УДК 517.972

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Г. Задорожний, А. Н. Ивакин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.11.2016 г.

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение первого порядка, коэффициенты которого являются гауссовыми процессами, заданными характеристическим функционалом. Задача состоит в нахождении условий существования первых двух почти периодических моментных функций решения. Сначала стротся вспомогательное дифференциальное уравнение без случайных коэффициентов, но с обычными и вариационными производными. Начальная задача для такого уравнения допускает точное решение. Находятся условия, при которых математическое ожидание решения исходной задачи является почти периодической функцией. Для нахождения дисперсионной функции также получается вспомогательное уравнение с обычными и вариационными производными, которое имеет единственное симметричное решение, представимое в явном виде. Выписаны условия, при которых дисперсионная функция решения является почти периодической.

Ключевые слова: почти периодические в среднем решения, случайный процесс, моментные функции, вариационная производная, характеристический функционал.

ALMOST PERIODIC IN THE BROAD SENSE OF LINEAR NONHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS

V. G. Zadorozniy, A. N. Ivakin

Abstract. We consider a linear differential equation of the first order, the coefficients are Gaussian processes given with characteristic functional. The challenge is to find the conditions for the existence of almost periodic first two moment functions of solutions. Strode first auxiliary differential equation without random coefficients, but with ordinary and variational derivatives. Initial value problem for this equation admits an exact solution. Are the conditions under which the mathematical expectation of the solution of the original problem is almost periodic function. To find dispersion functions were also obtained auxiliary equation with ordinary and variational derivatives, which has only one symmetric solution that is representable in explicit form. Prescribed the conditions under which the dispersion function of solution is almost periodic.

Keywords: almost periodic in mean solutions, random processes, moment functions, variational derivative, characteristic functional.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = \varepsilon(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $\varepsilon(t,w)$, $f(t,w)$ — скалярные случайные процессы. Зависимость от случайного события w в дальнейшем в обозначении не указывается, x_0 — заданная случайная величина.

Характеристическим функционалом процесса $\varepsilon(t)$ называется выражение [1, стр. 192]

$$M\left(\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\varepsilon(s)u(s)ds\right)\right),$$

где M — математическое ожидание по функции распределения процесса $\varepsilon(s)$, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $u \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$, $\mathbf{L}_1(\mathbb{R})$ — пространство суммируемых на $\mathbb{R}$ функций.

Будем считать, что случайные процессы ε и f заданы характеристическим функционалом.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbf{X}$ — банахово пространство с нормой $||x||$ и $\mathbf{L} \subset \mathbf{X}$ — подпространство.

Определение. Если для функционала $y\colon \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ приращение $y(x(\cdot)+h(\cdot))-y(x(\cdot))$ можно записать в виде

$$y(x(\cdot)+h(\cdot)) - y(x(\cdot)) = A(x(\cdot))h(\cdot) + w(x(\cdot),h(\cdot)) \quad \forall h \in \mathbf{L},$$

где $A(x(\cdot))$ — линейный по h, ограниченный на $\mathbf{L}$ функционал и $\frac{|w(x(\cdot),h(\cdot))|}{||h||} \to 0$ при $\| h(\cdot) \| \to 0$, то $A(x(\cdot))h(\cdot)$ называется дифференциалом функционала y в точке x в направлении подпространства $\mathbf{L}$ и обозначается $dy(x(\cdot),h)$ или $y'(x)h$. Линейный функционал $A(x(\cdot))$ называется производной в направлении подпространства $\mathbf{L}$ и обозначается $y'(x)$.

Пусть $\mathbf{X}$ — банахово пространство функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\mathbf{L}$ — подпространство в $\mathbf{X}$ плотное в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$.

Определение. Если дифференциал $y'(x)h$ функционала $y\colon \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ в направлении пространства $\mathbf{L}$ записывается в виде

$$y'(x(\cdot))h(\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x(\cdot),s)h(s)ds \quad \forall h \in \mathbf{L},$$

где $\varphi\colon \mathbf{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и интеграл понимается в смысле Лебега, то $\varphi(x(\cdot),s)$ называется вариационной производной функционала y в точке $x(\cdot)$ в направлении $\mathbf{L}$ и обозначается $\frac{\delta y(x)}{\delta x(s)}$.

Хорошо известны условия существования почти периодических решений (сокращенно пп решений) детерминированных уравнений (1) (см., например [2, 3]). Если $\varepsilon(t)$ и $f(t)$ являются случайными процессами, то задача становится сложнее. Периодические в среднем решения уравнения рассмотрены в [4, 5, 6]. Уравнение теплопроводности, коэффициенты которого являются случайными процессами, рассмотрено в [7].

