nu Av = f. \tag{10}$$

Таким образом, слабое решение аппроксимационной задачи — это решение $v \in W_2$ операторного уравнения (10), удовлетворяющее начальному условию (8).

Также, мы определим следующие операторы

$$\widetilde{A} : W_2 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad \widetilde{A}(v) = ((J + \varepsilon A^2)v' + \nu Av, v|_{t=0}),$$

$$Q : W_2 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad Q(v) = (B(v), 0),$$

Тогда задача (10), удовлетворяющая начальному условию (8), эквивалентна следующему операторному уравнению

$$\widetilde{A}(v) = Q(v) + (f, a). \tag{11}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в уравнение (11). Чтобы не нагромождать обозначений, мы будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах.

Лемма 1. *1) Оператор $A : V^1 \to V^{-1}$ — непрерывен и для любой функции $v \in V^1$ имеет место оценка:*

$$\|Av\|_{V^{-1}} \leqslant \|v\|_{V^1}. \tag{12}$$

2) Для любой функции $v \in L_2(0, T; V^1)$ функция $Av \in L_2(0, T; V^{-1})$, оператор $A : L_2(0, T; V^1) \to L_2(0, T; V^{-1})$ является непрерывным и имеет место оценка

$$\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{13}$$

3) Для любой функции $v \in C([0, T]; V^3)$ функция $Av \in L_2(0, T; V^{-1})$ и оператор $A : C([0, T]; V^3) \to L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка

$$\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_1\|v\|_{C([0,T];V^3)}. \tag{14}$$

Доказательство. 1), 2) Все утверждения этих пунктов могут быть найдены в [11, Лемма 4.4.1, пункты 1, 2].

3) Пусть $v \in C([0, T]; V^3)$. Для доказательства непрерывности оператора A покажем его ограниченность. Тогда в силу неравенства (13) получаем, что

$$\|Av\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)} = \int\limits_0^T \|v(t)\|^2_{V^1}\, dt \leqslant C_2 \int\limits_0^T \|v(t)\|^2_{V^3}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|^2_{V^3} \int\limits_0^T dt \leqslant C_1\|v\|^2_{C([0,T];V^3)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\|v\|_{V^1} \leqslant C_2\|v\|_{V^3}$, $v \in V^3$, которое имеет место в силу непрерывного вложения $V^3 \subset V^1$. Следовательно, установлена оценка (14).

Таким образом, для любой функции $v \in C([0,T];V^3)$ функция $Av \in L_2(0,T;V^{-1})$ и оператор $A : C([0,T];V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ является непрерывным. Лемма доказана. □

Лемма 2. *1) Отображение $B : L_4(\Omega) \to V^{-1}$ непрерывно и для него имеет место оценка:*

$$\|B(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_3\|v\|^2_{L_4(\Omega)}. \tag{15}$$

2) Для любого $v \in L_4(0,T;L_4(\Omega))$ функция $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ и отображение $B : L_4(0,T;L_4(\Omega)) \to L_2(0,T;V^{-1})$ — непрерывно.

3) Для любой функции $v \in W_2$ функция $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ и отображение $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ является вполне непрерывным.

Доказательство. 1), 2) Все утверждения этих пунктов можно найти в [11, Лемма 4.4.5].

3) Для доказательства этого пункта воспользуемся теоремой Обен-Симона (см. [11, Теорема C.4.1]). Рассмотрим множество $F = \{v \in L_4(0,T;V^3), v' \in L_2(0,T;V^0)\}$. Так как вложение $V^3 \subset L_4(\Omega)$ является компактным, то компактным является вложение $F \subset L_4(0,T;L_4(\Omega))$.

Из непрерывных вложений $C([0,T];V^3) \subset L_4(0,T;V^3)$ и $L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;L_2(\Omega))$ следует непрерывное вложение $W_2 \subset F$. Кроме того, из второго пункта настоящей леммы мы имеем, что оператор $B : L_4(0,T;L_4(\Omega)) \to L_2(0,T;V^{-1})$ является непрерывным. Таким образом, имеем следующую суперпозицию вложений:

$$W_2 \subset F \subset L_4(0,T;L_4(\Omega)) \xrightarrow{B} L_2(0,T;V^{-1}),$$

где первое вложение непрерывно, второе — вполне непрерывно и отображение B — непрерывно. Следовательно, для любой функции $v \in W_2$ получим, что функция $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$, а отображение $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ — вполне непрерывно. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Оператор $A^2 : V^3 \to V^{-1}$ — линейный, непрерывный, обратимый и для него имеет место оценка:*

$$\|A^2 v\|_{V^{-1}} \leqslant \|v\|_{V^3}. \tag{16}$$

Кроме того, обратный к нему оператор $(A^2)^{-1} : V^{-1} \to V^3$ является непрерывным.

Доказательство. В силу определения оператора A и пространств V^β, $\beta \in \mathbb{R}$, мы получим, что оператор $A^2 : V^3 \to V^{-1}$ непрерывен, обратим и обратный к нему оператор $(A^2)^{-1} : V^{-1} \to V^3$ непрерывен.

