УДК 530.145.86; 517.518.85

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО КОГЕРЕНТНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Л. А. Минин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.05.2017 г.

Аннотация. В работе рассматривается задача разложения функций по дискретным системам когерентных состояний на прямоугольной решетке. Для решения этой задачи используется переполненная система функций – фрейм Габора. Показано, что двойственная функция фрейма представляет собой произведение двух быстро сходящихся рядов со знакочередующимися монотонно убывающими коэффициентами. Для этого используется дуальная к фрейму Габора неполная система Рисса. Дается оценка устойчивости процедуры разложения в зависимости от пропорций частотно-временного окна с помощью отношения верхней и нижней границ фрейма. Построены графики двойственных функций.

Ключевые слова: когерентные состояния, системы Рисса, биортогональные системы, фреймы Габора, тета-функции Якоби.

ON COMPUTATIONAL PECULIARITIES OF DECOMPOSITION WITH COHERENT STATES

L. A. Minin

Abstract. In this paper we consider the problem of expanding functions with respect to discrete systems of coherent states on a rectangular lattice. To solve the problem, an overcomplete system of functions is used — the Gabor frame. It is shown that the dual function of the frame is the product of two rapidly converging series with alternating monotonically decreasing coefficients. For this purpose, we use the incomplete Riesz system which is dual to the Gabor frame. An estimate of the stability of the decomposition procedure is given depending on the proportions of the time-frequency window by means of the ratio of the upper and lower boundaries of the frame. Graphs of dual functions are constructed.

Keywords: coherent states, Riesz systems, biorthogonal systems, Gabor frames, Jacobi theta functions.

ВВЕДЕНИЕ

Волновые пакеты, составленные из функций вида

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{(x-\alpha_1)^2}{2}\right)e^{i\alpha_2 x}, \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

были введены в квантовую механику в 1926 году Э. Шредингером. После работ Р. Глаубера для таких систем общепринятым стало название когерентные состояния. Случай, когда параметры α_1, α_2 в (1) задаются дискретно, на прямоугольной решетке, впервые рассмотрел И. Нейман. В своей статье 1929 года, посвященной эргодической теории для квантовых систем [1, Приложение], он выдвинул предположение, что система функций

$$\varphi_{km}(x,\omega_1,\omega_2) = \exp\left(-\frac{(x-\omega_1 k)^2}{2}\right)e^{i\omega_2 mx},\ k,m \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

с вещественными положительными параметрами ω_1, ω_2 полна в $L_2(\mathbb{R})$ при выполнении условия $\omega_1\omega_2 = 2\pi$ и что из этих функций с помощью ортогонализации Грама – Шмидта можно получить ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{R})$ с хорошо локализованными базисными функциями. В 1946 году Д. Габор [2] предложил использовать систему функций (2) для цифровой обработки сигналов. С момента выхода в 1963 году статей Р. Глаубера [3] и Э. Сударшана [4] началось активное применение когерентных состояний в квантовой оптике. На данную тему написано большое число монографий, например [5] – [8], история вопроса изложена в [9, главы 10, 11].

Полнота системы функций (2) в случае $\omega_1\omega_2 = 2\pi$ была доказана в 1971 году [10], [11], а в 1975 году установлено, что не существует устойчивой процедуры разложения по данной системе функций [12]. Поэтому дальнейшее развитие пошло по одному из двух направлений: либо переход к кратномасштабному анализу в рамках теории всплесков, либо использование переполненных систем функций (фреймов) [13, глава 3], [14]. Но ни тот, ни другой подход не нашли широкого применения в квантовой оптике.

Произведения сдвигов функции Гаусса на многочлены невысоких степеней лежат в основе расчетов сложных молекул в квантовой вычислительной химии [15], [16]. Особенно популярной данная тематика стала после появления пакета прикладных программ "Gaussian". Развитие этого и других пакетов сопровождалось большим количеством математических публикаций, среди которых следует выделить монографию В.Г. Мазьи, Г. Шмидта [17], посвященную теории приближений с помощью систем сдвигов функции Гаусса и применению этой техники в различных прикладных физических задачах.

Что касается способов разложения по дискретным системам когерентных состояний, то здесь остается еще много нерешенных проблем. Наиболее разработанная с алгоритмической точки зрения технология разложения по переполненной системе функций (2) в случае $\omega_1\omega_2 = \pi/n,\ n \in \mathbb{N}$, предложена в серии статей Янссена [18] – [21]. Ключевую роль в разложении играет двойственная функция фрейма, для которой в [19] получена явная формула. В настоящей работе показано, что двойственная функция представляет собой произведение двух быстро сходящихся рядов со знакочередующимися монотонно убывающими коэффициентами. Дается оценка устойчивости процедуры разложения в зависимости от пропорций частотно-временного окна, построены графики двойственной функции. Основой для получения этих результатов стали совместные с Е.А. Киселевым, И.Я. Новиковым и С.Н. Ушаковым публикации автора [22], [23].

1. ТЕОРИЯ ГЛАУБЕРА – СУДАРШАНА

Изложение данного параграфа ведется в соответствии с монографией А. М. Переломова [7, глава 1]. Рассмотрим операторы уничтожения a, рождения a^+ и гамильтониан одномерного квантового гармонического осциллятора H:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right),\ a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right),\ H = a^+a + \frac{1}{2}.$$

С самосопряженным оператором H связана полная ортонормированная система собственных функций $|n\rangle$ (функций Эрмита),

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle,\ E_n = n + \frac{1}{2},\ n = 0{,}1{,}2{,}...$$

Когерентные состояния $|\alpha\rangle$ представляют собой набор собственных функций оператора уничтожения

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

которые существуют и допускают нормировку (т.е. принадлежат $L_2(\mathbb{R})$) для любого комплексного $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. Имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|, \tag{3}$$

откуда следует возможность разложения произвольного состояния $|\psi\rangle$ по когерентным состояниям $|\alpha\rangle$,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\langle\alpha|\psi\rangle|\alpha\rangle. \tag{4}$$

Интегралы в формулах (3), (4) берутся по плоскости $\mathbb{R}^2$, $d^2\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2$. Формула (4) позволяет получить представление $|\psi\rangle$ в виде двойного интеграла по всем когерентным состояниям. В целом ряде задач более удобным было бы представление в виде ряда по дискретному набору когерентных состояний, но это оказывается не так просто сделать.

