

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК ШИРИНЫ ПОЛОСЫ ЧАСТОТ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ*

А. П. Трифонов, М. М. Турбин

*Воронежский государственный университет,
Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

Поступила в редакцию 27.06.2017 г.

Аннотация. Рассматривается задача оценки ширины полосы частот регулярной спектральной плотности гауссовского стационарного стохастического сигнала с априори неизвестной величиной спектральной плотности. Предлагается два варианта преодоления априорной неопределенности: квазиправдоподобный алгоритм и совместная оценка максимального правдоподобия всех неизвестных параметров. Для рассматриваемых алгоритмов были предложены структурные схемы формирования оценки и найдены ее характеристики. Определены потери в точности оценок, возникающие вследствие априорного незнания интенсивности спектральной плотности полезного сигнала.

Ключевые слова: оценка параметра случайного сигнала, оценка полосы частот, квазиправдоподобный алгоритм, максимально правдоподобный алгоритм, характеристики оценки.

CHARACTERISTICS OF ESTIMATION OF SPECTRAL WIDTH OF RANDOM SIGNAL WITH UNKNOWN VALUE OF SPECTRAL DENSITY

A. P. Trifonov, M. M. Turbin

Abstract. The problem of estimating the bandwidth of the regular spectral density of the the gaussian stationary stochastic signal with a priori unknown value of the spectral density is considered. Two variants for overcoming a priori uncertainty are proposed: quasi-likelihood algorithm and joint estimation of all unknown parameters. For the algorithms under consideration, structural schemes for estimating were proposed and characteristics of estimation were found. Losses in accuracy of estimation due to priori unknown of value of spectral density were defined.

Keywords: estimation of parameter of random signal, estimation of spectral width, quasi-likelihood algorithm, maximum likelihood algorithm, estimation characteristics.

ВВЕДЕНИЕ

Задача приема стохастических сигналов, наблюдаемых на фоне шума, актуальна для многих практических приложений теории связи, локации, навигации и не раз обсуждалась в научной литературе [1], [2], [3], [4], [5], [6] и др. В частности, существенный интерес вызывает задача оценки ширины спектра мощности случайного сигнала, наблюдаемого на фоне шума. Так, в [1] исследованы алгоритмы оценки ширины спектральной плотности флуктуирующего сигнала и найдены характеристики оценки. Однако довольно часто в практических приложениях неизвестной оказывается мощность принимаемого сигнала. Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы оценки ширины спектра мощности случайного сигнала,

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-19-00079)

© Трифонов А. П., Турбин М. М., 2017

величина спектра мощности которого неизвестна. В [2] рассматривалась квазиоптимальная оценка ширины спектра мощности случайного процесса, имеющего прямоугольную (разрывную) форму спектральной плотности. В данной работе решается задача синтеза и анализа ряда алгоритмов оценки ширины регулярной (дифференцируемой) спектральной плотности сигнала с неизвестной величиной спектра мощности.

1. КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ

Пусть наблюдается аддитивная смесь стохастического сигнала и помехи

$$x(t) = \xi(t) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $\xi(t)$ — гауссовский стохастический стационарный сигнал с нулевым математическим ожиданием, а $n(t)$ — гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 . Процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность (СП) вида

$$G(\omega_0, \gamma_0, \Omega_0) = \frac{\gamma_0}{2} f\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right),$$

где γ_0 и Ω_0 — соответственно неизвестные величина и ширина СП сигнала, а функция $f(x)$ описывает форму СП и удовлетворяет условиям:

$$f(x) \geq 0, \quad f(x) = f(-x), \quad \max_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1.$$

Полагаем, что ширина спектра Ω_0 принимает значения из априорного интервала $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ и представляет собой эквивалентную полосу частот стохастического сигнала

$$\Omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega, \gamma_0, \Omega_0) d\omega \bigg/ \left[\max_{\omega} G(\omega, \gamma_0, \Omega_0) \right]^2. \quad (2)$$

Располагая наблюдаемой реализацией $x(t)$, необходимо сформировать оценку ширины СП Ω_0 случайного процесса $\xi(t)$.

Согласно алгоритму максимального правдоподобия [1], [3], оценка ширины спектральной плотности Ω_m совпадает с положением наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП). Однако, когда неизвестны и величина, и ширина СП, логарифм ФОП зависит от двух неизвестных параметров [1], [3]

$$L(\gamma, \Omega) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x(t_2) \hat{Q}(t_2 - t_1, \gamma, \Omega) dt_1 dt_2 - \frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\gamma}{N_0} f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \right] d\omega, \quad (3)$$

где функция $\hat{Q}(t, \gamma, \Omega)$ есть обратное преобразование Фурье от функции

$$Q(\omega, \gamma, \Omega) = \frac{\gamma f(\omega/\Omega)/N_0}{\gamma f(\omega/\Omega)/N_0 + 1}. \quad (4)$$

Следовательно, согласно (3), имеется априорная параметрическая неопределённость относительно величины СП γ . Для преодоления этой неопределённости можно предложить два подхода. Первый — использовать вместо неизвестной величины СП γ некоторое ожидаемое (прогнозируемое) значение γ^* . Полученный таким образом алгоритм будет являться квазиправдоподобным (КП) [7]. Другой подход — максимизировать логарифм ФОП по обоим

неизвестным параметрам γ и Ω , т. е. находить совместные оценки максимального правдоподобия (МП)[1] неизвестных параметров γ и Ω , а затем использовать только оценку ширины СП.