Установим оценку (16). По определению оператора A^2 для любых $v \in V^3$, $\varphi \in V^1$, имеем:

$$|\langle A^2 v, \varphi\rangle| = \left|\int\limits_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\varphi\, dx\right| \leqslant \|v\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Откуда непосредственно и следует неравенство (16). Лемма доказана. □

Лемма 4. *1) Оператор $J+\varepsilon A^2 : V^3 \to V^{-1}$ — линейный, непрерывный, обратимый оператор и для него имеет место оценка*

$$\varepsilon\|v\|_{V^3} \leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v\|_{V^{-1}} \leqslant C_4(1+\varepsilon)\|v\|_{V^3}. \tag{17}$$

Причем обратный к нему оператор $(J+\varepsilon A^2)^{-1} : V^{-1} \to V^3$ — непрерывен.

2) Для любой функции $v \in L_2(0,T;V^3)$ функция $(J+\varepsilon A^2)v \in L_2(0,T;V^{-1})$ и оператор $(J+\varepsilon A^2): L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен и обратим. Кроме того, имеет место оценка

$$\varepsilon\|v\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_4(1+\varepsilon)\|v\|_{L_2(0,T;V^3)}. \tag{18}$$

Причем обратный к нему оператор $(J+\varepsilon A^2)^{-1}: L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^3)$ — непрерывен.

Доказательство. 1) Оператор $J+\varepsilon A^2$ линеен как сумма двух линейных операторов. Таким образом, для доказательства его непрерывности достаточно доказать его ограниченность. Имеют место соотношения:

$$|\langle (J+\varepsilon A^2)v, \varphi\rangle| = \left|\int\limits_\Omega v\varphi\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\varphi\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_\Omega v\varphi\,dx\right| + \varepsilon\left|\int\limits_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\varphi\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|v\|_{V^0}\|\varphi\|_{V^0} + \varepsilon\|v\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1} \leqslant C_5\|v\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1} + \varepsilon\|v\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1} = C_4(1+\varepsilon)\|v\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу непрерывности вложений $V^3 \subset V^0$ и $V^1 \subset V^0$ имеют место неравенства

$$\|v\|_{V^0} \leqslant C_6\|v\|_{V^3}, \quad \|v\|_{V^0} \leqslant C_7\|v\|_{V^1}.$$

Отсюда следует правая часть оценки (17). Таким образом, оператор $J+\varepsilon A^2: V^3 \to V^{-1}$ является непрерывным.

Заметим, что оператор $J: V^1 \to V^{-1}$ является непрерывным. Поскольку вложение $V^3 \subset V^1$ является вполне непрерывным, то оператор $J: V^3 \to V^{-1}$ является компактным как суперпозиция вполне непрерывного вложения и непрерывного оператора. Таким образом, оператор $J+\varepsilon A^2: V^3 \to V^{-1}$ можно представить как сумму вполне непрерывного оператора и непрерывно обратимого оператора (см. лемму 3). Тогда в силу [14] оператор $J+\varepsilon A^2: V^3 \to V^{-1}$ является фредгольмовым оператором индекса нуль.

Пусть $v \in V^3$, тогда $Av \in V^1$. Следовательно,

$$\langle (J+\varepsilon A^2)v, Av\rangle = -\int\limits_\Omega v\cdot\Delta v\,dx + \varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\Delta v\,dx = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v\,dx +$$
$$+\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\Delta v\,dx = \|v\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v\|^2_{V^3} \geqslant \varepsilon\|v\|^2_{V^3}.$$

Таким образом,

$$\langle (J+\varepsilon A^2)v, Av\rangle \geqslant \varepsilon\|v\|^2_{V^3}. \tag{19}$$

С другой стороны,

$$\langle (J+\varepsilon A^2)v, Av\rangle \leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v\|_{V^{-1}}\|Av\|_{V^1} = \|(J+\varepsilon A^2)v\|_{V^{-1}}\|v\|_{V^3}. \tag{20}$$

В итоге, из (19) и (20) мы заключаем, что выполнена левая часть оценки (17):

$$\varepsilon\|v\|_{V^3} \leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v\|_{V^{-1}}.$$

Из последней оценки следует, что ядро оператора $J+\varepsilon A^2: V^3 \to V^{-1}$ состоит только из нуля. Следовательно, в силу фредгольмовости индекса нуль этот оператор обратим. Кроме того, обратный оператор $(J+\varepsilon A^2)^{-1}: V^{-1} \to V^3$ непрерывен.

2) Пусть $v \in L_2(0,T;V^3)$. Из правой части оценки (17) для почти всех $t \in (0,T)$ имеет место неравенство

$$\|(J+\varepsilon A^2)v(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4(1+\varepsilon)\|v(t)\|_{V^3}.$$

Возведем обе части последнего неравенства в квадрат и проинтегрируем по t в пределах от 0 до T. Тогда

$$\int_0^T \|(J+\varepsilon A^2)v(t)\|^2_{V^{-1}}\,dt \leqslant C_4^2(1+\varepsilon)^2\int_0^T \|v(t)\|^2_{V^3}\,dt = C_4^2(1+\varepsilon)^2\|v(t)\|^2_{L_2(0,T;V^3)}.$$

Так как $v\in L_2(0,T;V^3)$, то правая часть последнего неравенства конечна. Следовательно, конечна и левая часть. Таким образом, $(J+\varepsilon A^2)v\in L_2(0,T;V^{-1})$ и имеет место правая часть неравенства (18). Кроме того, из линейности и ограниченности оператора $J+\varepsilon A^2 : L_2(0,T;V^3)\to L_2(0,T;V^{-1})$ следует его непрерывность.