Один из способов решения данной проблемы был предложен В. Баргманом [24] . Для коэффициентов $\langle\alpha|\psi\rangle$ из (4) справедливо равенство

$$\langle\alpha|\psi\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2)\psi(\alpha^*), \text{ где } \psi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle n|\psi\rangle.$$

Отсюда следует, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между элементами гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R})$ и целыми аналитическими функциями $\psi(\alpha)$. А для однозначного восстановления этих функций достаточно знать их значения только в узлах прямоугольной решетки на плоскости α_1, α_2 с площадью ячейки π (что равносильно, если вернуться к обозначениям формулы (2), равенству $\omega_1\omega_2 = 2\pi$). Заметим только, что восстановление $|\psi\rangle$ по значениям $\psi(\alpha)$ в узлах решетки само по себе оказывается нетривиальной задачей, требующей суммирования рядов, со всеми присущими задачам аналитического продолжения эффектами неустойчивости.

Приведем также, следуя [9, §11.8], формулу для оператора плотности $\widehat{\rho}$, представляющего собой усредненный по ансамблю квантовых состояний проекционный оператор. Имеет место равенство (P–представление Сударшана)

$$\widehat{\rho} = \int d^2\alpha\,\varphi(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{5}$$

где функция $\varphi(\alpha)$ есть сумма ряда из сильно сингулярных функций с матричными элементами $\langle n|\widehat{\rho}|m\rangle$, вычисляемыми с помощью функций Эрмита,

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\langle n|\widehat{\rho}|m\rangle\frac{\sqrt{n!m!}}{(n+m)!}\frac{1}{2\pi r}e^{r^2 - i\theta(n-m)}\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n+m}\delta(r), \tag{6}$$

$\alpha = re^{i\theta}, \delta(r)$ – дельта-функция Дирака.

Прежде чем говорить о реализуемости формулы (6) и других подобных формул, определим ключевые для дальнейшего изложения понятия систем Рисса, биортогональных систем и фреймов Габора.

2. СИСТЕМЫ РИССА

Рассматривается гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R})$ комплекснозначных функций со скалярным произведением (f,g) и нормой $\|f\|_{L_2}$:

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx;\ \|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx.$$

Здесь $g^*(x)$ – комплексное сопряжение. Норма в пространстве ℓ_2 бесконечных последовательностей $\{c_k\}$ задается формулой

$$\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Все определения в данном параграфе приводятся в соответствии с монографией [25, глава 1].

Определение 1. Функции $\varphi_k(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют систему Рисса, если для любой последовательности $c \in l_2$ выполнена двусторонняя оценка

$$A_R\|c\|_{l_2}^2 \leqslant \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \right\|_{L_2}^2 \leqslant B_R\|c\|_{l_2}^2 \tag{7}$$

с положительными константами

$$0 < A_R \leqslant B_R < +\infty.$$

Наибольшая из величин A_R называется нижней константой Рисса, наименьшая из величин B_R – верхней константой Рисса.

В случае конечного набора функций $\varphi_k(x)$ аналогами констант Рисса являются минимальное и максимальное собственные значения матрицы Грама, образованной попарными скалярными произведениями функций. Отношение констант B_R/A_R равно числу обусловленности матрицы Грама и является характеристикой устойчивости при разложении по данной системе функций или при нахождении ортогональной проекции на подпространство, порожденное этими функциями. Для ортонормированных систем функций обе константы равны 1.

Определение 2. Функции $\varphi_k(x), \psi_n(x)$ образуют биортогональную систему, если

$$(\varphi_k, \psi_n) = \delta_{kn}, k, n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Здесь δ_{kn} – символ Кронекера.

Если система функций $\varphi_k(x)$ полна в $L_2(\mathbb{R})$, то с помощью биортогональной системы легко получить разложение произвольной функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f,\psi_k)\varphi_k(x). \tag{9}$$

В случае неполной системы правая часть формулы (9) задает ортогональную проекцию $f(x)$ на подпространство, представляющее собой замыкание линейной оболочки $\varphi_k(x)$. Для систем Рисса биортогональная система всегда существует [26], но процедура ее построения может оказаться весьма непростой. В конечномерном случае построение биортогональной системы равносильно нахождению обратной матрицы.

3. ФРЕЙМЫ ГАБОРА

Все определения в данном параграфе приводятся в соответствии с монографией [13, глава 3].

Определение 3. Функции $\varphi_k(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют фрейм, если для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполнена двусторонняя оценка

$$A_F\|f\|_{L_2}^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(f,\varphi_k)|^2 \leqslant B_F\|f\|_{L_2}^2 \tag{10}$$

с положительными константами

$$0 < A_F \leqslant B_F < +\infty.$$

Наибольшая из величин A_F называется нижней границей фрейма, а наименьшая из величин B_F – верхней границей фрейма.

Фрейм могут образовывать только полные или переполненные системы функций. В случае ортонормированного базиса $A_F = B_F = 1$, а неравенство (10) превращается в равенство Парсеваля для коэффициентов обобщенного ряда Фурье. Переход к переполненным системам осуществляется, как правило, с целью достижения устойчивости при разложении по данной неортогональной системе функций. Но тогда возникает проблема неоднозначности разложения, требующая какой-либо физической интерпретации при использовании фреймов в конкретных задачах. Именно это и является, судя по всему, основной причиной слабого использования фреймов в современной теоретической физике.

Определение 4. Фрейм называется жестким, если $A_F = B_F$.

Для получения эффективного метода разложения по фрейму требуется построение двойственного фрейма. В случае жесткого фрейма двойственный фрейм совпадает с исходным с точностью до числового множителя A_F^{-1}, общего для всех функций. В настоящей статье речь пойдет только о фреймах Габора, т.е. о системах функций вида

$$g(x - k\alpha_1)e^{im\alpha_2 x},\ k,m \in \mathbb{Z},$$

с функцией окна $g(x) = \exp(-x^2/2)$. Данный фрейм представляет собой дискретную подсистему когерентных состояний на равномерной прямоугольной решетке. Двойственный фрейм также состоит из функций вида

$$\widetilde{g}(x - k\alpha_1)e^{im\alpha_2 x},\ k,m \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому основной задачей в случае фреймов Габора является построение двойственной функции $\widetilde{g}(x)$.

