УДК 517.9

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА*

И. И. Струкова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 09.07.2016 г.

Аннотация. В статье рассматриваются пространства Степанова функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве. Вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из пространства Степанова. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций из пространства Степанова. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Получен критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы чисто периодической и исчезающей на бесконечности функций. Также получен спектральный критерий периодичности на бесконечности функции из пространства Степанова. Результаты статьи получены с существенным использованием спектральной теории изометрических представлений.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Степанова, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, периодический вектор, $L^1(\mathbb{R})$-модуль, спектр Берлинга, ряд Фурье.

PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS IN STEPANOV SPACES

I. I. Strukova

Abstract. We consider Stepanov spaces of functions defined on $\mathbb{R}$ with their values in a complex Banach space. We introduce the notions of slowly varying and periodic at infinity functions from Stepanov space. The main results of the article are connected with harmonic analysis of periodic at infinity functions from Stepanov space. For this class of functions we introduce the notion of a generalized Fourier series; the Fourier coefficients in this case may not be constants, they are functions that are slowly varying at infinity. We establish a criterion for representation of periodic at infinity functions as the sum of periodic functions and functions converging to zero and a spectral criterion for periodicity at infinity of a function from Stepanov space. Basic results are derived with the use of isometric representations spectral theory.

Keywords: Banach space, Stepanov space, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, periodic vector, $L^1(\mathbb{R})$-module, Beurling spectrum, Fourier series.

1. ОСНОВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End\ X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X.

* Постановка задачи и теоремы 1 и 2 выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете), остальные результаты — при финансовой поддержке РНФ (проект № 14–21–00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Символом $L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$ обозначим пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве X.

Через $L^p(\mathbb{R},X),\ p\in[1,\infty]$, обозначим банахово функций $x\in L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p=\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\|x(t)\|^p_X dt\right)^{1/p},\ p\in[1,\infty),\ \|x\|_\infty=vrai\sup_{t\in\mathbb{R}}\|x(t)\|_X,\ p=\infty.$$

Если $X=\mathbb{C}$, то символ X в обозначениях этих пространств будет опускаться.

Через $S^p(\mathbb{R},X)$, где $p\in[1,\infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [1], состоящее из функций $x\in L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p}=\sup_{s\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_0^1\|x(s+t)\|^p_X dt\right)^{1/p},\ p\in[1,\infty).$$

Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. [2], [3]).

Также рассматриваются подпространства $C_b(\mathbb{R},X)$ и $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ пространства $L^\infty(\mathbb{R},X)$ соответственно непрерывных ограниченных и равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|x\|_\infty=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|x(t)\|_X$.

В $S^p(\mathbb{R},X)$ определена и ограничена группа $S(t),\ t\in\mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s)=x(s+t),\ s,t\in\mathbb{R},\ x\in S^p(\mathbb{R},X).$$

Для любых функций $f\in L^1(\mathbb{R})$, $x\in S^p(\mathbb{R},X)$ их свертка

$$(f*x)(t)=\int\limits_{\mathbb{R}}f(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}}f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

принадлежит $S^p(\mathbb{R},X)$.

Через $S^p_c(\mathbb{R},X)$ обозначим замкнутое подпространство из $S^p(\mathbb{R},X)$ вида $\{x\in S^p(\mathbb{R},X)$: функция $t\mapsto S(t)x:\mathbb{R}\to S^p(\mathbb{R},X)$ непрерывна$\}$.

Через $S^p_0(\mathbb{R},X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $S^p(\mathbb{R},X)$, содержащее все функции $\varphi x,\ x\in S^p(\mathbb{R},X),\ \varphi\in C_b(\mathbb{R},X),\ \operatorname{supp}\varphi$ – компакт.

Если $X=\mathbb{C}$, то вместо $S^p(\mathbb{R},X)$ будем писать просто $S^p(\mathbb{R})$.

2. О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $End\ \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [4], [5]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T:\mathbb{R}\to End\ \mathcal{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. *Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ выполняются следующие условия:*

1. *из равенства $fx=0$, справедливого для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x\in\mathcal{X}$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathcal{X}$);*

2. *для всех $f\in L^1(\mathbb{R})$, $x\in\mathcal{X}$, $t\in\mathbb{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathcal{X}$ с представлением $T:\mathbb{R}\to End\ \mathcal{X}$):*

$$T(t)(fx)=(T(t)f)x=f(T(t)x).$$

Если $T:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{X}$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt,\ f\in L^1(\mathbb{R}),\ x\in\mathcal{X}, \tag{2}$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 1, причем эта модульная структура ассоциирована с представлением T.

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{X}$ (см. [2, 4-8]).

Определение 2. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ назовем T-*непрерывным*, если функция $\varphi_x:\mathbb{R}\to\mathcal{X},\ \varphi_x(t)=T(t)x,\ t\in\mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$. Непосредственно из последнего определения следует, что $\mathcal{X}_c$ – замкнутый подмодуль из $\mathcal{X}$, причем представление T на нем сильно непрерывно.

Пространства $S^p(\mathbb{R},X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями с модульной структурой, определяемой равенствами (1), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S:\mathbb{R}\to End\,S^p(\mathbb{R},X)$.