Покажем теперь обратимость этого оператора. Докажем, что множество значений оператора $J+\varepsilon A^2 : L_2(0,T;V^3)\to L_2(0,T;V^{-1})$ совпадает со всем $L_2(0,T;V^{-1})$. Покажем, что для любого $w\in L_2(0,T;V^{-1})$ уравнение

$$(J+\varepsilon A^2)v = w$$

имеет решение $v\in L_2(0,T;V^3)$. Так как оператор $J+\varepsilon A^2 : V^3\to V^{-1}$ обратим, то при почти всех $t\in(0,T)$ уравнение

$$(J+\varepsilon A^2)v = w$$

имеет решение $v(t)=(J+\varepsilon A^2)^{-1}w(t)$. Осталось доказать, что определенная таким образом функция v принадлежит $L_2(0,T;V^3)$. В силу левой части оценки (17) при почти всех $t\in(0,T)$ мы имеем:

$$\varepsilon\|v(t)\|_{V^3}\leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v(t)\|_{V^{-1}} = \|w(t)\|_{V^{-1}}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем его по t в пределах от 0 до T. Тогда

$$\varepsilon\|v(t)\|_{L_2(0,T;V^3)}\leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \|w(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{21}$$

Так как $w\in L_2(0,T;V^{-1})$, то из последнего неравенства следует, что $v\in L_2(0,T;V^3)$. Следовательно, множество значений оператора $J+\varepsilon A^2 : L_2(0,T;V^3)\to L_2(0,T;V^{-1})$ совпадает со всем пространством $L_2(0,T;V^{-1})$. Кроме того, получена левая часть неравенства (18).

Из неравенства (21) непосредственно получаем, что $\operatorname{Ker}(J+\varepsilon A^2)=\{0\}$. Таким образом, оператор $J+\varepsilon A^2 : L_2(0,T;V^3)\to L_2(0,T;V^{-1})$ обратим. В силу теоремы Банаха об обратном операторе получим, что обратный оператор $(J+\varepsilon A^2)^{-1} : L_2(0,T;V^{-1})\to L_2(0,T;V^3)$ является непрерывным. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Оператор* $\widetilde{A} : W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3$ *обратим и обратный к нему оператор* $\widetilde{A}^{-1} : L_2(0,T;V^{-1})\times V^3\to W_2$ *является непрерывным оператором.*

Доказательство. Для доказательства этой леммы мы вновь воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе. Сначала покажем непрерывность линейного оператора

$$\widetilde{A} : W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3,\quad \widetilde{A}(v) = ((J+\varepsilon A^2)v'+\nu Av, v|_{t=0}).$$

Согласно оценкам (14) и (18) имеем:

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{A}(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})\times V^3} = \|(J+\varepsilon A^2)v'+\nu Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v|_{t=0}\|_{V^3}\leqslant\\
&\leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v|_{t=0}\|_{V^3}\leqslant C_4^2(1+\varepsilon)\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}+\\
&+C_1\|v\|_{C([0,T];V^3)} + \max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^3}\leqslant C_4^2(1+\varepsilon)\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + 2C_1\|v\|_{C([0,T];V^3)}\leqslant\\
&\leqslant C_8(3+\varepsilon)(\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T];V^3)}) = C_8(3+\varepsilon)\|v\|_{W_2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\widetilde{A}$ является непрерывным.

Покажем взаимно однозначность оператора $\widetilde{A}$. Для этого докажем, что для каждого $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^3$, существует единственный элемент $v \in W_2$ такой, что

$$\widetilde{A}(v) = (f, a).$$

Перепишем последнее уравнение в следующем виде

$$(J + \varepsilon A^2)v' + \nu A v = f, \quad v(0) = a. \tag{22}$$

Согласно второму пункту леммы 4 оператор $J + \varepsilon A^2 : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ обратим и обратный оператор $(J + \varepsilon A^2)^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^3)$ является непрерывным.

Применим оператор $(J + \varepsilon A^2)^{-1}$ к (22). Тогда получим, что задача (22) эквивалентна следующей задаче:

$$v' + \nu (J + \varepsilon A^2)^{-1} A v = (J + \varepsilon A^2)^{-1} f, \quad v(0) = a. \tag{23}$$

Проинтегрируем уравнение (23) по t в пределах 0 до t. Таким образом, задача нахождения решения $v \in W_2$ задачи (23) эквивалентна задаче нахождения решения $v \in C([0,T];V^3)$ следующего уравнения

$$v(t) = a - \int\limits_0^t (\nu (J + \varepsilon A^2)^{-1} A v(s) - (J + \varepsilon A^2)^{-1} f(s))\, ds. \tag{24}$$

Введем вспомогательное отображение

$$(Uv)(t) = a - \int\limits_0^t (\nu (J + \varepsilon A^2)^{-1} A v(s) - (J + \varepsilon A^2)^{-1} f(s))\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Поскольку интеграл Бохнера от интегрируемой функции есть непрерывная функция, мы получим $U : C([0,T];V^3) \to C([0,T];V^3)$. Покажем, что отображение U является сжимающим. Для любых $u, v \in C([0,T];V^3)$ получим

$$\|(Uv)(t) - (Uu)(t)\|_{V^3} = \Big\| \int\limits_0^t \nu (J + \varepsilon A^2)^{-1} A v(s)\, ds - \int\limits_0^t \nu (J + \varepsilon A^2)^{-1} A u(s)\, ds \Big\|_{V^3} \leqslant$$
$$\leqslant \nu \Big\| \int\limits_0^t (J + \varepsilon A^2)^{-1} A (v - u)(s)\, ds \Big\|_{V^3} \leqslant \nu \int\limits_0^t \|(J + \varepsilon A^2)^{-1} A (v - u)(s)\|_{V^3}\, ds. \tag{25}$$