Рассмотрим квазиправдоподобный алгоритм оценки. Квазиправдоподобный приёмник формирует логарифм ФОП (3) для некоторой ожидаемой величины СП γ^* и всех возможных значений ширины СП $\Omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$

$$L^*(\Omega) = L(\gamma^*, \Omega) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1)x(t_2)\hat{Q}^*(t_2 - t_1, \Omega)dt_1dt_2 - \\ - \frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\gamma^*}{N_0} f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \right] d\omega, \quad (5)$$

где функция $\hat{Q}^*(t, \Omega)$ есть обратное преобразование Фурье от функции $Q^*(\omega, \Omega) = Q(\omega, \gamma^*, \Omega)$ (4). В качестве КП оценки приёмник принимает положение наибольшего максимума решающей статистики (5)

$$\Omega^* = \arg \sup L^*(\Omega). \quad (6)$$

Структура КП приёмника совпадает со структурой максимально правдоподобного приёмника при известной величине спектральной плотности с тем отличием, что величина СП γ^* , на которую настроен КП приёмник, не равна истинному значению величины СП γ_0 принимаемого сигнала.

Преобразуем логарифм ФОП (3) к виду [3]

$$L(\gamma, \Omega) = L_x(\gamma, \Omega) - L_c(\gamma, \Omega),$$

где

$$L_x(\gamma, \Omega) = \frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t, \gamma, \Omega)dt, \quad L_c(\gamma, \Omega) = \frac{T\Omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\gamma}{N_0} f(x) \right] dx.$$

Функция $y(t, \gamma, \Omega)$ представляет собой сигнал на выходе линейного фильтра, на вход которого подаётся реализация наблюдаемых данных $x(t)$. Передаточная функция этого фильтра $H(\omega, \gamma, \Omega)$ удовлетворяет условию

$$|H(\omega, \gamma, \Omega)|^2 = Q(\omega, \gamma, \Omega). \quad (7)$$

Сформировать логарифм ФОП на всём интервале возможных значений ширины спектра $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ как непрерывную функцию Ω не удаётся. В связи с чем приходится использовать многоканальную схему приёмного устройства, т. е. формировать логарифм ФОП только в конечном числе n_1 точек из априорного интервала $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$. Однако такой алгоритм будет лишь приближенно реализовывать КП алгоритм (или максимально правдоподобный при $\gamma^* = \gamma_0$). Приёмник строится по многоканальной схеме, в которой каждый канал настроен на своё значение неизвестной ширины СП

$$\Omega_j = \Omega_{\min} + j\Delta\Omega, \quad \Delta\Omega = (\Omega_{\max} - \Omega_{\min})/(n_1 - 1), \quad j = \overline{0, n_1 - 1},$$

где n_1 — количество каналов.

Блок-схема одного канала приведена на рис.1.

Далее сигнал с выхода каждого канала поступает на решающее устройство, которое определяет, в каком из n_1 каналов выходной сигнал наибольший и в качестве оценки использует

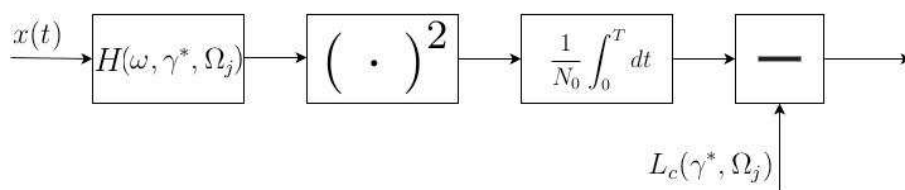


Рис. 1. Блок-схема одного канала КП приёмника

значение ширины СП Ω_j , соответствующее этому каналу. Будем полагать, что шаг дискретизации ширины СП $\Delta\Omega$ мал, а число каналов n_1 настолько велико, что погрешностью оценки (6) вследствие дискретизации логарифма ФОП (5) можно пренебречь.

Выполним анализ КП алгоритма оценки ширины спектральной плотности. Удобно при этом перейти к нормированным переменным

$$q = \frac{\gamma}{N_0}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\Omega_{\max}}.$$

Здесь q — отношение величин СП сигнала и белого шума, η — ширина СП, нормированная на её максимальное значение из априорного интервала, $\eta \in [\eta_s, 1]$, $\eta_s = \Omega_{\min}/\Omega_{\max}$. Выполняя усреднение, находим сигнальную функцию [1]

$$S^*(\eta) = \langle L^*(\eta) \rangle = \frac{\mu_{\min}}{\eta_s} \eta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{q^* f(x)}{q^* f(x) + 1} \left[1 + q_0 f\left(\frac{\eta x}{\eta_0}\right) \right] - \ln(1 + q^* f(x)) \right\} dx \quad (8)$$