4. ТЕТА-ФУНКЦИЯ ЯКОБИ

Для формулировки результатов данной статьи нам понадобится третья тета-функция Якоби [27, глава 21]

$$\vartheta_3(x,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx},\ |q| < 1, \tag{11}$$

которая является целой функцией аргумента x с периодом π, а при действительных значениях параметра q строго положительна. Обозначим через $c_k(\omega)$ коэффициенты ряда Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\omega)e^{ikx} = \frac{1}{\vartheta_3\left(x/2,q\right)},\ q = \exp\left(-\omega^2/4\right). \tag{12}$$

Как следует из работ В.Г. Мазьи и Г. Шмидта [17, гл. 7, §7.3, лемма 7.8], для них справедливо представление в виде ряда

$$c_k(\omega) = \frac{1}{C\left(\omega\right)} \cdot \exp\left(\frac{k^2\omega^2}{4}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{\left(r+0.5\right)^2\omega^2}{4}\right), \tag{13}$$

где константа

$$C\left(\omega\right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{\left(2r+0.5\right)^2\omega^2}{4}\right).$$

Коэффициенты $c_k(\omega)$ появились в связи с решением задачи интерполяции по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса, но фактически формула (13) была получена Э.Т. Уиттакером в 1903 году [27, гл. 21, пример 14].

Отметим некоторые свойства коэффициентов $c_k(\omega)$. Из формулы (13) следует, что $c_k(\omega) \in \mathbb{R}$, $c_k(\omega) = c_{-k}(\omega)$, $\mathrm{sgn}(c_k(\omega)) = (-1)^k$. Кроме того,

$$|c_{k+1}(\omega)| < |c_k(\omega)|,\ k \geqslant 0, \tag{14}$$

т. е. эти коэффициенты знакочередуются и монотонно убывают по модулю. Справедливость (14) была проверена численно при всех разумных значениях параметров и частично доказана в [28]. Если $\omega \to 0$, то наблюдается быстрый рост значений $|c_k(\omega)|$, приводящий к потере устойчивости процедуры интерполяции [29].

5. ДВОЙСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ФРЕЙМОВ ГАБОРА

Система функций (2) в случае $\omega_1\omega_2 = 2\pi$, как было сказано во введении, является полной системой, но не является ни фреймом, ни системой Рисса [12], [13, глава 3], [22]. Тем не менее, в 1980 году М. Бастианс [30] построил для нее биортогональную систему. Ряды, участвующие в ее построении, подобны рядам в формуле (6) и сходятся только в пространствах обобщенных функций. Поэтому они мало пригодны для расчетов в реальных физических задачах или требуют серьезной адаптации, равносильной регуляризации при решении некорректных задач.

Еще одна конструкция была предложена в 1988 году Ж. Бургейном [31]. Он построил из системы (2) ортонормированный базис с хорошо локализованными базисными функциями. Но, насколько нам известно, в силу сложности структуры этот базис не нашел применения ни в теоретической физике, ни в цифровой обработке сигналов. Заметим также, что оператор перехода от исходного базиса к ортонормированному неограничен [32].

Обратимся теперь к переполненным системам. В работе [33] (см. также [13, глава 3]) была выдвинута и частично доказана гипотеза, что система функций с положительными параметрами α_1, α_2:

$$g_{km}(x,\alpha_1,\alpha_2) = \exp\left(-\frac{(x-k\alpha_1)^2}{2}\right)e^{im\alpha_2 x},\ k,m \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

образует фрейм Габора, если выполнено неравенство $\alpha_1\alpha_2 < 2\pi$. Справедливость данной гипотезы для общего случая была доказана в 1992 году Ю.И. Любарским [34]. Следовательно, для произвольной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ можно записать разложение по фрейму Габора

$$f(x) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_{km} \cdot g_{km}(x,\alpha_1,\alpha_2), \tag{16}$$

где коэффициенты $\widetilde{f}_{km}$ задаются с помощью скалярных произведений

$$\widetilde{f}_{km} = (f,\widetilde{g}_{km})\,,\ \widetilde{g}_{km}(x,\alpha_1,\alpha_2) = \widetilde{g}(x-k\alpha_1)e^{im\alpha_2 x}, \tag{17}$$

$\widetilde{g}(x)$ – двойственная функция фрейма (функции окна двойственного фрейма). При численной реализации процедуры нахождения $\widetilde{g}(x)$ используется метод разложения в ряд Неймана или метод конечномерной редукции [35], [13, глава 3], [36]. Большой объем информации о фреймах Габора содержится в монографии [14] и обзорной статье [37].

Вернемся к системе когерентных состояний (2) и выпишем скалярные произведения функций этой системы

$$(\varphi_{km}(x,\omega_1,\omega_2), \varphi_{k'm'}(x,\omega_1,\omega_2)) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\omega_1^2}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\omega_2^2}{4}\right)\cdot \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right).$$

Если $\omega_1\omega_2 = 4\pi n$, $n\in\mathbb{N}$, то происходит разделение множителей с индексами $k{,}k'$ и $m{,}m'$:

$$(\varphi_{km}(x{,}\omega_1,\omega_2),\varphi_{k'm'}(x{,}\omega_1,\omega_2)) =$$

$$= \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\omega_1^2}{4}\right)\cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\omega_2^2}{4}\right). \tag{18}$$

Именно это обстоятельство и позволило в статье [22] посчитать для таких неполных систем константы Рисса, построить биортогональную систему и провести ортогонализацию. А в случае $\omega_1\omega_2 = 2\pi$, т.е. полной системы, индексы перемешиваются и выкладки резко усложняются.