Далее, любого $w \in V^{-1}$ из оценки (17) следует, что

$$\varepsilon \|(J + \varepsilon A^2)^{-1} w\|_{V^3} \leqslant \|w\|_{V^{-1}}.$$

Таким образом,

$$\|(J + \varepsilon A^2)^{-1} w\|_{V^3} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \|w\|_{V^{-1}}.$$

Применим полученное неравенство, а также неравенство (12) к (25). Тогда

$$\|(Uv)(t)-(Uu)(t)\|_{V^3} \leqslant \nu \int\limits_0^t \|(J+\varepsilon A^2)^{-1}A(v-u)(s)\|_{V^3}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu}{\varepsilon}\int\limits_0^t \|A(v-u)(s)\|_{V^{-1}}\,ds \leqslant \frac{\nu}{\varepsilon}\int\limits_0^t \|v(s)-u(s)\|_{V^1}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_9\nu}{\varepsilon}\int\limits_0^t \|v(s)-u(s)\|_{V^3}e^{-ks}e^{ks}\,ds \leqslant \frac{C_9\nu}{\varepsilon}\max_{s\in[0,t]}(e^{-ks}\|v(s)-u(s)\|_{V^3})\int\limits_0^t e^{ks}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_9\nu}{\varepsilon}\|v-u\|_{k,C([0,T];V^3)}\frac{e^{kt}-1}{k},$$

Здесь $k>0$ — некоторое вещественное число и через $\|v\|_{k,C([0,T];V^3)}$ обозначается норма $\|v\|_{k,C([0,T];V^3)} = \max\limits_{s\in[0,T]}(e^{-ks}\|v\|_{V^3})$. Отметим, что эта норма эквивалентна норме $\|v\|_{C([0,T];V^3)}$. Их эквивалентность следует из следующих неравенств

$$\|v\|_{k,C([0,T];V^3)} \leqslant \|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant e^{kT}\|v\|_{k,C([0,T];V^3)}.$$

Кроме того, здесь мы воспользовались непрерывностью вложения $V^3\subset V^1$.

Таким образом,

$$\|(Uv)(t)-(Uu)(t)\|_{V^3} \leqslant \frac{C_9\nu}{\varepsilon}\|v-u\|_{k,C([0,T];V^3)}\frac{e^{kt}-1}{k}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на e^{-kt}. Тогда

$$e^{-kt}\|(Uv)(t)-(Uu)(t)\|_{V^3} \leqslant \frac{C_9\nu}{\varepsilon}\|v-u\|_{k,C([0,T];V^3)}\frac{1-e^{-kt}}{k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_9\nu}{\varepsilon}\|v-u\|_{k,C([0,T];V^3)}\frac{1-e^{-kT}}{k}.$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от t. Перейдем к максимуму по $t\in[0,T]$ в левой части и выбирая постоянную k так, чтобы $\frac{C_9\nu}{\varepsilon k}<1$. Очевидно, что $1-e^{-kT}<1$ при $k>0$. Следовательно,

$$\|(Uv)(t)-(Uu)(t)\|_{k,C([0,T];V^3)} \leqslant \psi\|v-u\|_{k,C([0,T];V^3)},$$

где постоянная $\psi\in(0,1)$. Таким образом, из последнего неравенства следует, что отображение $U: C([0,T];V^3)\to C([0,T];V^3)$ является сжимающим. Тогда в силу принципа сжимающих отображений отображение U имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, функция $w\in C([0,T];V^3)$ удовлетворяет уравнению (24). Таким образом, для каждой пары $f\in L_2(0,T;V^{-1})$, $a\in V^3$, существует единственное решение $w\in W_2$ задачи (22), т. е. оператор $\widetilde{A}$ является взаимно однозначным.

Таким образом, в силу теоремы Банаха об обратном операторе, оператор $\widetilde{A}: W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3$ обратим и обратный оператор $\widetilde{A}^{-1}: L_2(0,T;V^{-1})\times V^3\to W_2$ непрерывен. Лемма доказана. □

Перейдем к получению априорных оценок. Наряду с операторным уравнением (11) рассмотрим семейство операторных уравнений с константой с $0\leqslant\xi\leqslant 1$:

$$\widetilde{A}(v)=\xi(Q(v)+(f,a)). \tag{26}$$

Лемма 6. *Пусть* $a \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. *Тогда для любого решения* $v \in W_2$ *семейства операторных уравнений* (26) *имеют место оценки:*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{10}(\|a\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|a\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{27}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{11}(\|a\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|a\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{28}$$

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_{11}(\|a\|^2_{V^0} + \varepsilon\|a\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{29}$$

где постоянные C_{10}, C_{11} *не зависят от* ε *и* ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение задачи (26) для некоторого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим равенство (9), которое имеет место для любого $\varphi \in V^1$. Положим $\varphi = v$. Тогда