Определение [ср. 6, стр. 70]. Решение уравнения (1) называется почти периодическим в среднем, если математическое ожидание решения является почти периодической на $\mathbb{R}$ функцией.

Определение. Решение уравнения (1) называется почти периодическим в широком смысле, если математическое ожидание и дисперсионная функция этого решения являются почти периодическими на $\mathbb{R}$ функциями.

В данной статье находятся условия существования почти периодических в широком смысле решений уравнения (1).

2. ПЕРЕХОД К ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ

Перейдем от задачи Коши (1), (2) к детерминированной задаче. Будем предполагать, что известен характеристический функционал процессов ε и f

$$\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = M(\exp(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))ds)),$$

где u, $v \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$, а математическое ожидание вычисляется по функции распределения процессов ε, f. Введем отображение

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = M\left(x(t)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s)\big)ds\right)\right),$$

где математическое ожидание вычисляется по функциям распределения процессов ε, f и случайной величины x_0. Заметим, что $y(t,0,0) = M(x(t))$.

Умножим (1) и (2) на $\exp(i\int_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))ds))$ и возьмем математические ожидания полученных выражений. Приходим к равенствам

$$M\left(\dot{x}\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s)\big)ds\right)\right) =$$
$$M\left(\varepsilon(t)x(t)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s)\big)ds\right)\right) +$$
$$M\left(f(t)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s)\big)ds\right)\right),$$
$$M\left(x(t_0)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s)\big)ds\right)\right) =$$
$$M\left(x_0\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s)\big)ds\right)\right).$$

Первое уравнение (формально) можно записать с помощью $y(t,u(\cdot),v(\cdot))$ в виде

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -i\frac{\delta_p y}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p\varphi}{\delta v(t)}, \tag{3}$$

где $\frac{\delta_p}{\delta u(t)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной u. Будем предполагать, что x_0 не зависит от ε и f, тогда второе равенство записывается в виде

$$y(t_0,u(\cdot),v(\cdot)) = M(x_0)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)). \tag{4}$$

По определению [1, стр. 195] математическим ожиданием решения задачи (1), (2) называется $y(t,0,0)$, где $y(t,u,v)$ — решение задачи (3), (4).

Мы перешли от задачи (1), (2) со случайными коэффициентами к детерминированной задаче (3), (4) с обычной и вариационной производными.

3. ОПЕРАТОР $U(t,s)$

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi(\tau) = \chi(t,s,\tau) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \leqslant \tau \leqslant s, \\ -1, \text{ если } s \leqslant \tau \leqslant t, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим множество непрерывных ограниченных на $\mathbf{L}_1(\mathbb{R})$ отображений $\varphi\colon \mathbf{L}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ с нормой $\| \varphi \|_1 = \sup\limits_{u\in\mathbf{L}_1(\mathbb{R})} | \varphi(u) |$. Пусть I – оператор тождественного преобразования. Введем в рассмотрение оператор $U(t,s)$ по правилу

$$U(t,s)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = \varphi(u(\cdot) + i\chi(t,s,\cdot),v(\cdot)).$$

В дальнейшем для простоты записи вместо $\chi(t,s,\cdot)$ будем писать просто $\chi(t,s)$.

Лемма 1. *Оператор $U(t,s)$ обладает следующими свойствами:*

$$U(t,t) = I;$$
$$U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s);$$
$$U^{-1}(t,s) = U(s,t);$$
$$U(t,s)U(\tau,\sigma) = U(\tau,\sigma)U(t,s).$$

Доказательство. Пользуясь определением оператора $U(t,s)$, находим

1) $U(t,t)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = \varphi(u(\cdot) + \chi(t,t),v(\cdot)) = \varphi(u(\cdot),v(\cdot))$.

2) $U(t,\tau)U(\tau,s)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = U(t,\tau)\varphi(u(\cdot) + i\chi(t,s),v(\cdot)) = \varphi(u(\cdot) + i\chi(\tau,s) + i\chi(t,\tau),v(\cdot)) = \varphi(u(\cdot) + i\chi(t,s),v(\cdot)) = U(t,s)\varphi(u(\cdot),v(\cdot))$.

3) $U(s,t)U(t,s) = U(s,s) = I$; $\quad U(t,s)U(s,t) = U(t,t) = I$.

4) $U(t,s)U(\tau,\sigma)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = \varphi(u(\cdot)+i\chi(t,s)+i\chi(\tau,\sigma),v(\cdot)) = \varphi(u(\cdot)+i\chi(\tau,\sigma)+i\chi(t,s),v(\cdot)) = U(\tau,s)U(t,s)\varphi(u(\cdot),v(\cdot))$.

Лемма доказана.

4. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть процессы ε и f заданы гауссовым характеристическим функционалом [см. 8, стр. 323]

$$\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = \exp\Bigg(i\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(M(\varepsilon(s))u(s) + M(f(s))v(s)\Big)ds - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2) + 2b_{12}(s_1,s_2)u(s_1)v(s_2) + \\ + b_{22}(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)\Big)ds_1ds_2\Bigg), \quad (5)$$

где $M(\varepsilon(s))$, $M(f(s))$ — математические ожидания процессов ε и f, b_{11}, b_{12}, b_{22} — заданные вторые моментные функции процессов ε и f.

Теорема 1 [1, стр. 187]. *Если $u,v \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$, $\varepsilon(t)$, $f(t)$ – случайные процессы, заданные характеристическим функционалом* (5), *тогда*

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = M(x_0)U(t,t_0)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) - i\int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds \quad (6)$$

является решением задачи (3), (4).

Пусть $\mathbf{G} = \{u \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}) : \ ||u||_1 \leqslant k\}$, где k заданное число.

Теорема 2. *Если ε, f случайные процессы, заданные гауссовым характеристическим функционалом* (5), *где $M(f(t))$, $M(\varepsilon(t)) = a_0 + a_1(t)$ – почти периодические функции,*

$b_{11}(s_1,s_2)$, $b_{12}(s_1,s_2)$, $b_{22}(s_1,s_2)$, $\int_0^t\int_0^s b_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$ почти периодические функции по каждой переменной равномерно относительно другой, и существует относительно плотное множество общих почти периодов данных функций по обеим переменным, $a_0 \neq 0$, и $\int_0^t a_1(\tau)d\tau$ – ограниченная функция, $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$, тогда уравнение (3) имеет почти периодическое решение по переменной t равномерно относительно u, v, которое записывается в виде

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = i\int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds,$$

если $a_0 > 0$ и

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = -i\int\limits_{-\infty}^{t} U(t,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds,$$

если $a_0 < 0$.

Доказательство. Используя свойства оператора U, из (6) при $t_0 = 0$ получаем

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = U(t,0)\left(M(x_0)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) - i\int\limits_0^t U(0,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds\right). \tag{7}$$

1) Пусть $a_0 > 0$. Предположим, что $U(0,t)y(t,u,v) \to 0$ при $t \to +\infty$. Умножим (7) слева на $U(0,t)$ и устремим t к $+\infty$, получим

$$M(x_0)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = i\int\limits_0^{+\infty} U(0,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds.$$

Подставим найденное выражение в (7) и воспользуемся свойствами оператора U, получим

$$y(t,u,v) = i\int\limits_0^{+\infty} U(t,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds - i\int\limits_0^{t} U(t,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds =$$
$$= i\int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)}ds.$$

Покажем, что это решение является почти периодическим по t равномерно относительно $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$. Пусть δ любое число и ω общий δ-почти период функций $a_1(\tau)$ и $b_{ij}(\tau_1,\tau_2)$ и их интегралов. Из (5) находим

$$\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)} = \varphi(u(\cdot),v(\cdot))\left(iM(f(s)) - \int\limits_{\mathbb{R}} b_{12}(s_1,s)u(s_1)ds_1 - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}} b_{22}(s_1,s)v(s_1)ds_1\right).$$

Подставляя это выражение и $M(\varepsilon(t)) = a_0 + a_1(t)$ в выражение для $y(t,u,v)$, получим

$$y(t,u,v) = \int\limits_t^{+\infty} \exp(a_0(t-s))F(t,s,u,v)ds,$$

где

$$F(t,s,u,v) = \exp\Bigg(i\int\limits_{\mathbb{R}}\Big((a_0 + a_1(\tau))u(\tau) + M(f(\tau))v(\tau)\Big)d\tau -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2) + 2b_{12}(s_1,s_2)u(s_1)v(s_2) +$$

$$+b_{22}(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)\Big)ds_1ds_2 + \int\limits_s^t a_1(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_{11}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2 - i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_s^t b_{11}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 -$$

$$-i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_s^t b_{12}(\tau_1,\tau_2)v(\tau_2)d\tau_1d\tau_2\Bigg)\Bigg(iM(f(s)) - \int\limits_{\mathbb{R}} b_{22}(s,\tau_2)v(\tau_2)d\tau_2 -$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} b_{12}(s,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_2 + i\int\limits_s^t b_{12}(\tau_1,s)d\tau_1\Bigg).$$

Покажем, что функция $\int_{\mathbb{R}}\int_0^t b_{ij}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_1d\tau_2$ пп по переменной t равномерно относительно $u \in \mathbf{G}$.