и корреляционную функцию [1]

$$B^*(\eta_1, \eta_2) = \langle N^*(\eta_1) N^*(\eta_2) \rangle = \frac{\mu_{\min}}{\eta_s} \eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^* f(x)}{(q^* f(x) + 1)} \frac{q^* f(\eta_1 x / \eta_2)}{(q^* f(\eta_1 x / \eta_2) + 1)} \left[1 + q_0 f\left(\frac{\eta_1 x}{\eta_0}\right) \right]^2 dx \quad (9)$$

шумовой функции $N^*(\eta) = L^*(\eta) - \langle L^*(\eta) \rangle$. Здесь $q^* = \gamma^*/N_0$, $q_0 = \gamma_0/N_0$, $\eta_0 = \Omega_0/\Omega_{\max}$,

$$\mu_{\min} = \frac{T\Omega_{\min}}{4\pi}.$$

В [3] показано, что при выполнении условия $\mu_{\min} \gg 1$, решающая статистика (5) является асимптотически гауссовским случайным процессом. Поэтому знания её математического ожидания (сигнальной функции) и корреляционной функции достаточно для её асимптотически полного вероятностного описания.

При этом положение максимума сигнальной функции $S^*(\eta)$ (8) в общем случае не совпадает с истинным значением неизвестной ширины спектра η_0 , т. е.

$$\tilde{\eta} = \arg \sup S^*(\eta) \neq \eta_0. \quad (10)$$

Таким образом, КП оценка в общем случае является несостоятельной.

Положим, что отношение сигнал/шум

$$z^2 = \frac{(S^*(\tilde{\eta}))^2}{B^*(\tilde{\eta}, \tilde{\eta})}$$

достаточно велико (что верно при $\mu_{\min} \gg 1$), и применим рассмотренный в [1], [3] метод малого параметра, заключающийся в поиске решения уравнения

$$\left[\frac{dL^*(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta^*} = \left[\frac{dS^*(\eta)}{d\eta} + \frac{dN^*(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta^*} = 0 \quad (11)$$

в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = 1/z$. Аналогично [1], разлагая уравнение (11) в ряд по Ω в окрестности точки $\tilde{\Omega}$ и группируя члены с одинаковой степенью ε , получим, ограничившись первым приближением, что оценка ширины спекта

$$\eta^* = \tilde{\eta} + \eta_1,$$

где

$$\eta_1 = - \left(\frac{dN^*(\eta)}{d\eta} \right)_{\tilde{\eta}} / \left(\frac{d^2 S^*(\eta)}{d\eta^2} \right)_{\tilde{\eta}}.$$

В результате для условных смещения и дисперсии КП оценки получим

$$b(\eta^*|\eta_0, \gamma_0) = \langle \eta^* - \eta_0 \rangle = \tilde{\eta} - \eta_0, \quad (12)$$

$$D(\eta^*|\eta_0, \gamma_0) = \langle (\eta^* - \langle \eta^* \rangle)^2 \rangle = \left(\frac{\partial^2 B^*(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right)_{\tilde{\eta}} / \left(\frac{d^2 S^*(\eta)}{d\eta^2} \right)_{\tilde{\eta}}^2. \quad (13)$$

Кроме (12) будем использовать относительное смещение

$$\delta\eta = \frac{\tilde{\eta} - \eta_0}{\eta_0} = \delta\Omega = \frac{\tilde{\Omega} - \Omega_0}{\Omega_0}, \quad (14)$$

где $\tilde{\Omega} = \tilde{\eta}\Omega_{\max}$.

Если значение $\tilde{\eta}$ лежит вблизи η_0 , т. е. $|\delta\eta| \ll 1$, то можно получить приближенную упрощенную формулу для отклонения положения максимума сигнальной функции от точки истинного значения ширины СП [1]. Для этого разложим $S^*(\eta)$ в ряд в окрестности η_0 и ограничимся тремя первыми членами разложения.

$$S^*(\eta) = S^*(\eta_0) + S_1(\eta_0)(\eta - \eta_0) + \frac{1}{2}S_2(\eta_0)(\eta - \eta_0)^2, \quad (15)$$

где

$$S_1(\eta) = \frac{dS^*(\eta)}{d\eta} = \frac{\mu_{\min} q^*}{\eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{df(x)}{dx} \frac{q^* f(x) - q_0 f(\eta x / \eta_0)}{(q^* f(x) + 1)^2} dx, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S_2(\eta) = \frac{d^2 S^*(\eta)}{d\eta^2} = \frac{\mu_{\min} q^*}{\eta \eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2x \frac{df(x)}{dx} \right) \frac{q_0 f(\eta x / \eta_0) - q^* f(x)}{(q^* f(x) + 1)^2} dx - \\ - \frac{\mu_{\min} q^{*2}}{\eta \eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{df(x)}{dx} \right)^2 \frac{2q_0 f(\eta x / \eta_0) - q^* f(x) + 1}{(q^* f(x) + 1)^3} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее дифференцируем (15) по η и подставим значение $\eta = \tilde{\eta}$. При этом учтём, что первая производная сигнальной функции (8) в точке $\tilde{\eta}$ обращается в ноль, так как эта точка, согласно (10), — положение максимума сигнальной функции. Получим

$$S_1(\eta_0) + S_2(\eta_0)(\tilde{\eta} - \eta_0) = 0.$$

Выражая из последнего равенства $\tilde{\eta}$ и подставляя его в (14) получим приближенную формулу для относительного смещения

$$\delta\eta_a = -\frac{S_1(\eta_0)}{\eta_0 S_2(\eta_0)} = \delta\Omega_a. \quad (18)$$