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx - \xi\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_i(t)v(t)\frac{\partial v(t)}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla v(t)\,dx -$$
$$- \varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla v(t)\,dx = \xi\langle f(t), v(t)\rangle. \tag{30}$$

Отдельно преобразуем слагаемые в левой части последнего равенства следующим образом. Рассмотрим первое слагаемое:

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial(v(t)v(t))}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v(t)v(t)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению следующего слагаемого:

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_i(t)v(t)\frac{\partial v(t)}{\partial x_i}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_i(t)\frac{\partial(v(t)v(t))}{\partial x_i}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i}v^2(t)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \operatorname{div} v(t)\cdot v^2(t)\,dx = 0.$$

Наконец, преобразуем еще одно слагаемое:

$$-\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla v(t)\,dx = \varepsilon\int\limits_\Omega \Delta v'(t)\Delta v(t)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta v(t)\Delta v(t)\Big)\,dx =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \Delta v(t)\Delta v(t)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, равенство (30) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} + \nu\|v(t)\|^2_{V^1} = \xi\langle f(t), v(t)\rangle.$$

Оценим правую часть последнего равенства следующим образом:

$$\xi\langle f(t), v(t)\rangle \leqslant \xi|\langle f(t), v(t)\rangle| \leqslant \xi\|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1} \leqslant \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}.$$

Таким образом, при почти всех $t \in (0,T)$ мы получим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} + \nu\|v(t)\|^2_{V^1} \leqslant \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t в пределах от 0 до τ, где $\tau \in [0, T]$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} + \nu\int\limits_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\,dt.$$

Правую часть можно оценить следующим образом. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\,dt \leqslant \Big(\int\limits_0^\tau \|f(t)\|^2_{V^{-1}}\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^1}\,dt\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\nu}\Big(\int\limits_0^\tau \|f(t)\|^2_{V^{-1}}\,dt\Big) + \frac{\nu}{2}\Big(\int\limits_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^1}\,dt\Big).$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = 1/\nu$.

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\int\limits_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Из неотрицательности величин $\|v(t)\|^2_{V^0}$, $\|v(t)\|^2_{V^2}$ и $\|v(t)\|^2_{V^1}$ следуют неравенства:

$$\frac{1}{2\nu}\int\limits_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\nu}{2}\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\nu}{2}\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{V^0} \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\nu}{2}\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Так как правая часть в последних двух неравенствах не зависит от τ, то перейдем к максимуму по $\tau \in [0, T]$ в левых частях. Тогда

$$\frac{1}{2\nu}\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})},$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})},$$

$$\frac{1}{2}\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Из этих неравенств непосредственно следуют (27) – (29). Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть $a \in V^3$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$. Тогда для любого $v \in W_2$ решения семейства операторных уравнений* (26) *имеют место оценки*

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{13}\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|a\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + C_{13}\sqrt{\varepsilon}\|a\|_{V^2} + C_{13}\|a\|^2_{V^2}, \qquad (31)$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \|a\|_{V^3} + \frac{C_{13}T^{1/2}}{\varepsilon}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|a\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \\ + \frac{C_{13}T^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon}}\|a\|_{V^2} + \frac{C_{13}T^{1/2}}{\varepsilon}\|a\|^2_{V^2}, \quad (32)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant 4C_{14}(\|a\|^2_{V^0} + \varepsilon\|a\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \quad (33)$$

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant 4C_{15}(\|a\|^2_{V^0} + \varepsilon\|a\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \quad (34)$$

где постоянные C_{13}, C_{14}, C_{15} не зависят от ε, v и ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение семейства операторных уравнений (26). Тогда оно удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$Jv' + \varepsilon A^2 v' - \xi B(v) + \nu A v = \xi f. \quad (35)$$

Следовательно,

$$\|(J+\varepsilon A^2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \|\xi f + \xi B(v) - \nu A v\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Оценим правую часть последнего равенства. В силу оценки (13), мы получим:

$$\|\xi f + \xi B(v) - \nu A v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \xi\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \xi\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{16}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \nu\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}). \quad (36)$$

Отдельно оценим величину $\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Используя (15), а также непрерывность вложения $V^2 \subset L_4(\Omega)$, имеем:

$$\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \Big(\int_0^T \|B(v)\|^2_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant C_{17}\Big(\int_0^T \|v(t)\|^4_{V^2}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{17}T^{1/2}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{V^2}T^{1/2} \leqslant C_{17}T^{1/2}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}.$$

Таким образом, неравенство (36) перепишется в следующем виде

$$\|\xi f + \xi B(v) - \nu A v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{18}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|^2_{C([0,T];V^2)} + \nu\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}).$$

Из априорных оценок (27), (29) непосредственное следует, что

$$\|(J+\varepsilon A^2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{13}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|a\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + C_{13}\sqrt{\varepsilon}\|a\|_{V^2} + C_{13}\|a\|^2_{V^2}.$$

Воспользуемся левой частью оценки (18). Тогда

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant C_{13}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|a\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + C_{13}\sqrt{\varepsilon}\|a\|_{V^2} + C_{13}\|a\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, получили оценку (31).