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^{t+\omega} b_{ij}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 - \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t b_{ij}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_1d\tau_2\Big| \leqslant$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|\int\limits_0^{t+\omega} b_{ij}(\tau_1,\tau_2) - \int\limits_0^t b_{ij}(\tau_1,\tau_2)\Big||u(\tau_2)|d\tau_2 < \delta\int\limits_{\mathbb{R}}|u(\tau_2)|d\tau_2 = \delta||u||_1 \leqslant k\delta$$

при всех $u \in \mathbf{G}$. Тогда $\int_{\mathbb{R}}\int_0^t b_{ij}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_1d\tau_2$ пп по переменной t равномерно относительно $u \in \mathbf{G}$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_s^t\int\limits_s^t = \int\limits_s^0\int\limits_s^0 + \int\limits_s^0\int\limits_0^t + \int\limits_0^t\int\limits_s^0 + \int\limits_0^t\int\limits_0^t.$$

По условию теоремы $\int_0^t\int_0^s b_{ij}(s_1,s_2)ds_1ds_2$ пп по t равномерно относительно s и пп по s равномерно относительно t. Поскольку существует относительно плотное множество общих почти периодов данной функции по обеим переменным, то $\int_0^t\int_0^t b_{ij}(s_1,s_2)ds_1ds_2$ пп функция, тогда $\int_s^t\int_s^t b_{ij}(s_1,s_2)ds_1ds_2$ пп функция по t равномерно относительно s и пп функция по s равномерно относительно t. Сумма, произведение и экспонента от пп функций являются пп функциями, тогда $F(t,s,u,v)$ пп функция по t равномерно относительно $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$ и пп по s равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$.

Пусть ω является δ_1-почти периодом функции $F(t,s,u,v)$ по переменной t и по переменной

s равномерно относительно $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$, тогда

$$|y(t+\omega,u,v) - y(t,u,v)| = \Big| \int\limits_{t+\omega}^{+\infty} \exp(a_0(t+\omega-s_1))F(t+\omega,s_1,u,v)ds_1 -$$

$$\int\limits_{t}^{+\infty} \exp(a_0(t-s))F(t,s,u,v)ds \Big| \leqslant \int\limits_{t}^{+\infty} \exp(a_0(t-s))|F(t+\omega,s+\omega,u,v)-$$

$$F(t,s,u,v)|ds < 2\delta_1 \int\limits_{t}^{+\infty} \exp(a_0(t-s))ds = \frac{2\delta_1}{a_0}.$$

Здесь в первом интеграле сделана замена $s = s_1 - \omega$. Тогда каждый δ_1-почти период функции $F(t,s,u,v)$ является $\frac{2\delta_1}{a_0}$-почти периодом функции $y(t,u,v)$. Отсюда следует, что функция $y(t,u,v)$ является пп по t равномерно относительно $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$. Аналогично рассматривается случай $a_0 < 0$. Теорема доказана.

5. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВТОРОЙ МОМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ

Введем вспомогательное отображение

$$z(t,s,u(\cdot),v(\cdot)) = M\left(x(s)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\varepsilon(\tau)u(\tau) + f(\tau)v(\tau)\Big)d\tau\right)\right).$$

Умножим (1) на $x(s)\exp\left(i\int_{\mathbb{R}}\Big(\varepsilon(\tau)u(\tau)+f(\tau)v(\tau)\Big)d\tau\right)$ и возьмем математическое ожидание полученного уравнения. Также как и в п. 2, при условии, что x_0 не зависит от случайных процессов ε, f, получим детерминированную задачу

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -i\frac{\delta_p z}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p y}{\delta v(t)}, \tag{8}$$

$$z(t_0,t_0,u(\cdot),v(\cdot)) = M(x_0^2)\psi(u(\cdot),v(\cdot)). \tag{9}$$

Заметим, что

$$z(t,s,0,0) = M(x(t)x(s)).$$

Поэтому естественным является

Определение [см. 1, стр. 195]. Второй моментной функцией $M(x(t)x(s))$ решения задачи (1), (2) называется $z(t,s,0,0)$, где $z(t,s,u,v)$ — симметричное по переменным t,s решение задачи (8), (9).

Теорема 3 [1, стр. 220]. *Если $u,v \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$, $\varepsilon(s)$, $f(s)$ – случайные процессы, заданные* *характеристическим функционалом* (5), *тогда*

$$z(t,s,u(\cdot),v(\cdot)) = M(x_0^2)U(t,t_0)U(s,t_0)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) - iM(x_0)\int\limits_{t_0}^{t} U(t,t_0)U(s,\tau)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)}d\tau - iM(x_0)\int\limits_{t_0}^{s} U(s,t_0)U(t,\tau)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)}d\tau - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} U(t,\tau)U(s,\sigma)\frac{\delta_p^2\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)\delta v(\sigma)}d\tau d\sigma \quad (10)$$

является решением задачи (8), (9).

6. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ (8)

Теорема 4. *Если* ε, f *случайные процессы, заданные гауссовым характеристическим функционалом* (5), *где* $M(f(t))$, $M(\varepsilon(t)) = a_0 + a_1(t)$ *– почти периодические функции,* $b_{11}(s_1,s_2)$, $b_{12}(s_1,s_2)$, $b_{22}(s_1,s_2)$, $\int_0^t\int_0^s b_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$ *почти периодические функции по каждой переменной равномерно относительно другой, и существует относительно плотное множество общих почти периодов данных функций по обеим переменным,* $a_0 \neq 0$, *и* $\int_0^t a_1(\tau)d\tau$ *– ограниченная функция,* $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$, *тогда уравнение* (9) *имеет решение, которое является пп функцией по переменной* t *равномерно относительно* $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$ *и пп функцией по переменной* s *равномерно относительно* $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbf{G}$, $v \in \mathbf{G}$, *оно записывается в виде*

$$z(t,s,u(\cdot),v(\cdot)) = -\int\limits_{t}^{+\infty} d\sigma \int\limits_{s}^{+\infty} U(t,\sigma)U(s,\tau)\frac{\delta_p^2\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)\delta v(\sigma)}d\tau, \quad (11)$$

если $a_0 > 0$ *и*

$$z(t,s,u(\cdot),v(\cdot)) = -\int\limits_{-\infty}^{t} d\sigma \int\limits_{-\infty}^{s} U(t,\sigma)U(s,\tau)\frac{\delta_p^2\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)\delta v(\sigma)}d\tau,$$

если $a_0 < 0$.

Доказательство. Пусть $a_0 > 0$, $t_0 = 0$. Предположим, что $U(0,s)U(0,t)z(t,s,u,v) \to 0$ при $t \to +\infty$. Умножим (10) слева на $U(0,s)U(0,t)$, воспользуемся свойствами оператора U и устремим t к $+\infty$, получим

$$M(x_0^2)\varphi(u(\cdot),v(\cdot)) = iM(x_0)\int\limits_{0}^{+\infty} U(0,\tau)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)}d\tau + iM(x_0)\int\limits_{0}^{s} U(0,\tau)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)}d\tau + \int\limits_{0}^{+\infty} d\sigma \int\limits_{0}^{s} U(0,\sigma)U(0,\tau)\frac{\delta_p^2\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)\delta v(\sigma)}d\tau.$$

Подставив это равенство в (10), получим

$$z(t,s,u(\cdot),v(\cdot)) = iM(x_0)\int\limits_t^{+\infty} U(t,0)U(s,\tau)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)}d\tau +$$

$$+\int\limits_t^{+\infty} d\sigma \int\limits_0^s U(t,\sigma)U(s,\tau)\frac{\delta_p^2\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)\delta v(\sigma)}d\tau.$$

Умножим последнее равенство слева на $U(0,s)U(0,t)$, устремим s к $+\infty$ и предположим, что $U(0,s)U(0,t)z(t,s,u,v) \to 0$ при $s \to +\infty$, получим

$$iM(x_0)\int\limits_t^{+\infty} U(0,\tau)\frac{\delta_p\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)}d\tau =$$

$$-\int\limits_t^{+\infty} d\sigma \int\limits_0^{+\infty} U(0,\sigma)U(0,\tau)\frac{\delta_p^2\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(\tau)\delta v(\sigma)}d\tau.$$

Используя это равенство, приходим к выражению (11).

Покажем, что найденное решение является почти периодическим. Пусть δ любое число и ω общий δ-почти период функций a_1 и b_{ij} и их интегралов. Из (5) находим

$$\frac{\delta_p^2\varphi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(s)\delta v(t)} = \varphi(u(\cdot),v(\cdot))\Bigg(\Big(iM(f(s)) - \int\limits_{\mathbb{R}} b_{12}(s_1,s)u(s_1)ds_1 -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} b_{22}(s_1,s)v(s_1)ds_1\Big)\Big(iM(f(t)) - \int\limits_{\mathbb{R}} b_{12}(s_1,t)u(s_1)ds_1 -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} b_{22}(s_1,t)v(s_1)ds_1\Big) - b_{22}(t,s)\Bigg).$$

Подставляя это выражение и $M(\varepsilon(t)) = a_0 + a_1(t)$, получим

$$z(t,s,u,v) = -\int\limits_t^{+\infty} d\sigma \int\limits_s^{+\infty} \exp(a_0(t+s-\sigma-\tau))F_1(t,s,\tau,\sigma,u,v)d\tau,$$