Выражение для дисперсии оценки (13) удобно записать в виде

$$D(\eta^*|\eta_0, \gamma_0) = \frac{B_2(\tilde{\eta})}{S_2^2(\tilde{\eta})}, \quad (19)$$

где $S_2(\eta)$ находится по формуле (17), а $B_2(\eta)$ определяется как

$$B_2(\eta) = \frac{\partial^2 B(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \Big|_{\eta_1 = \eta_2 = \eta} = \frac{\mu_{\min} q^{*2}}{\eta \eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{df(x)}{dx} \right)^2 \frac{(1 + q_0 f(\eta x / \eta_0))^2}{(1 + q^* f(x))^4} dx.$$

В частном случае, когда $\gamma^* = \gamma_0$, т. е. в случае оценки МП ширины СП при известной величине спектра γ_0 , положение максимума сигнальной функции совпадает с истинным значением ширины СП

$$\tilde{\eta} = \arg \sup S^*(\eta) = \eta_0.$$

Тогда, согласно (12), в первом приближении оценка является несмещённой. При этом вторая производная сигнальной функции совпадает с точностью до знака со второй производной корреляционной функции в точке η_0 . Поэтому выражение для дисперсии оценки МП, в соответствии с (19), примет вид [1]

$$D(\eta_m|\eta_0) = m^{-2}, \quad (20)$$

где

$$m^2 = \frac{\mu_{\min} q_0^2}{\eta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{df(x)}{dx} \right)^2 (1 + q_0 f(x))^{-2} dx. \quad (21)$$

Для расчета смещения и дисперсии КП оценки Ω^* (6) необходимо полученные выражения $b(\eta^*|\eta_0)$ (12) и $D(\eta^*|\eta_0)$ (19) для КП оценки нормированной ширины СП η^* умножить соответственно на $\Omega_{\max}$ и $\Omega_{\max}^2$.

$$b(\Omega^*|\Omega_0, \gamma_0) = b(\eta^*|\eta_0, \gamma_0)\Omega_{\max}, \quad D(\Omega^*|\Omega_0, \gamma_0) = D(\eta^*|\eta_0, \gamma_0)\Omega_{\max}^2. \quad (22)$$

В качестве примера рассмотрим оценку полосы частот сигнала, форма СП которого имеет вид

$$f(x) = \left(1 + \left[\frac{\pi}{2} x \right]^2 \right)^{-1}. \quad (23)$$

Характеризовать отличие ожидаемой величины СП γ^* от её истинного значения будем величиной относительной расстройки приёмника

$$\delta\gamma = \frac{\gamma^* - \gamma_0}{\gamma_0}.$$

Подставляя (23) в (19) для дисперсии нормированной КП оценки ширины СП получаем выражение

$$D(\eta^*|\eta_0, \gamma_0) = \frac{\pi\eta_s\eta_0(\delta\eta + 1)}{8\mu_{\min}q_0^2(\delta\gamma + 1)^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^4 \frac{\alpha^2(x, q_0, 0, \delta\eta)}{\alpha^4(x, q_0, \delta\gamma, 0)} dx \right] \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(8x^4 - 3x^2)^2}{(1+x^2)^4} \frac{\alpha(x, q_0, 0, \delta\eta) - \alpha(x, q_0, \delta\gamma, 0)}{q_0(\delta\gamma + 1)\alpha^2(x, q_0, \delta\gamma, 0)} dx + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^4 \frac{2\alpha(x, q_0, 0, \delta\eta) - \alpha(x, q_0, \delta\gamma, 0)}{\alpha^3(x, q_0, \delta\gamma, 0)} dx \right]^{-2}, \quad (24)$$

где

$$\alpha(x, q_0, \delta\gamma, \delta\eta) = 1 + \frac{q_0(\delta\gamma + 1)}{1+x^2(\delta\eta + 1)^2}. \quad (25)$$

Рассмотрим ухудшение качества КП оценки в зависимости от величины расстройки $\delta\gamma$.