Перейдем к доказательству оценки (32). Представим функцию $v \in W_2$ следующим образом:

$$v(t) = a - \int_0^t v'(s)\,ds.$$

Тогда

$$\|v(t)\|_{V^3} \leqslant \left\|a - \int_0^t v'(s)\,ds\right\|_{V^3} \leqslant \|a\|_{V^3} + \left\|\int_0^t v'(s)\,ds\right\|_{V^3} \leqslant \|a\|_{V^3} + \int_0^t \|v'(s)\|_{V^3}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_{V^3} + \int_0^T \|v'(s)\|_{V^3}\,ds \leqslant \|a\|_{V^3} + T^{\frac{1}{2}}\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}.$$

Так как правая часть полученного неравенства не зависит от t, то то перейдем к максимуму по $\tau \in [0,T]$ в левой части. Тогда с учетом оценки (31) получим

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{V^3} \leqslant \|a\|_{V^3} + \frac{C_{13}T^{1/2}}{\varepsilon}\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|a\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) +$$
$$+ \frac{C_{13}T^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon}}\|a\|_{V^2} + \frac{C_{13}T^{1/2}}{\varepsilon}\|a\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, установлена оценка (32).

Теперь мы докажем неравенство (33). Как и ранее $v \in W_2$ — решение операторного уравнения (35). Тогда

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \|\xi f + \xi B(v) - \nu Av - \varepsilon A^2 v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \xi\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \xi\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Отдельно рассмотрим слагаемые в правой части последнего неравенства. Сначала установим оценку на $\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$. Учитывая известное неравенство Ладыженской (см. [13, Лемма III.3.3, Лемма III.3.5])

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leqslant 2^{1/2}\|u\|^{1/4}_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|^{3/4}_{L_2(\Omega)}, \quad u \in V^1,$$

и оценку (15), мы получим:

$$\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \Big(\int_0^T \|B(v)\|^{\frac{4}{3}}_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant C_3\Big(\int_0^T \|v(t)\|^{\frac{8}{3}}_{L_4(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$
$$\leqslant 2C_3\Big(\int_0^T \|v\|^{\frac{2}{3}}_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant C_{19}\Big(\int_0^T \|v\|^{\frac{2}{3}}_{V^0}\|v\|^2_{V^1}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(0,T;V^0)}\Big(\int_0^T \|v\|^2_{V^1}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} = C_{19}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(0,T;V^0)}\|v\|^{\frac{3}{2}}_{L_2(0,T;V^1)}. \qquad (37)$$

Рассмотрим следующее слагаемое. Воспользуемся неравенством Гельдера и оценкой (12). Тогда

$$\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \left(\int_0^T \|Av\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \left(\int_0^T \|v\|_{V^1}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant T^{1/4}\left(\int_0^T \|v\|_{V^1}^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = T^{1/4}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{38}$$

Наконец, рассмотрим последнее слагаемое. Используя неравенство (16), получим:

$$\varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \varepsilon\left(\int_0^T \|A^2v'\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \varepsilon\left(\int_0^T \|v'\|_{V^3}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)}.$$

Оценим полученную величину. Очевидно, что из левой части оценки (17) следует неравенство

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varepsilon A^2)v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом, для получения оценки на $\varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$ необходимо получить оценку на $\|(J+\varepsilon\mathcal{A}^2)v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$. Из вида операторного уравнения (35) следует, что

$$\|(J+\varepsilon A^2)v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \|\xi f + \xi B(v) - \nu Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \xi\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\xi\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом, получаем оценки

$$\varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \tag{39}$$

Итак, применяя неравенство Гельдера и полученные оценки (37), (38), получим

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{20}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}).$$

Тогда, из априорных оценок (27) и (28) непосредственно следует неравенство (33).

Наконец, вновь применяя оценки (37), (38) для правой части (39), а также априорные оценки (27) и (28), получим

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant 4C_{15}(\|a\|_{V^0}^2 + \varepsilon\|a\|_{V^2}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1).$$

Таким образом, установлено неравенство (34). Лемма доказана. □

Теорема 5. *Пусть $a \in V^3$ и $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда существует по крайней мере одно решение $v \in W_2$ начально-краевой задачи (5) – (8).*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией степени Лере-Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. Рассмотрим операторное уравнение (26):

$$\widetilde{A}(v) - \xi Q(v) = \xi(f, a), \quad \text{где} \quad \xi \in [0, 1]. \tag{40}$$

Из оценок (31) и (32) следует, что

$$\|v\|_{W_2} \leqslant M,$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная. Тогда все решения уравнения (40) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = M + 1$. С учетом леммы 5, ни одно решение семейства уравнений

$$v = \xi \widetilde{A}^{-1}(Q(v) + (f, a)), \quad \text{где} \quad \xi \in [0, 1], \tag{41}$$

не принадлежит границе того же шара B_R.

В силу леммы 5 оператор $\widetilde{A}^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ является непрерывным. По лемме 2 оператор $B : W_2 \to L_2(0, T; V^{-1})$ является компактным оператором. Тогда оператор $(Q(v) + (f, a)) : W_2 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ также является компактным. Следовательно, оператор $\widetilde{A}^{-1}(Q(v) + (f, a)) : W_2 \to W_2$ является вполне непрерывным.