Согласно [35], [37], неполной системе когерентных состояний (2) с параметрами ω_1,ω_2 соответствует дуальный фрейм Габора (15) с параметрами

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{\omega_2},\ \alpha_2 = \frac{2\pi}{\omega_1}. \tag{19}$$

При этом отношение границ фрейма равно отношению констант Рисса для дуальной системы. Таким образом, приходим к основным результатам статьи Янссена [19]. Пусть $\alpha_1\alpha_2 = \pi/n,\ n\in\mathbb{N},\ \omega_1 = 2\pi/\alpha_2,\ \omega_2 = 2\pi/\alpha_1$. Тогда функция окна двойственного к (15) фрейма задается формулой

$$\widetilde{g}(x,\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2n\sqrt{\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\omega_1)\exp\left(-\frac{(x-k\omega_1)^2}{2}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(\omega_2)e^{im\omega_2 x}. \tag{20}$$

Отношение верхней и нижней границ фрейма (15) равно

$$\frac{B_F}{A_F} = \frac{\vartheta_3\left(0,\exp\left(-\pi^2/\alpha_1^2\right)\right)\cdot\vartheta_3\left(0,\exp\left(-\pi^2/\alpha_2^2\right)\right)}{\vartheta_3\left(\pi/2,\exp\left(-\pi^2/\alpha_1^2\right)\right)\cdot\vartheta_3\left(\pi/2,\exp\left(-\pi^2/\alpha_2^2\right)\right)}. \tag{21}$$

В таблице 1 для разных соотношений $\omega_2/\omega_1 = \alpha_1/\alpha_2$ и разных n приведены отношения границ фрейма B_F и A_F, вычисленные с помощью формулы (21). Все значащие цифры верные с точностью до округления. Отношение границ фрейма, так же как и отношение констант Рисса, служит характеристикой устойчивости процедуры разложения по фрейму. Из таблицы 1 видно, что чем более переопределена система функций, образующих фрейм, тем устойчивее становится процедура разложения. Это отражает специфику когерентных состояний, сочетающих свойства непрерывного спектра (они являются собственными функциями оператора уничтожения, собственные числа которого заполняют всю комплексную плоскость) и дискретного спектра (все собственные функции нормируемы).

Эффект разделения индексов в формуле (18) играет ключевую роль в процедуре разложения по дискретной системе когерентных состояний. На наш взгляд, применение таких переполненных систем служит хорошей альтернативой используемым в настоящее время конструкциям вроде двойственной функции Бастианса или P–представления Сударшана (5).

6. ГРАФИКИ ДВОЙСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Приведем для иллюстрации несколько графиков двойственной функции $y = \widetilde{g}(x,\omega_1,\omega_2)$. Вычисления по формуле (20) достаточно просты, поскольку первый ряд представляет сумму

Таблица 1. *Отношения границ фрейма Габора B_F/A_F*

α_1/α_2	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=10$
1	1.414	1.015	1.001	1.000
2	2.432	1.189	1.037	1.000
3	5.278	1.653	1.189	1.000
4	11.57	2.414	1.468	1.002
5	25.38	3.565	1.871	1.007
6	55.66	5.276	2.414	1.022
7	122.1	7.813	3.129	1.046
8	267.7	11.57	4.062	1.082
9	587.2	17.14	5.276	1.130
10	1288.0	25.38	6.854	1.189

сдвигов функции Гаусса, умноженных на знакочередующиеся убывающие по модулю коэффициенты, т.е ряд лейбницевского типа, а сумма второго ряда согласно (12) равна

$$\frac{1}{\vartheta_3\left(\omega_2 x/2, \exp\left(-\omega_2^2/4\right)\right)}.$$

Ограничимся значением параметра $n=1$, т.е. $\omega_1\omega_2 = 4\pi$, поскольку в этом случае наиболее четко проявляется динамика изменения двойственной функции $\widetilde{g}(x, \omega_1, \omega_2)$ с ростом величины ω_2/ω_1. Напомним, что параметры α_1, α_2 фрейма Габора (15) связаны с ω_1, ω_2 равенствами (19). Размерность величин на осях графиков 1 – 5 не указана, поскольку с самого начала в формулах для когерентных состояний мы имели дело с безразмерными величинами.

Двойственная функция является четной, что выгодно отличает ее, например, от всплесков Добеши. Заметим, что пары графиков 2 – 3 и 4 – 5 связаны между собой, поскольку изображенные на них функции переходят друг в друга при применении преобразования Фурье, которое является линейным унитарным оператором, действующим в $L_2(\mathbb{R})$.

Столь сильное изменение поведения двойственной функции с ростом диспропорции частотно-временного окна $\omega_1\omega_2$ может оказаться существенным в теории сжатых состояний