где

$$F_1(t,s,\tau,\sigma,u,v) = \exp\Bigg(i\int\limits_{\mathbb{R}}\Big((a_0 + a_1(\tau))u(\tau) + M(f(\tau))v(\tau)\Big)d\tau -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2) + 2b_{12}(s_1,s_2)u(s_1)v(s_2) +$$

$$b_{22}(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)\Big)ds_1ds_2 + \int\limits_\tau^s a_1(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_\sigma^t a_1(\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\tau^s\int\limits_\tau^s b_{11}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2 - i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_\tau^s b_{11}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 -$$

$$-i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\tau}^{s} b_{12}(\tau_1,\tau_2)v(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\sigma}^{t} b_{11}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-$$

$$i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\sigma}^{t} b_{11}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-i\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\sigma}^{t} b_{12}(\tau_1,\tau_2)v(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\tau}^{s} b_{11}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\Bigg)\Bigg(\Big(iM(f(\sigma))-\int\limits_{\mathbb{R}} b_{12}(s_1,\sigma)u(s_1)ds_1-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} b_{22}(s_1,\sigma)v(s_1)ds_1\Big)\Big(iM(f(\tau))-\int\limits_{\mathbb{R}} b_{12}(s_1,\tau)u(s_1)ds_1-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} b_{22}(s_1,\tau)v(s_1)ds_1\Big)-b_{22}(\tau,\sigma)\Bigg).$$

Функция F_1 имеет вид аналогичный функции F из теоремы 2. Аналогично получается и почти периодичность этой функции по переменной t равномерно относительно $s,\sigma,\tau\in\mathbb{R},u\in\mathbf{G}$, $v\in\mathbf{G}$. Пусть ω является равномерным относительно остальных переменных δ_1-почти периодом функции F_1 по переменной t, тогда

$$|z(t+\omega,s,u,v)-z(t,s,u,v)|=$$

$$\Big|\int\limits_{t+\omega}^{+\infty} d\sigma_1\int\limits_{s}^{+\infty}\exp(a_0(t+\omega+s-\sigma_1-\tau))F_1(t+\omega,s,\tau,\sigma_1,u,v)d\tau-$$

$$\int\limits_{t}^{+\infty} d\sigma\int\limits_{s}^{+\infty}\exp(a_0(t+s-\sigma-\tau))F_1(t,s,\tau,\sigma,u,v)d\tau\Big|\leqslant$$

$$\int\limits_{t}^{+\infty} d\sigma\int\limits_{s}^{+\infty}\exp(a_0(t+s-\sigma-\tau))|F_1(t+\omega,s,\tau,\sigma+\omega,u,v)-$$

$$F_1(t,s,\tau,\sigma,u,v)|d\tau<2\delta_1\int\limits_{t}^{+\infty} d\sigma\int\limits_{s}^{+\infty}\exp(a_0(t+s-\sigma-\tau))d\tau=\frac{2\delta_1}{a_0^2}.$$

Здесь в первом интеграле сделана замена $\sigma=\sigma_1-\omega$. Таким образом, каждый δ_1-почти период функции F_1 является $\frac{2\delta_1}{a_0^2}$-почти периодом функции $z(t,s,u,v)$ по t и она является пп по переменной t. Поскольку $z(t,s,u,v)=z(s,t,u,v)$, то эта функция пп и по переменной s. Равномерная почти периодичность следует из того, что почти период ω не зависит от переменных t, s, $u\in\mathbf{G}$, $v\in\mathbf{G}$. Аналогично рассматривается случай $a_0<0$. Теорема доказана.

7. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим дисперсионную функцию $D(x(t))=M(x^2(t))-(M(x(t)))^2$ решения $x(t)$ задачи (1), (2).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, тогда уравнение* (1) *имеет почти периодическое в широком смысле решение* $x(t)$, *для которого справедливы формулы*

$$M(x(t))=-\int\limits_{t}^{+\infty}\Big(M(f(s))+\int\limits_{s}^{t} b_{12}(s_1,s)ds_1\Big)\exp\Big(\int\limits_{s}^{t}(a_0+$$

$$a_1(s_1))ds_1 + \frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)ds, \quad (12)$$

$$M(x(t)x(s)) = \int\limits_t^{+\infty} d\sigma \int\limits_s^{+\infty} \exp\Big(\int\limits_\sigma^t (a_0 + a_1(s_1))ds_1 + \int\limits_\tau^s (a_0+$$

$$a_1(s_1))ds_1 + \frac{1}{2}\int\limits_\sigma^t\int\limits_\sigma^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2 + \frac{1}{2}\int\limits_\tau^s\int\limits_\tau^s b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$\int\limits_\sigma^t\int\limits_\tau^s b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)\Big[\Big(M(f(\sigma)) + \int\limits_\sigma^t b_{12}(s_1,\sigma)ds_1+$$