Таким образом, вполне непрерывное векторное поле $v - \xi \widetilde{A}^{-1}(Q(v) + (f, a))$ невырождено на границе шара B_R, а значит для этого векторного поля определена степень Лере-Шаудера $\deg_{LS}(I - \xi \widetilde{A}^{-1}(Q + f), B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg_{LS}(I - \xi \widetilde{A}(Q + f), B_R, 0) = \deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ уравнения (41), а следовательно, и вспомогательной задачи (5) – (8). Теорема доказана. □

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Поскольку пространство V^3 плотно в V^0, то для каждого $a_* \in V^0$ существует последовательность $a_m \in V^3$, сходящаяся к a_* в V^0. Если $a_* \equiv 0$, то положим $a_m \equiv 0$, $\varepsilon_m = 1/m$. Если же $\|a_*\|_{V^0} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|a_m\|_{V^2} \neq 0$. Тогда положим

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m\|a_m\|^2_{V^2}}.$$

В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. Причем $\varepsilon_m \|a_m\|^2_{V^2} \leqslant 1$.

В силу теоремы 5 при каждом ε_m и a_m существует решение $v_m \in W_2 \subset W_1$ вспомогательной задачи. Таким образом, каждое решение v_m для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle v'_m, \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} (v_m)_i v_m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla \varphi \, dx - \varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla \Delta v'_m : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle, \tag{42}$$

и начальному условию

$$v_m|_{t=0} = a_m.$$

Так как последовательность $\{a_m\}$ сходится в V^0, то она ограничена по норме V^0. Следовательно,

$$\|a_m\|^2_{V^0} + \varepsilon_m \|a_m\|^2_{V^2} \leqslant C_{22}.$$

Таким образом, из оценок (27), (28), (33) и (34) получаем, что

$$\|v_m\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{23}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \quad \|v_m\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant C_{24}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{43}$$

$$\|v'_m\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{25}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{44}$$

$$\varepsilon\|v'_m\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{26}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1). \tag{45}$$

В силу полученных оценок, без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности) получим, что

$$v_m \to v_* \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^1) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

$$v_m \to v_* \quad *\text{-слабо в} \quad L_\infty(0,T;V^0) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

$$v'_m \to v'_* \quad \text{слабо в} \quad L_{4/3}(0,T;V^{-1}) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда при $m \to \infty$ по определению слабой сходимости $v_m \to v^*$ в $L_2(0,T;V^1)$ получим

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \to \nu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla \varphi \, \mathrm{d}x$$

для любого $\varphi \in V^1$.

В силу слабой сходимости $v'_m \to v'_*$ в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$, получим, что

$$\langle v'_m, \varphi \rangle \to \langle v'_*, \varphi \rangle$$

для любого $\varphi \in V^1$.

Далее, используя оценку (45), как и выше, без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы имеем, что существует функция $u \in L_{4/3}(0,T;V^3)$ такая, что

$$\varepsilon_m v'_m \to u \quad \text{слабо в} \quad L_{4/3}(0,T;V^3) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда

$$\varepsilon_m \langle \nabla \Delta v'_m, \nabla \varphi \rangle \to \langle \nabla \Delta u, \nabla \varphi \rangle dx, \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Однако последовательность $\varepsilon_m v'_m$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3}. Действительно для любой гладкой скалярной функции ψ и $\varphi \in V^3$, мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varepsilon_m\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'_m:\nabla\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| = \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Delta v'_m\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla v'_m:\nabla\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla v'_m:\nabla\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T \nabla v'_m\psi(t)\,dt\right):\nabla\Delta\varphi\,dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T \nabla v_m\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\,dt\right):\nabla\Delta\varphi\,dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla v_m:\nabla\Delta\varphi\,dx\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\,dt\right|.$$

Так как v_m слабо сходится к v^* в $L_2(0,T;V^1)$ и, следовательно, сходится к v^* в смысле распределений, то

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla v_m:\nabla\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla v_*:\nabla\Delta\varphi\,dx\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\,dt\right|\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m\langle\nabla\Delta v'_m,\nabla\varphi\rangle\to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Так как вложение $V^1\subset L_4(\Omega)$ является вполне непрерывным, а вложение $L_4(\Omega)\subset V^{-1}$ — непрерывно, то по теореме Обена-Симона (см. [11, Теорема C.4.1]) следует, что вложение

$$F=\{v\in L_2(0,T;V^1), v'\in L_{4/3}(0,T;V^{-1})\}\subset L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

Тогда, учитывая оценки (43) и (44) заключаем, что

$$v_m\to v^* \quad \text{сильно в} \quad L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

Таким образом,

$$\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^3(v_m)_i v_m\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\to\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^3(v_*)_i v_*\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

так как первая последовательность слабо сходится в $L_2(0{,}T;V^1)$, а вторая – сильно в $L_2(0{,}T;L_4(\Omega))$.

Таким образом, переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (42), мы получим, что функция v_* удовлетворяет равенству

$$\langle v_*', \varphi \rangle - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} (v_*)_i v_* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеют место априорные оценки (43) и (44), то для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v_*\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v_*\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{27}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Отсюда следует, что $v_* \in W_1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zvyagin, V. G. Of a some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids / В. Г. Звягин // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 75-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л. Д. Кудрявцева. — Москва, 1998. — С. 197.

2. Zvyagin, V. The Leray-Schauder theory and solvability of some new models of hydrodynamics / V. Zvyagin // Abstracts of Second Symposium on Non-linear Analysis. Torun (Poland), 1999. — P. 71.

3. Zvyagin, V. G. On weak solutions for some model of motion of nonlinear viscous-elastic fluid / V. G. Zvyagin, V. T. Dmitrienko // Topological Methods in Nonlinear Analysis. — 1999. — V. 14, iss. 2. — P. 295–325.