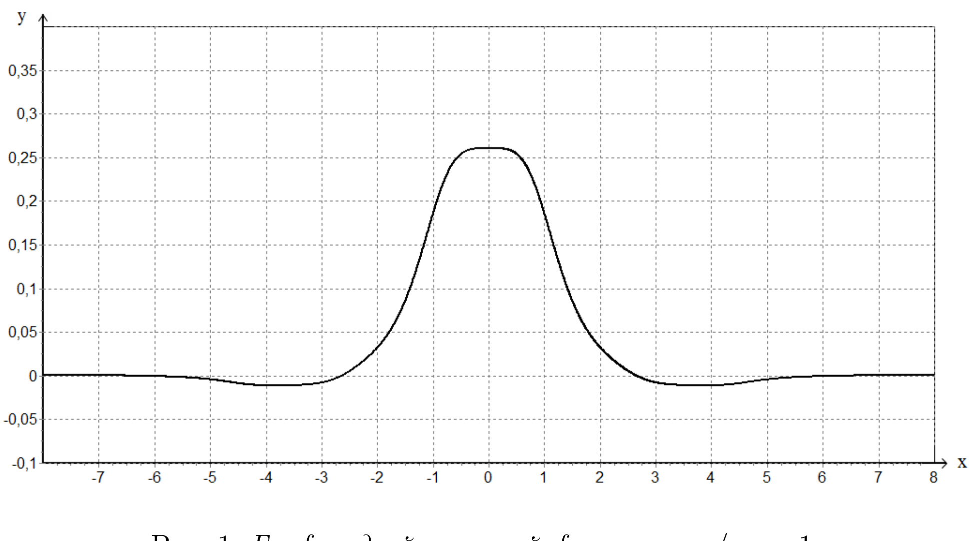

Рис. 1. *График двойственной функции, $\omega_2/\omega_1 = 1$*

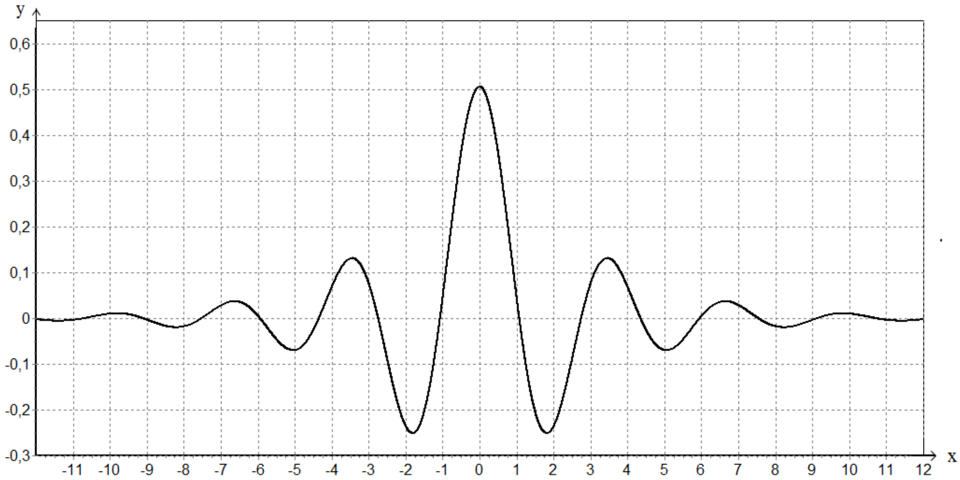

Рис. 2. *График двойственной функции,* $\omega_2/\omega_1 = 5$

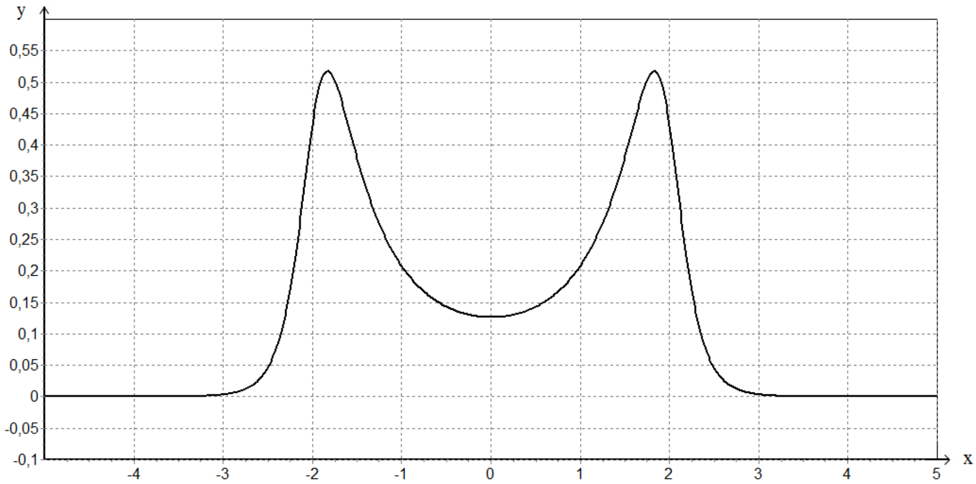

Рис. 3. *График двойственной функции,* $\omega_2/\omega_1 = 0.2$

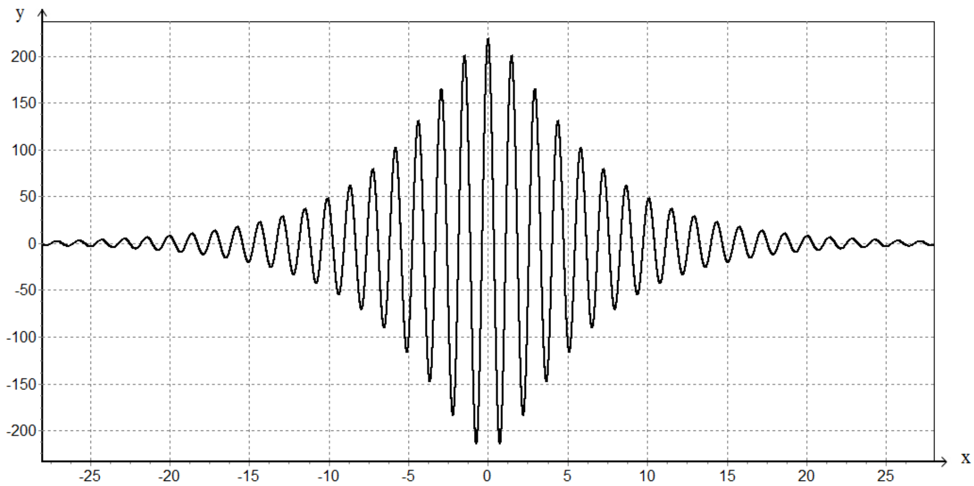

Рис. 4. *График двойственной функции,* $\omega_2/\omega_1 = 25$

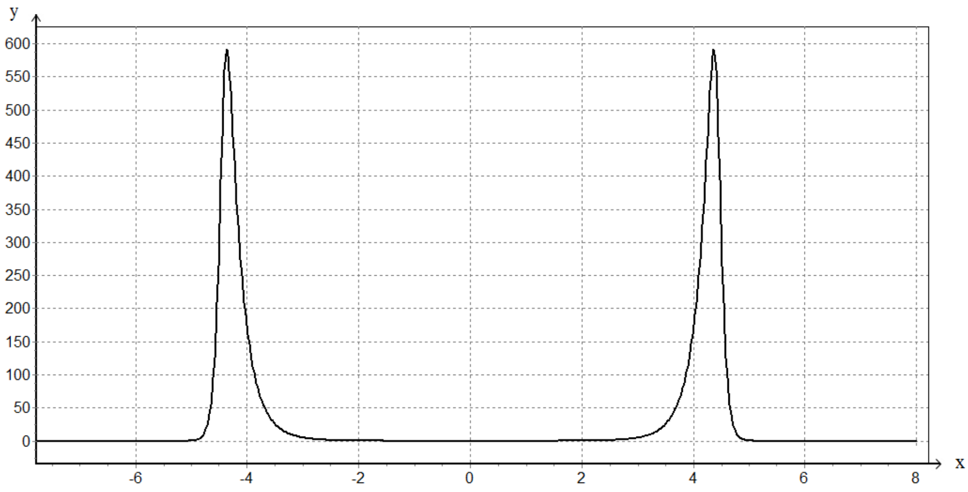

Рис. 5. *График двойственной функции,* $\omega_2/\omega_1 = 0.04$

света [9, глава 21], [38, главы 4,8]. В квантовой оптике под сжатыми состояниями понимают такие состояния, для которых значение флуктуации одной из канонически сопряженных компонент меньше ее значения в вакуумном состоянии. Введены они были в 1963 году Р. Глаубером, первые успешные эксперименты по получению сжатого света проведены в 1985 году, а в последнее время технология сжатия света активно используется для создания прецизионных измерительных систем. Наиболее известным примером является измерение с помощью таких систем гравитационных волн.

Математическое описание сжатых состояний для смешанных и перепутанных состояний сводится к разложению по когерентным состояниям. И уже на простейших, по сути дела качественных, примерах наблюдаются вычислительные эффекты, получившие в монографии В.П. Шляйха [38, глава 8, п. 8.4] название "гигантские осцилляции". А роль двойственных функций состоит в том, чтобы в сложном сигнале выделить компоненту, отвечающую чистому когерентному состоянию. Хотя здесь требуется учитывать переполненность используемой системы функций и связанную с этим неоднозначность разложения по фрейму Габора.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной работе предлагается следующий алгоритм действий для разложения функций или экспериментальных сигналов по дискретной системе когерентных состояний:

1. Выбирается равномерная прямоугольная решетка с шагами α_1, α_2, параметр n в равенстве $\alpha_1\alpha_2 = \pi/n$ и соотношение шагов $\ell = \alpha_1/\alpha_2$. Оптимальным является значение ℓ, равное 1, или близкое к нему.

2. По формуле (20) строится двойственная функция $\widetilde{g}(x, \omega_1, \omega_2)$. При определении количества слагаемых в суммах для достижения требуемой точности используется информация о знакочередуемости и монотонном убывании по модулю коэффициентов $c_k(\omega)$.

3. По формулам (17) находятся коэффициенты разложения (16) функции $f(x)$ по фрейму Габора (15).

В отличие от формулы (4) получается не двойной интеграл, а более удобный при вычислениях двойной ряд. При этом не требуется проведения какой-либо регуляризации с целью выхода из пространства обобщенных функций. Вместо равенства Парсеваля будет двусторонняя оценка суммы квадратов коэффициентов через квадрат нормы функции и границы фрейма. Отношение верней и нижней границ фрейма указаны в таблице 1.