Далее через $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

функции $f\in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 3. *Спектром Бёрлинга* вектора $x\in\mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида $\Lambda(x)=\{\lambda_0\in\mathbb{R}: fx\neq 0$ для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(\lambda_0)\neq 0\}$.

Из определения следует, что $\Lambda(x)=\mathbb{R}\backslash\{\mu_0\in\mathbb{R}:$ существует функция $f\in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0)\neq 0$ и $fx=0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства X (см. [4], [5], [9]):

Лемма 1. *Для любых $f\in L^1(\mathbb{R})$ и $x\in\mathcal{X}$ справедливы свойства:*

1) из условия $fx=0$ для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x=0$ (т.е. $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathcal{X}$ невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x)=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

3) $\Lambda(fx)\subset(supp\widehat{f})\cap\Lambda(x)$;

4) $fx=0$, если $(supp\widehat{f})\cap\Lambda(x)=\varnothing$, и $fx=x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f}=1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x)=\{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x\neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x=\exp(i\lambda_0 t)x,\ t\in\mathbb{R}$;

6) функция $t\mapsto T(t)x:\mathbb{R}\to X$ для x с компактным $\Lambda(x)$ допускает расширение до целой функции.

Определение 4. Число $\lambda_0\in\Lambda(x)$ отнесем к *несущественному спектру* $\Lambda_0(x)$ функции $x\in S^p_c(\mathbb{R},X)$, если существует функция $f\in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\lambda_0)\neq 0$ и $f*x\in S^p_0(\mathbb{R},X)$. Множество $\Lambda_{ess}(x)=\Lambda(x)\backslash\Lambda_0(x)$ назовем *существенным спектром* функции x.

Заметим, что существенный спектр функции $x:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $x(t)=\exp it^2$, $t\in\mathbb{R}$, пуст. Если $y\in C_\omega(\mathbb{R},X)$, то $\Lambda_{ess}(y)\subset\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Если $z\in C_\omega(\mathbb{R},X)$ — нечетная периодическая функция, то функция $z_1:t\mapsto z(|t|)$ не является периодической, но z_1 является периодической на бесконечности периода ω, а ее существенный спектр содержится в множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Определение 5. Пусть $\omega>0$. Вектор $x_0\in\mathcal{X}$ назовем *ω-периодическим* (относительно представления T), если $T(\omega)x_0=x_0$.

Множество ω-периодических векторов обозначим через $\mathcal{X}_\omega=\mathcal{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t),\ t\in\mathbb{R}$.

Теорема 6. *Для того, чтобы вектор $x_0\in\mathcal{X}$ был ω-периодическим (т.е. $x_0\in\mathcal{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение*

$$\Lambda(x_0)\subset\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Если $x_0\in\mathcal{X}_\omega$, то по определению $T(\omega)x_0-x_0=0$. Тогда для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$ из формулы (2) получаем, что

$$f(T(\omega)x_0-x_0)=\int\limits_{\mathbb{R}}f(\tau)T(-\tau)(T(\omega)x_0-x_0)d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}}f(\tau)T(-\tau+\omega)x_0d\tau-$$

$$-fx_0=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(T(\omega)f\right)(u)T(-u)x_0du-fx_0=(T(\omega)f-f)x_0=0.$$

Если $\lambda_0\notin\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, рассмотрим $f\in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f}(\lambda_0)\neq0$. Тогда $\widehat{g}(\lambda_0)=(e^{i\lambda_0\omega}-1)\widehat{f}(\lambda_0)\neq0$ для $g=S(\omega)f-f\in L^1(\mathbb{R})$. Отсюда получаем, что найдена функция $g\in L^1(\mathbb{R})$ такая что $gx=(S(\omega)f-f)x=0$ и $\widehat{g}(\lambda_0)\neq0$. Из определения 4 следует, что $\lambda_0\notin\Lambda(x_0)$. Таким образом, доказано включение (3).

Достаточность. Пусть теперь для $\Lambda(x_0)$ выполнено (3). Рассмотрим вектор $y_0=T(\omega)x_0-x_0$. Если функция $f\in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\mathrm{supp}\widehat{f}$ — компакт, то из свойства 3 леммы 1 следует, что $\Lambda(fy_0)\subset supp\widehat{f}\cap\Lambda(y_0)\subset supp\widehat{f}\cap\Lambda(x_0)\subset supp\widehat{f}\cap\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ есть конечное множество вида $\left\{\frac{2\pi}{\omega}k_1,...,\frac{2\pi}{\omega}k_n\right\}$, $k_1,...,k_n\in\mathbb{Z}$.

Из доказательства теоремы 1 статьи [7] и теоремы 3.2.7 в [4] следует, что вектор fx_0 представим в виде $fx_0=x_1+...+x_n$, где $\Lambda(x_j)=\left\{\frac{2\pi}{\omega}k_j\right\}$, $T(t)x_j=e^{i\frac{2\pi}{\omega}k_jt}x_j,\ 1\leqslant j\leqslant n$.

Тогда $fy_0=f(T(\omega)x_0-x_0)=(T(\omega)-I)fx_0=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(e^{i2\pi k_j}-1\right)x_j=0$.