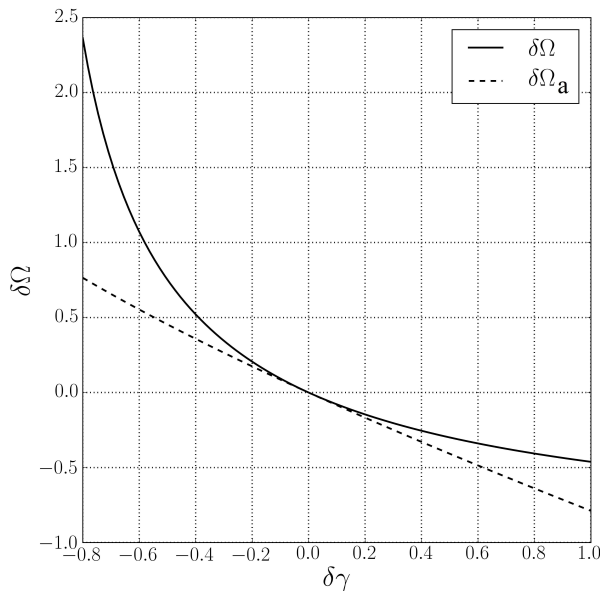


Рис. 2.

будем величинами относительного смещения $\delta\Omega$ (14) и нормированного рассеяния

$$\nu_q(\delta\gamma, q_0, \mu_{\min}) = \frac{V(\Omega^*|\Omega_0, \gamma_0)}{V(\Omega_m|\Omega_0)} = \frac{\eta_0^2\delta\Omega^2 + D(\eta^*|\eta_0, \gamma_0)}{D(\eta_m|\eta_0)}, \quad (26)$$

представляющего собой отношение рассеяния КП оценки $V(\Omega^*|\Omega_0, \gamma_0)$ к рассеянию оценки МП при априори известной величине СП полезного сигнала $V(\Omega_m|\Omega_0)$. В формуле (26) $D(\eta^*|\eta_0, \gamma_0)$ вычисляется по формуле (24), а $D(\eta_m|\eta_0)$, в соответствие с (20), (21) и (23) имеет вид

$$D(\eta_m|\eta_0) = \frac{\pi\eta_s\eta_0}{8\mu_{\min}q_0^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4(q_0+1+x^2)^2} dx \right]^{-1} = \\ = \frac{\eta_s\eta_0}{4\mu_{\min}q_0^2} (1 + \sqrt{1+q_0})^3. \quad (27)$$

На рис. 2 приведены зависимости относительного смещения $\delta\Omega = (\Omega^* - \Omega_0)/\Omega_0$, рассчитанного по формуле (14) (сплошная линия) и рассчитанного по приближенной формуле (18) (пунктирная линия), от величины $\delta\gamma$ при $q_0 = 1$.

Из рис. 2 видим, что при $|\delta\gamma| < 0.2$, т. е. если величина γ^* отклоняется от величины СП γ_0 сигнала на входе приёмника не более чем на 20%, то точная и приближенная формулы дают примерно одинаковый результат. При увеличении расстройки результаты начинают отличаться и применять приближенную формулу (18) нельзя.

Рассмотрим ухудшение точности КП оценки по сравнению с точностью оценки МП при известной величине СП γ_0 для разных значений q_0 .

Характеризовать ухудшение КП оценки

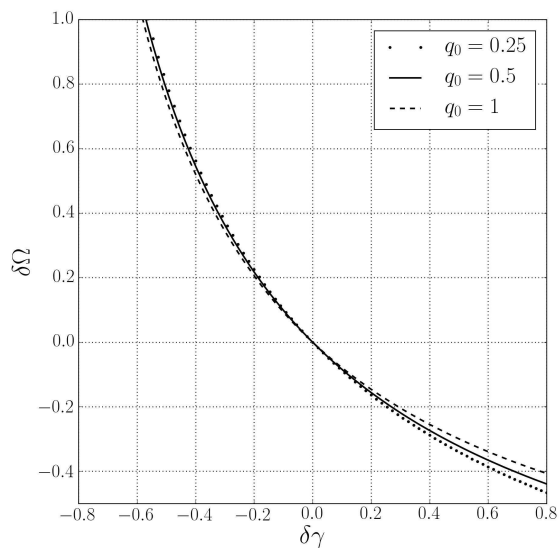


Рис. 3.

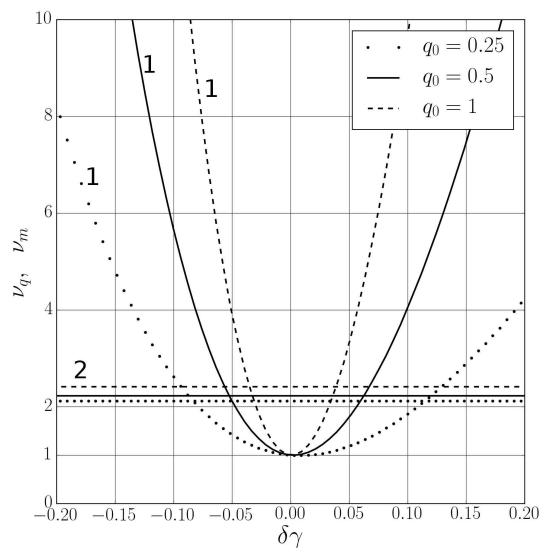


Рис. 4.

В случае, когда $\delta\gamma = 0$, КП оценка совпадает с МП оценкой при априори известной величине СП и $V(\Omega^*|\Omega_0, \gamma_0) = V(\Omega_m|\Omega_0)$.