В нашем распоряжении оказывается целое семейство разложений по когерентным состояниям, зависящее от двух параметров n и ℓ. Обобщение с одномерного случая на многомерный не вызывает никаких сложностей, поскольку функция Гаусса нескольких переменных равна произведению функций Гаусса одной переменной. При больших значениях параметра n можно строить модели аппроксимации непрерывного спектра дискретным, причем нет необходимости, как это делается при вторичном квантовании электромагнитного излучения, брать в пространстве конечный куб большого размера, а потом делать предельный переход к бесконечности. В случае фрейма Габора можно сразу проводить разложение по всему пространству.

Представление функций в виде линейной комбинации сдвигов функций Гаусса, умноженных на мнимые экспоненты, дает возможность аналитического вычисления интегралов, сверток, что часто оказывается удобным в цифровой обработке сигналов. Не требуется специально считать преобразование Фурье, поскольку для когерентных состояний оно легко вычисляется, а образ Фурье снова оказывается когерентным состоянием. Единственное. что требуется, это освоить сравнительно новый аппарат теории фреймов.

Современная теория когерентных состояний наряду с большим числом достижений (отмеченных, кстати, в случаях с Д.Габором и Р. Глаубером Нобелевскими премиями) накопила и большое число нерешенных проблем, причем с увеличением числа статей и монографий на данную тему все труднее разобраться, что же на самом деле сделано, а что требуется доделать или переделать по-новому. Практически полностью отсутствует критический анализ. Хотелось бы в качестве удачного примера критики в близкой области исследований привести статью [39]. А повышенный интерес к фреймам Габора означает, на наш взгляд, естественный процесс возвращения от всплесков и других модных конструкций к базисам, содержащим физически осмысленные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман, И. Математические основы квантовой механики / И. Нейман. — М. : Наука, 1964. — 367 с.

2. Gabor, D. Theory of communication / D. Gabor // J. IEE. — 1946. — V. 93. — P. 429–457.

3. Glauber, R. J. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field / R. J. Glauber //Phys.Rev. — 1963. — V. 131. — P. 2766–2789.

4. Sudarshan, E. C. G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams / E. C. G. Sudarshan // Phys.Rev.Lett. — 1963. — V. 10. — P. 277–279.

5. Glauber, R. J. Quantum Theory of Optical Coherence : Selected Papers and Lectures / R. J. Glauber. — Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 2007. — 639 p.

6. Клаудер, Дж. Основы квантовой оптики / Дж. Клаудер, Э. Сударшан. — М. : Мир, 1970. — 428 с.

7. Переломов, А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А. М. Переломов. — М. : Наука, 1987. — 268 с.

8. Gazeau, V. P. Coherent States in Quantum Physics / V. P. Gazeau. — Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 2009. — 358 p.

9. Мандель, Л. Оптическая когерентность и квантовая оптика / Л. Мандель, Э. Вольф. — М. : Физматлит, 2000. — 895 с.

10. Переломов, А. М. Замечание о полноте системы когерентных состояний / А. М. Переломов // ТМФ. — 1971. — Т. 6, № 2. — С. 213–224.

11. On the completeness of coherent states / V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J. R. V. Klauder // Rep. Math. Phys.. — 1971. — № 2. — P. 221–228.