$$\int\limits_\tau^s b_{12}(s_1,\sigma)ds_1\Big)\Big(M(f(\tau)) + \int\limits_\sigma^t b_{12}(s_1,\tau)ds_1 + \int\limits_\tau^s b_{12}(s_1,\tau)ds_1\Big)+$$

$$b_{22}(\tau,\sigma)\Big]d\tau,$$

$$D(x(t)) = \int\limits_t^{+\infty} d\sigma \int\limits_t^{+\infty} \exp\Big(\int\limits_\sigma^t (a_0 + a_1(s_1))ds_1 + \int\limits_\tau^t (a_0 + a_1(s_1))ds_1+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_\sigma^t\int\limits_\sigma^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2 + \frac{1}{2}\int\limits_\tau^t\int\limits_\tau^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$\int\limits_\sigma^t\int\limits_\tau^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)\Big[\Big(M(f(\sigma)) + \int\limits_\sigma^t b_{12}(s_1,\sigma)ds_1 + \int\limits_\tau^t b_{12}(s_1,\sigma)ds_1\Big)\cdot$$

$$\Big(M(f(\tau)) + \int\limits_\sigma^t b_{12}(s_1,\tau)ds_1 + \int\limits_\tau^t b_{12}(s_1,\tau)ds_1\Big) + b_{22}(\tau,\sigma)\Big]d\tau-$$

$$\Bigg(\int\limits_t^{+\infty}\Big(M(f(t)) + \int\limits_\tau^t b_{12}(s_1,t)ds_1\Big)\exp\Big(\int\limits_\tau^t (a_0 + a_1(s_1))ds_1+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_\tau^t\int\limits_\tau^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)d\tau\Bigg)^2, \quad (13)$$

если $a_0 > 0$ *и*

$$M(x(t)) = \int\limits_{-\infty}^t \Big(M(f(s)) + \int\limits_s^t b_{12}(s_1,s)ds_1\Big)\exp\Big(\int\limits_s^t (a_0 + a_1(s_1))ds_1+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)ds, \quad (14)$$

$$M(x(t)x(s))=\int\limits_{-\infty}^{t}d\sigma\int\limits_{-\infty}^{s}\exp\Big(\int\limits_{\sigma}^{t}(a_0+a_1(s_1))ds_1+\int\limits_{\tau}^{s}(a_0+$$
$$a_1(s_1))ds_1+\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\sigma}^{t}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{s}\int\limits_{\tau}^{s}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$
$$\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\tau}^{s}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)\Big[\Big(M(f(\sigma))+\int\limits_{\sigma}^{t}b_{12}(s_1,\sigma)ds_1+$$
$$\int\limits_{\tau}^{s}b_{12}(s_1,\sigma)ds_1\Big)\Big(M(f(\tau))+\int\limits_{\sigma}^{t}b_{12}(s_1,\tau)ds_1+\int\limits_{\tau}^{s}b_{12}(s_1,\tau)ds_1\Big)+$$
$$b_{22}(\tau,\sigma)\Big]d\tau,$$

$$D(x(t))=\int\limits_{-\infty}^{t}d\sigma\int\limits_{-\infty}^{t}\exp\Big(\int\limits_{\sigma}^{t}(a_0+a_1(s_1))ds_1+\int\limits_{\tau}^{t}(a_0+a_1(s_1))ds_1+$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\sigma}^{t}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$
$$\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\tau}^{t}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)\Big[\Big(M(f(\sigma))+\int\limits_{\sigma}^{t}b_{12}(s_1,\sigma)ds_1+\int\limits_{\tau}^{t}b_{12}(s_1,\sigma)ds_1\Big)\cdot$$
$$\Big(M(f(\tau))+\int\limits_{\sigma}^{t}b_{12}(s_1,\tau)ds_1+\int\limits_{\tau}^{t}b_{12}(s_1,\tau)ds_1\Big)+b_{22}(\tau,\sigma)\Big]d\tau$$
$$\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\Big(M(f(t))+\int\limits_{\tau}^{t}b_{12}(s_1,t)ds_1\Big)\exp\Big(\int\limits_{\tau}^{t}(a_0+a_1(s_1))ds_1+$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\Big)d\tau\Bigg)^2,\quad(15)$$

если $a_0<0$.