На рис. 3 показаны зависимости относительного смещения $\delta\Omega$ квазиправдоподобной оценки от величины расстройки $\delta\gamma$ для значений $q_0 = 0.25$ (пунктирная линия), $q_0 = 0.5$ (сплошная линия), $q_0 = 1$ (штриховая линия).

Как видно из рис. 3, смещение оценки растёт с увеличением расстройки, при этом для значений $|\delta\gamma| < 0.2$, величина смещения практически не зависит от величины q_0 .

Зависимость нормированного рассеяния от величины расстройки $\delta\gamma$ при $\mu_{\min} = 10^3$ показана на рис. 4 линиями 1 для $q_0 = 0.25$ (пунктирная линия), $q_0 = 0.5$ (сплошная линия), $q_0 = 1$ (штриховая линия). Из рис. 4 следует, что с увеличением расстройки нормированное рассеяние КП оценки быстро возрастает. При этом проигрыш в точности КП оценки по сравнению с точностью МП оценки существенно увеличивается с ростом q_0 . Так, например, при $|\delta\gamma| > 0.1$ и $q_0 \geq 0.5$ рассеяние КП оценки превосходит рассеяние МП оценки более чем в 5÷6 раз.

Как видно из рис. 3 и рис. 4, наличие отклонения значения ожидаемой величины СП от её истинного значения приводит к существенному ухудшению точности оценки ширины СП стохастического сигнала.

2. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ

Для улучшения точности оценки ширины СП можно применить МП алгоритм, основанный на замене неизвестной величины СП её оценкой МП [1]. Тогда МП алгоритм должен определять положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП

$$\Omega_m = \arg \sup L(\Omega),$$

где функция

$$L(\Omega) = L(\gamma_m, \Omega) = \sup_{\gamma} L(\gamma, \Omega) \quad (28)$$

представляет собой логарифм ФОП (3), в котором вместо неизвестной величины СП используется её оценка МП γ_m , что равносильно максимизации (3) по γ .

Получить функцию (28) в явном виде в общем случае не удаётся. Поэтому приёмник должен определять положение максимума случайного поля $L(\gamma, \Omega)$, что приводит к необходимости делать приёмник многоканальным не только по Ω , но и по γ . Повышение точности оценки приводит к необходимости существенного усложнения приёмника.

Многоканальный приёмник должен формировать логарифм ФОП для n_1 значений Ω при постоянной величине СП γ и для n_2 значений γ при постоянной ширине СП Ω . Таким образом, приёмник имеет $n_1 n_2$ каналов. В каждом канале формируется логарифм ФОП для конкретных значений γ_i и Ω_j из априорных интервалов $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ и $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$, где

$$\gamma_i = \gamma_{\min} + i\Delta\gamma, \Delta\gamma = (\gamma_{\max} - \gamma_{\min})/(n_2 - 1), i = \overline{0, n_2 - 1}, \\ \Omega_j = \Omega_{\min} + j\Delta\Omega, \Delta\Omega = (\Omega_{\max} - \Omega_{\min})/(n_1 - 1), j = \overline{0, n_1 - 1}.$$

Схема одного канала аналогична схеме канала при КП оценке рис.1, с тем отличием, что передаточная функция фильтра в каждом канале будет зависеть от двух параметров Ω_j и γ_i . Кроме того, величина $L_c(\gamma^*, \Omega_j)$, подающаяся на второй вход вычитающего устройства также будет зависеть как от γ_i , так и от Ω_j . То есть для каждого канала с индексами (i, j) $H(\omega, \gamma^*, \Omega_j)$ переходит в $H(\omega, \gamma_i, \Omega_j)$, и $L_c(\gamma^*, \Omega_j)$ переходит в $L_c(\gamma_i, \Omega_j)$.

Решающее устройство определяет, в каком из $n_1 n_2$ каналов сигнал наибольший, и в качестве совместной оценки выдаёт значение ширины СП Ω_j , соответствующее этому каналу.

Определим характеристики совместного МП алгоритма оценки. Сигнальная функция в этом случае имеет вид

$$S(\gamma, \Omega) = \langle L(\gamma, \Omega) \rangle = \\ = \frac{T\Omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma f(x)}{\gamma f(x) + N_0} \left[1 + \frac{\gamma_0}{N_0} f\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} x\right) \right] - \ln \left[1 + \frac{\gamma}{N_0} f(x) \right] \right\} dx.$$

В [1] показано, что оценка максимального правдоподобия является асимптотически несмещённой и эффективной при выполнении условия $z \rightarrow \infty$. Определим дисперсию эффективной оценки. Для этого запишем информационную матрицу Фишера [4]

$$\hat{I} = - \left(\begin{array}{cc} \left\langle \frac{\partial^2 L(\Omega, \gamma)}{\partial \Omega^2} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 L(\Omega, \gamma)}{\partial \Omega \partial \gamma} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 L(\Omega, \gamma)}{\partial \gamma \partial \Omega} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 L(\Omega, \gamma)}{\partial \gamma^2} \right\rangle \end{array} \right)_{\Omega_0, \gamma_0}$$