12. Bacry, H. Proof of the completeness of lattice states in the kq-representation / H. Bacry, A. Grossmann, J. Zak // Phys. Rev. — 1975. — B 12. — P. 1118–1120.

13. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. — Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. — 464 с.

14. Christensen, O. An Introduction to Frames and Riesz Bases / O. Christensen. — Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhauser Verlag AG, 2016. — 704 p.

15. Gill, P. The Prism Algorithm for Two-Electron Integrals / P. Gill, J. Pople // International Journal of Quantum Chemistry. — 1991. — V. 40. — P. 753–772.

16. Jensen, F. Introduction to Computational Chemistry / F. Jensen. — John Wiley and Sons Ltd, West Sussex, England, 2007. — 620 p.

17. Maz'ya, V. Approximate approximations / V. Maz'ya, G. Schmidt. — University of Linkoping, Sweden, 2007. — 350 p.

18. Janssen, A. J. E. M. Duality and biorthogonality for Weyl-Heisenberg frames / A. J. E. M. Janssen // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — V. 1(4). — P. 403–436.

19. Janssen, A. J. E. M. Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations / A. J. E. M. Janssen // Indag. Math. — 1996. — V. 7. — P. 165–183.

20. Janssen, A. J. E. M. Characterization and computation of canonical tight windows for Gabor frames / A. J. E. M. Janssen, T. Strohmer // J. Fourier Anal. Appl. — 2002. — V. 8(1). — P. 1–28.

21. Janssen, A. J. E. M. On generating tight Gabor frames at critical density / A. J. E. M. Janssen // J. Fourier Anal. Appl. — 2003. — V. 9(2). — P. 175–214.

22. Киселев, Е. А. Вычисление констант Рисса и ортогонализация для неполных систем когерентных состояний с помощью тета-функций / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков // Математический сборник. — 2016. — Т. 207, № 8. — С. 101–116.

23. Минин, Л. А. О разложении по фреймам Габора, порожденным функцией Гаусса / Л. А. Минин, И. Я. Новиков, С. Н. Ушаков // Математические заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 951–953.

24. Bargmann, V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform / V. Bargmann // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — V. 14. — P. 187–214.

25. Новиков, И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — М. : Физматлит, 2005. — 616 с.

26. Бари, Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Ученые записки МГУ. — 1951. — Т. 4, № 148. — С. 69–107.

27. Уиттекер, Э. Т. Курс современного анализа : Ч. 2. Трансцендентные функции / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. — М. : Физматлит, 1963. — 515 с.

28. Минин, Л. А. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса / Л. А. Минин, С. М. Ситник, С. Н. Ушаков // Научн. ведом. БелГУ. Матем. Физ. — 2014. — № 12(183), вып. 35. — С. 214–217.

29. Журавлев, М. В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций / М. В. Журавлев, Л. А. Минин, С. М. Ситник // Научн. ведом. БелГУ. Матем. Физ. — 2009. — № 13 (68), вып. 17/2. — С. 89–99.

30. Bastiaans, M. J. Gabor's signal expansion and degrees of freedom of a signal / M. J. Bastiaans // Proc. IEEE. — 1980. — V. 68. — P. 538–539.

31. Bourgain, J. A. Remark on the Uncertainty Principle for Hilbertian Basis / J. A. Bourgain // Journal of Functional Analysis. — 1988. — № 79. — P. 136–143.

32. Киселев, Е. А. Об устойчивости разложения по дискретным системам когерентных состояний / Е. А. Киселев, Л. А. Минин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 21–28.

33. Daubechies, I. Frames of entire functions in the Bargmann space / I. Daubechies, A. Grossmann // Comm. Pure Appl. Math. — 1988. — iss. 41. — P. 151–164.

34. Lyubarskii, Yu. I. Frames in the Bargmann space of entire functions / Yu. I. Lyubarskii // in Entire and Subharmonic Functions, Adv. Soviet Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI. —

1992. — V. 11. — P. 167—180.

35. Wexler, J. Discrete gabor expansions / J. Wexler, S. Raz //Signal processing. — 1990. — T. 21, № 3. — P. 207–220.

36. Feichtinger, H. G. Approximate dual Gabor atoms via the adjoint lattice method / H. G. Feichtinger, A. Grybos, D. M. Onchis // Adv. Comput. Math. — 2014. — V. 40. — P. 651–665.

37. Feichtinger, H. G. Aguided tour from linear algebra to the foundations of Gabor analysis / H. G. Feichtinger, F. Luef, T. Werther // In Gabor and Wavelet Frames, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap. — 2007. — V. 10. — P. 1–49.

38. Шляйх, В. П. Квантовая оптика в фазовом пространстве / В. П. Шляйх. — М. : Физматлит, 2005. — 780 с.

39. Сарры, А. М. К теории функционала плотности / А. М. Сарры, М. Ф. Сарры // Физика твердого тела. — 2012. — Т. 54, вып. 6. — С. 1237–1243.

REFERENCES

1. Neumann J. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. [Nejman I. Matematicheskie osnovy kvantovoj mexaniki]. Moscow: Nauka, 1964, 367 p.

2. Gabor D. Theory of communication. J. IEE, 1946, vol. 93. pp. 429–457.

3. Glauber R.J. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. Phys.Rev., 1963, vol. 131, pp. 2766–2789.

4. Sudarshan E.C.G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. Phys. Rev. Lett., 1963, vol. 10, pp. 277–279.

5. Glauber R.J. Quantum Theory of Optical Coherence: Selected Papers and Lectures. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 2007, 639 p.

6. Klauder J.R., Sudarshan E.C.G. Fundamentals of Quantum Optics. [Klauder Dzh., Sudarshan E'. Osnovy kvantovoj optiki]. Moscow: Mir, , 1970, 428 p.

7. Perelomov A. Generalized Coherent States and Their Applications. [Perelomov A.M. Obobshhennye kogerentnye sostoyaniya i ix primeneniya]. Moscow: Nauka, 1987, 268 p.

8. Gazeau V.P. Coherent States in Quantum Physics. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 2009, 358 p.

9. Mandel L., Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. [Mandel' L., Vol'f E'. Opticheskaya kogerentnost' i kvantovaya optika]. Moscow, 2000, 895 p.