4. Звягин, В. Г. О слабых решениях обобщенной модели Олдройта для ламинарных и турбулентных течений нелинейно-вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Препринт 4 НИИМ ВГУ. — Воронеж, 1999. — 41 с.

5. Дмитриенко, В. Т. О разрешимости краевой задачи для одной математической модели стационарных течений нелинейно-вязкой жидкости / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Математические заметки. — 2001. — Т. 69, № 6. — С. 843–853.

6. Звягин, В. Г. О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Доклады Академии наук. — 2001. — Т. 380, № 3. — С. 308–311.

7. Zvyagin, V. Solvability of Boundary and Imitialboundary Value Problem for a Certain Model of Laminar and Turbulent Flows of a Fluid / V. Zvyagin // 16th IMACS World Congress 2000. Book of Abstracts. Lausanne-Switzerland, 2000. — P. 286.

8. Звягин, В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 112 с.

9. Звягин, В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики / В. Г. Звягин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 46. — С. 92–119.

10. Zvyagin, V. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics / V. Zvyagin, D. Vorotnikov. — De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications, 12. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2008. — 248 p.

11. Звягин, В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — М. : КРАСАНД, 2012. — 416 с.

12. Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — 352 с.

13. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.

14. Звягин, В. Г. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко, Н. М. Ратинер. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2007. — 81 с.

REFERENCES

1. Zvyagin V.G. Of a some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids. [Zvyagin V.G. Of a some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids]. Functional spaces. Differential operators. Problems of mathematical education. Abstracts of the international conference devoted to the 75th anniversary of Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor L.D. Kudryavtsev, Moscow, 1998, p. 197.

2. Zvyagin V. The Leray-Schauder theory and solvability of some new models of hydrodynamics. Abstracts of Second Symposium on Non-linear Analysis. Torun (Poland), 1999, p. 71.

3. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. On weak solutions for some model of motion of nonlinear viscous-elastic fluid. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1999, vol. 14, iss. 2, pp. 295–325.

4. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. On weak solutions of the generalized Oldroute model for laminar and turbulent flows of a nonlinear viscoelastic fluid. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. O slabyx resheniyax obobshhennoj modeli Oldrojta dlya laminarnyx i turbulentnyx techenij nelinejno-vyazkouprugoj zhidkosti]. Preprint 4 Research institute of mathematics VSU, Voronezh, 1999, 41 p.

5. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. On the solvability of the boundary value problem for a mathematical model of stationary flows of a nonlinear viscous fluid. [Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. O razreshimosti kraevoj zadachi dlya odnoj matematicheskoj modeli stacionarnyx techenij nelinejno-vyazkoj zhidkosti]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2001, vol. 69, no. 6, pp. 843–853.

6. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. On weak solutions of the initial-boundary value problem for the equations of motion of a viscoelastic fluid. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. O slabyx resheniyax nachal'no-kraevoj zadachi dlya uravneniya dvizheniya vyazkouprugoj zhidkosti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2001, vol. 380, no. 3, pp. 308–311.

7. Zvyagin V. Solvability of Boundary and Imitialboundary Value Problem for a Certain Model of Laminar and Turbulent Flows of a Fluid. 16th IMACS World Congress 2000. Book of Abstracts. Lausanne-Switzerland, 2000, p. 286.

8. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Topological approximation method for hydrodynamics investigation. The Navier-Stokes system. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Approksimacionno-topologicheskij podxod k issledovaniyu zadach gidrodinamiki. Sistema Nav'e-Stoksa]. Moscow: URSS, 2004, 112 p.

9. Zvyagin V.G. Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics. [Zvyagin V.G. Approksimacionno-topologicheskij podxod k issledovaniyu matematicheskix zadach gidrodinamiki]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 46, pp. 92–119.

10. Zvyagin V., Vorotnikov D. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics. De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications, 12. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2008, 248 p.

11. Zvyagin V.G., Turbin M.V. Mathematical problems of hydrodynamics of viscoelastic fluids. [Zvyagin V.G., Turbin M.V. Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugix sred]. Moscow, 2012, 416 p.

12. Fursikov A.V. Optimal Control of Distributed Systems. Theorey and Applications. [Fursikov A.V. Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya].

Novosibirsk, 1999, 352 p.

13. Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. [Temam R. Uravneniya Nav'e-Stoksa. Teoriya i chislennyj analiz]. Moscow: Mir, 1981, 408 p.

14. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T., Ratiner N.M. Linear Fredholm operators and their properties. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T., Ratiner N.M. Linejnye fredgol'movy operatory i ix svojstva]. Voronezh, 2007, 81 p.

Звягин Виктор Григорьевич, заведующий кафедрой, математический факультет, кафедра алгебры и топологических методов анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvg@math.vsu.ru

Zvyagin Victor G., head of chair, Department of Mathematics, Chair of Algebra and Topological Analysis Methods, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvg@math.vsu.ru

Звягин Андрей Викторович, заведующий лабораторией, НИИ математики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Zvyagin Andrey V., head of laboratory, Institute of Mathematics of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Турбин Михаил Вячеславович, доцент кафедры, математический факультет, кафедра алгебры и топологических методов анализа, Воронеж, Россия
E-mail: mrmike@mail.ru

Turbin Mikhail V., associate professor, Department of Mathematics, Chair of Algebra and Topological Analysis Methods, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mrmike@mail.ru