и найдём её элементы. Усредняя соответствующие производные логарифма ФОП, получим, что матрица Фишера имеет вид

$$\hat{I} = - \begin{pmatrix} S_{2\Omega} & S_{\gamma\Omega} \\ S_{\gamma\Omega} & S_{2\gamma} \end{pmatrix},$$

где

$$S_{2\gamma} = \frac{\partial^2 S(\gamma, \Omega)}{\partial \gamma^2} \Big|_{\gamma_0, \Omega_0} = - \frac{T\Omega_0}{4\pi N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2}{(q_0 f(x) + 1)^2} dx, \quad (29)$$

$$S_{\gamma\Omega} = \frac{\partial^2 S(\gamma, \Omega)}{\partial \gamma \partial \Omega} \Big|_{\gamma_0, \Omega_0} = \frac{Tq_0}{4\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{df(x)}{dx} f(x) (q_0 f(x) + 1)^{-2} dx, \quad (30)$$

$$S_{2\Omega} = \frac{\partial^2 S(\gamma, \Omega)}{\partial \Omega^2} \Big|_{\gamma_0, \Omega_0} = - \frac{Tq_0^2}{4\pi \Omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{df(x)}{dx} \right)^2 (q_0 f(x) + 1)^{-2} dx. \quad (31)$$

Дисперсия совместной оценки параметра Ω находится, согласно [1], [4], как

$$D(\Omega_m|\Omega_0, \gamma_0) = \langle (\Omega_m - \Omega_0)^2 | \Omega_0 \rangle = (\hat{I}^{-1})_{11}. \quad (32)$$

Запишем матрицу, обратную матрице Фишера

$$\hat{I}^{-1} = \frac{-1}{S_{2\Omega}S_{2\gamma} - S_{\gamma\Omega}^2} \begin{pmatrix} S_{2\gamma} & S_{q\Omega} \\ S_{q\Omega} & S_{2\Omega} \end{pmatrix}.$$

Тогда дисперсия (32) совместной оценки ширины СП при априори неизвестной величине СП

$$D(\Omega_m|\Omega_0, \gamma_0) = \frac{-S_{2\gamma}}{S_{2\Omega}S_{2\gamma} - S_{\gamma\Omega}^2}, \quad (33)$$

где $S_{2\gamma}$, $S_{2\Omega}$, $S_{\gamma\Omega}$ определяются из (29) – (31).

Найдем характеристики совместной МП оценки полосы частот для сигнала, СП которого имеет вид (23). Подставляя (23) в (29) – (32) и (33) для дисперсии совместной оценки получим выражение

$$D(\Omega_m|\Omega_0, \gamma_0) = \frac{\pi\Omega_0}{Tq_0^2}(1 + \sqrt{1 + q_0})^4. \quad (34)$$

Оценка полосы частот сигнала с неизвестной величиной СП при использовании совместного МП алгоритма несмещённая, характеризовать её точность будем величиной нормированного рассеяния совместной МП оценки

$$\nu_m(q_0) = \frac{V(\Omega_m|\Omega_0, \gamma_0)}{V(\Omega_m|\Omega_0)} = \frac{D(\Omega_m|\Omega_0, \gamma_0)}{D(\Omega_m|\Omega_0)} = 1 + \sqrt{1 + q_0}, \quad (35)$$

которая представляет собой отношение рассеяния совместной МП оценки к оценке МП оценки при известной величине γ_0 и описывает проигрыш в точности совместной МП оценки ширины СП при априори неизвестной величине γ_0 по сравнению с точностью МП оценки ширины СП при априори известной величине СП. В формуле (35) $D(\Omega_m|\Omega_0, \gamma_0)$ определяется в соответствии с (34), а $D(\Omega_m|\Omega_0)$, в соответствии с (27) и (22), имеет вид

$$D(\Omega_m|\Omega_0) = \frac{\pi\Omega_0}{Tq_0^2}(1 + \sqrt{1 + q_0})^3.$$

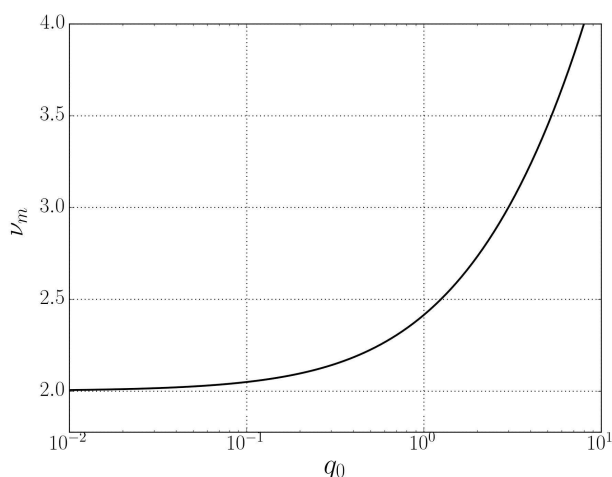


Рис. 5.