10. Perelomov A.M. Remark on the completeness of the coherent state system. [Perelomov A.M. Zamechanie o polnote sistemy kogerentnyx sostoyanij]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 1971, vol. 6, no. 2, pp. 213–224.

11. Bargmann V., Butera P., Girardello L., Klauder J.R.V. On the completeness of coherent states. Rep. Math. Phys., 1971, vol. 2, pp. 221–228.

12. Bacry H., Grossmann A., Zak J. Proof of the completeness of lattice states in the kq-representation. Phys. Rev., 1975, B 12, pp. 1118–1120.

13. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. [Dobeshi I. Desyat' lekcij po vejvletam]. Izhevsk, 2004, 464 p.

14. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhauser Verlag AG, 2016, 704 p.

15. Gill P., Pople J. The Prism Algorithm for Two-Electron Integrals. International Journal of Quantum Chemistry, 1991, vol. 40, pp. 753–772.

16. Jensen F. Introduction to Computational Chemistry. John Wiley and Sons Ltd, West Sussex, England, 2nd ed., 2007, 620 p.

17. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. University of Linkoping, Sweden, 2007, 350 p.

18. Janssen A.J.E.M. Duality and biorthogonality for Weyl-Heisenberg frames. J. Fourier Anal. Appl., 1995, vol. 1(4), pp. 403–436.

19. Janssen A.J.E.M. Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations. Indag. Math., 1996, vol. 7, pp. 165–183.

20. Janssen A.J.E.M., Strohmer T. Characterization and computation of canonical tight windows for Gabor frames. J. Fourier Anal. Appl., 2002, vol. 8(1), pp. 1–28.

21. Janssen A.J.E.M. On generating tight Gabor frames at critical density. J. Fourier Anal. Appl., 2003, vol. 9(2), pp. 175–214.

22. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Y. Calculation of the Riesz constants and orthogonalization for incomplete systems of coherent states by means of theta functions. [Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya. Vychislenie konstant Rissa i ortogonalizaciya dlya nepolnyx sistem kogerentnyx sostoyanij s pomoshh'yu teta-funkcij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, no. 8, pp. 101–116.

23. Minin L.A., Novikov I.Y., Ushakov S.N. On expansion with respect to Gabor frames generated by the Gaussian function. [Minin L.A., Novikov I.Y., Ushakov S.N. O razlozhenii po frejmam Gabora, porozhdennym funkciej Gaussa]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 6, pp. 951–953.

24. Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Comm. Pure Appl. Math., 1961, vol. 14, pp. 187–214.

25. Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Scopina M.A. Wavelet Theory. [Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Scopina M.A. Teoriya vspleskov]. Moscow, 2005, 616 p.

26. Bari N.K. Biorthogonal systems and bases in a Hilbert space. [Bari N.K. Biortogonal'nye sistemy i bazisy v gil'bertovom prostranstve]. *Uchenye zapiski MGU — Scientific notes of the Moscow State University*, 1951, vol. 4, no. 148, pp. 69–107.

27. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. [Uitteker E'.T., Vatson Dzh.N. Kurs sovremennogo analiza: Ch. 2. Transcendentnye funkcii]. Moscow, 1963, 515 p.

28. Minin L.A., Sitnik S.M., Ushakov S.N. The behavior of the coefficients of nodal functions constructed from uniform shifts of the Lorentz functions and Functions of Gauss. [Minin L.A., Sitnik S.M., Ushakov S.N. Povedenie koe'fficientov uzlovyx funkcij, postroennyx iz ravnomernyx sdvigov funkcij Lorenca i funkcij Gaussa]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika — Belgorod State University, Scientific bulletin: Mathematics. Physics*, 2014, no. 12 (183), iss. 35, pp. 214–217.

29. Zhuravlev M.V., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions. [Zhuravlev M.V., Minin L.A., Sitnik S.M. O vychislitel'nyx osobennostyax interpolyacii s pomoshh'yu celochislennyx sdvigov gaussovyx funkcij]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika — Belgorod State University, Scientific bulletin: Mathematics. Physics*, 2009, no. 13 (68), iss. 17/2, pp. 89–99.

30. Bastiaans M.J. Gabor's signal expansion and degrees of freedom of a signal. Proc. IEEE, 1980, vol. 68, pp. 538–539.

31. Bourgain J.A. Remark on the Uncertainty Principle for Hilbertian Basis. Journal of Functional Analysis, 1988, no. 79, pp. 136–143.

32. Kiselev E.A., Minin L.A. On the stability of an expansion in discrete systems of coherent states. [Kiselev E.A., Minin L.A. Ob ustojchivosti razlozheniya po diskretnym sistemam kogerentnyx sostoyanij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 21–28.

33. Daubechies I., Grossmann A. Frames of entire functions in the Bargmann space. Comm. Pure Appl. Math., 1988, iss. 41, pp. 151–164.

34. Lyubarskii Yu.I. Frames in the Bargmann space of entire functions. in Entire and Subharmonic Functions, Adv. Soviet Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, vol. 11, pp. 167—180.

35. Wexler J., Raz S. Discrete gabor expansions. Signal processing, 1990, vol. 21, no. 3, pp. 207–220.

36. Feichtinger H. G., Grybos A., Onchis D.M. Approximate dual Gabor atoms via the adjoint lattice method. Adv. Comput. Math., 2014, vol. 40, pp. 651–665.

37. Feichtinger H.G., Luef F., Werther T. Aguided tour from linear algebra to the foundations of Gabor analysis. In Gabor and Wavelet Frames, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., 2007, vol. 10, pp. 1–49.

38. Schleich W.P. Quantum Optics in Phase Space. [Shlyajx V.P. Kvantovaya optika v fazovom prostranstve]. Moscow, 2005, 780.

39. Sarry A.M., Sarry M.F. On the density functional theory. [Sarry A.M., Sarry M.F. K teorii funkcionala plotnosti]. *Fizika tverdogo tela — Physics of the Solid State*, 2012, vol. 54, no. 6, pp. 1237–1243.

Минин Леонид Аркадьевич, доцент кафедры математической физики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mininla@mail.ru

Minin Leonid Arcadievich, Associate Professor, Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mininla@mail.ru