Доказательство. Согласно теореме 2, y является пп функцией по переменной t равномерно относительно $u\in\mathbf{G}$, $v\in\mathbf{G}$. По теореме 4, z является пп функцией по переменной t равномерно относительно s, $u\in\mathbf{G}$, $v\in\mathbf{G}$ и является пп функцией по переменной s равномерно относительно t, $u\in\mathbf{G}$, $v\in\mathbf{G}$, тогда и функции $M(x(t))=y(t,0,0)$, $D(x(t))=z(t,t,0,0)-y^2(t,0,0)$ являются почти периодическими. В таком случае решение $x(t)$ является почти периодическим в широком смысле. Формулы для $M(x(t)),M(x(t)x(s))$ и $D(x(t))$ получаются подстановкой $u=0,v=0$ в выражения для y и z. Теорема доказана.

Замечание. Если в условиях теорем 2 и 4, все указанные функции являются ω-периодическими, то $M(x(t))$ и $D(x(t))$, определяемые формулами (12)–(15) (1) являются ω-периодическими функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задорожний, В. Г. Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. — М.–Ижевск, 2006. — 316 с.

2. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — С.-Пб., 2008. — 480 с.

3. Перов, А. И. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка / А. И. Перов, И. Д. Коструб. — Воронеж : Научная книга, 2013. — 227 с.

4. Задорожний, В. Г. О периодических в среднем решениях линейного дифференциального уравнения первого порядка с равномерно распределенным случайным коэффициентом / В. Г. Задорожний // Вестник факультета ПММ. — 2009. — № 7. — С. 41–47.

5. Задорожний, В. Г. Периодические в среднем решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний, Г. А. Курина // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 6. — С. 726–741.

6. Хасьминский, Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 370 с.

7. Боровикова, М. М. Нахождение моментных функций решения двумерного уравнения диффузии со случайными коэффициентами / М. М. Боровикова, В. Г. Задорожний // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2010. — Т. 74, № 6. — С. 3–29.

8. Гельфанд, И. М. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства / И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. — М. : Физматлит, 1961. — 472 с.

REFERENCES

1. Zadorozhniy V.G. Methods of variational analysis. [Zadorozhniy V.G. Metody variatsionnogo analiza]. Moscow-Izhevsk, 2006, 316 p.

2. Demidovich B.P. Lectures on mathematical stability theory. [Demidovich B.P. Lecstii po matevaticheskoy teorii ustoychivosti]. S.-Pb., 2008, 480 p.

3. Perov A.I., Kostrub I.D. Bounded solutions of nonlinear vector-matrix differential equations of n-th order. [Perov A.I., Kostrub I.D. Ogranichennye resheniya nelineynyh vektorno-matrichnyh differentsialnyh uravneniy n-go poryadka]. Voronezh, 2013, 227 p.

4. Zadorozhniy V.G. On the periodic in average of the solutions of linear differential the first order equation with uniformly distributed random coefficients. [Zadorozhniy V.G. O periodicheskix v srednem resheniyax linejnogo differencial'nogo uravneniya pervogo poryadka s ravnomerno raspredelennym sluchajnym koe'fficientom]. *Vestnik fakul'teta PMM — Journal of faculty of AMM*, 2009, no. 7, pp. 41–47.

5. Zadorozhniy V.G., Kurina G.A. On average, periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations of first order with random coefficients. [Zadorozhniy V.G., Kurina G.A. Periodicheskie v srednem resheniya lineynogo neodnorodnogo differentsialnogo uravneniya pervogo poryadka so sluchaynymi koefficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 726–741.

6. Khas'minskii R.Z. Stability of systems of differential equations with random perturbations of their parameters. [Khas'minskii R.Z. Ustoychivost sistem differentsialnyh uravneniy pri sluchaynuh vozmuscheniyah ih parametrov]. Moscow: Nauka, 1969, 370 p.

7. Borovikova M.M., Zadorozhniy V.G. Finding the moment functions of solutions of two-dimensional the diffusion equation with random coefficients. [Borovikova M.M., Zadorozhniy V.G. Nahozhdenie momentnyh funktsiy resheniya dvumernogo uravneniya diffusii so sluchaynymi koeffitsientami]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2010, vol. 74, no. 6, pp. 3–29.

8. Gelfand I.M., Vilenkin N.I. Some applications of harmonic analysis. Features Hilbert space. [Gelfand I.M., Vilenkin N.I. Nekotorye primeneniya garmonicheskogo analiza. Osnaschennye gilbertovy prostranstva]. Moscow: Fizmatlit, 1961, 472 p.

Задорожний В. Г., доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zador@amm.vsu.ru
Тел.: +7908–143–26–16

Zadorizniy V. G., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Nonlinear oscillations, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zador@amm.vsu.ru
Tel.: +7908–143–26–16

Ивакин А. Н., ассистент кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: pwian@mail.ru
Тел.: +7908–143–65–43

Ivakin A. N., assistant of the department Nonlinear oscillations, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: pwian@mail.ru
Tel.: +7908–143–65–43