На рис. 4 горизонтальными линиями 2 показаны нормированные рассеяния совместной МП оценки для значений для $q_0 = 1$ (штриховая линия), $q_0 = 0.5$ (сплошная линия), $q_0 = 0.25$ (пунктирная линия). Из рис. 4 видно, что в некотором интервале значения $\delta\gamma$ рассеяние КП оценки меньше рассеяния совместной МП оценки. При $q_0 = 0.25$ это верно для значений $\delta\gamma$ в пределах $\pm 10\%$. С увеличением q_0 этот интервал уменьшается. Так при $q_0 = 1$ рассеяние КП оценки меньше рассеяния совместной МП оценки при $\delta\gamma = \pm 4\%$.

Из рис. 4 видно, что величина нормированного рассеяния совместной МП оценки различна для разных значений q_0 . Определим, как зависит величина ν_m от q_0 . Для этого на рис. 5 построена зависимость $\nu_m(q_0)$ (35).

Из рис. 5 видно, что увеличение отношения величины СП сигнала к величине СП шума приводит к возрастанию нормированного рассеяния ν_m (35). Таким образом, чем больше значение q_0 , тем менее точна совместная МП оценка ширины СП сигнала с неизвестной величиной СП по сравнению со случаем, когда величина СП априори известна. Это означает, что ценность априорного знания величины СП γ возрастает с увеличением её отношения к величине СП шума N_0 .

Полученные выражения для характеристик различных алгоритмов оценки ширины СП стохастического сигнала с неизвестной величиной СП позволяют сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации о величине СП, а также от требований, предъявляемых к простоте реализации алгоритма и точности оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликов, Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Сов. Радио, 1978. — 296 с.
2. Трифонов, А. П. Квазиоптимальная оценка ширины спектра мощности случайного процесса / А. П. Трифонов, С. А. Галун // Известия вузов. Приборостроение. — 1981. — Т. 31, № 5. — С. 21–25.
3. Трифонов, А. П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами (Под. ред. А. П. Трифопова) / А. П. Трифонов, Е. П. Нечаев, В. И. Парфенов. — Воронеж : ВГУ, 1991. — 246 с.
4. Фалькович, С. Е. Статистическая теория измерительных радиосистем / С. Е. Фалькович, Э. Н. Хомяков. — М. : Радио и связь, 1981. — 288 с.
5. Захаров, А. В. Оценка спектральной мощности стохастической несущей случайного импульса с неизвестным временем прихода / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 20–30.
6. Парфенов, В. И. Прием узкополосного случайно модулированного сигнала на фоне шума / В. И. Парфенов, С. В. Золотарев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2005. — № 1. — С. 86–92.
7. Мудров, В. И. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. — М. : Радио и связь, 1983. — 304 с.

REFERENCES

1. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Parameter estimation of signals in noise. [Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomekh]. Moscow: Sov. radio, 1978, 296 p.
2. Trifonov A.P., Galun S.A. Quasi-optimal estimation of spectral width of power spectrum of random process. [Trifonov A.P., Galun S.A. Kvazioptimalnaya ocenka shiriny spectra moshchnosti sluchajnogo processa]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Priborostroenie — Journal of Instrument Engineering*, 1981, vol. 31, no. 5, pp. 21–25.
3. Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Detection of the stochastic signals with the unknown parameters. [Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Obnaruzhenie stohasticheskikh signalov s neizvestnymi parametrami]. Voronezh: Voronezh State University, 1991, 246 p.
4. Falkovich S.E., Khomyakov E.N. Statistical theory of measurement Radiosystems. [Falkovich S.E., Khomyakov E.N. Statisticheskaya teoriya izmeritel'nyh radiosistem]. Moscow: Radio and Communications, 1981, 288 p.
5. Zakharov A.V. Estimations of spectral power (intensity) of Gaussian stochastic carrier of random pulse with unknown time delay. [Zaharov A.V. Ocenka spektral'noj moshchnosti stohasticheskoy nesushchej sluchajnogo impul'sa s neizvestnym vremenem prihoda]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of*

Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2011, no. 1, pp. 20–30.

6. Parfenov V.I., Zolotarev S.V. Reception of narrowband randomly modulated signal at white noise background is considered. [Parfenov V.I., Zolotarev S.V. Priem uzkopolosnogo sluchajno modulirovannogo signala na fone shuma]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2005, no. 1, pp. 86–92.

7. Mudrov V.I., Kushko V.L. Methods of processing measurements. Quasi-like estimations. [Mudrov V.I., Kushko V.L. Metodi obrabotki izmerenii. Kvazipravdopodobnie ocenki]. Moscow: Radio and Communications, 1983, 304 p.

Трифонов Андрей Павлович, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, зав. каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, профессор кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ "МЭИ", г. Москва, Российская Федерация

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Тел.: +7(473)220-89-16

Trifonov Andrei Pavlovich, Doctor of technical sciences, Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Head of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Professor Department of Radio Engineering Devices and Antenna Systems of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Tel.: +7(473)220-89-16

Турбин Михаил Михайлович, магистрант кафедры радиофизики физического факультета ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: turbin94@gmail.com

Тел.: +7(920)404-28-12

Turbin Mihail Mihajlovich, masters student of Radiophysics Chair, Faculty of Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: turbin94@gmail.com

Tel.: +7(920)404-28-12