Поскольку множество функций из $L^1(\mathbb{R})$, имеющих преобразование Фурье с компактным носителем, плотно в $\mathcal{X}$, и $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathcal{X}$ невырожден (см. свойство 1 леммы 1), то $T(\omega)x_0-x_0=0$. Следовательно, $x_0\in\mathcal{X}_\omega$. □

3. МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СТЕПАНОВА

Определение 7. Функция $x\in S_c^p(\mathbb{R},X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $(S(t)x-x)\in S_0^p(\mathbb{R},X)$ для любого $t\in\mathbb{R}$.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x\in S_c^p(\mathbb{R},X)$ вида $x(t)=c+x_0(t),t\in\mathbb{R},$ где c – вектор из банахова пространства X и x_0 – любая функция из $S_0^p(\mathbb{R},X)$.

В теории дифференциальных уравнений (см. [10, р. 3.6.3]) использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.* Медленно меняющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов (см. [11]), в теории вероятности [12], а также в теории целых функций [13]. Они составляют часть класса регулярно растущих функций, которые впервые в 1925 году ввел в рассмотрение Р. Шмидт [14].

Определение 8. Функция $x \in S^p_c(\mathbb{R},X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$ *(ω-периодической на бесконечности)*, если $(S(\omega)x - x) \in S^p_0(\mathbb{R},X)$ или, что эквивалентно, $\lim_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\|_X = 0$.

Таким образом, каждая ω-периодическая на бесконечности функция x является решением разностного уравнения вида $x(t+\omega) - x(t) = y(t),\ t \in \mathbb{R}$, где $y \in S^p_0(\mathbb{R},X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода. В [15], [16] получены аналоги теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для непрерывных периодических на бесконечности функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье и с рядами Фурье, суммируемыми с весом. В работах [17], [18] изучаются вопросы гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций нескольких переменных. В [19] описан спектр алгебры непрерывных периодических на бесконечности функций, определенных на полуоси.

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из $S^p_c(\mathbb{R},X)$ обозначим через $S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$ и $S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ соответственно. Отметим,что они оба образуют линейные замкнутые подпространства банахова пространства $S^p_c(\mathbb{R},X)$. Таким образом, имеют место включения $S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R},X) \subset S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X) \subset S^p_c(\mathbb{R},X)$, при этом все указанные пространства инвариантны относительно операторов $S(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Символом $S^p_\omega(\mathbb{R},X)$ обозначим подпространство банахова пространства $S^p_c(\mathbb{R},X)$, состоящее из ω-периодических функций, т.е. функций $x \in S^p_c(\mathbb{R},X)$, для которых выполнено условие $S(\omega)x = x$.

Примерами периодических на бесконечности функций из $S^p_c(\mathbb{R},X)$ являются:

1) предельно периодические функции, т.е. функции $x : \mathbb{R} \to X$, представимые в виде $x = y + y_0$, где $y \in S^p_\omega(\mathbb{R},X)$, $y_0 \in S^p_0(\mathbb{R},X)$;

2) функция $\overline{x} \in S^p_c(\mathbb{R},X)$ такая, что она совпадает с $x \in S^p_\omega(\mathbb{R},X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\overline{x}(t)\|_X = 0$;

3) любая функция из $S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$;

4) любая функция $x \in S^p_c(\mathbb{R},X)$, представимая в виде $x = \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Далее введем определение рядов Фурье функций из $S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$.

Определение 9. *Каноническим рядом Фурье* функции $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ будем называть ряд вида
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},$$
где функции $x_n : \mathbb{R} \to X$, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами
$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau,\ t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$
и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R},X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, – обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции x.

Определение 10. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},$$

где y_n, $n \in \mathbb{Z}$, – такие функции из $S^p(\mathbb{R},X)$, для которых $y_n - x_n \in S^p_0(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (4).

Лемма 2. *Канонические коэффициенты Фурье x_n, $n \in \mathbb{Z}$, (определенные формулой (4)) являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т.е. $x_n \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Утверждение леммы следует из равенств $x_n(t+\omega) - x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (S(\omega)x - x)(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Непосредственно из определения 10 и леммы 2 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Получен следующий спектральный критерий периодичности на бесконечности функции из пространства Степанова:

Теорема 11. *Для того, чтобы функция $x \in S^p_c(\mathbb{R},X)$ была $\omega-$периодической на бесконечности (т.е. принадлежала пространству $S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение $\Lambda_{ess}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.*

Рассмотрим последовательность операторов (A_N) из $End\ S^p_c(\mathbb{R},X)$ следующего вида $A_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} S(k\omega)$, $N \geqslant 1$, причем $\|A_N\| = 1$, $N \geqslant 1$.

В статье получен критерий представимости периодической на бесконечности функции из пространства $S^p_c(\mathbb{R},X)$ в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций.

Теорема 12. *Для того, чтобы функция $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ была представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in S^p_\omega(\mathbb{R},X)$, $x_0 \in S^p_0(\mathbb{R},X)$, необходимо и достаточно, чтобы в $S^p_c(\mathbb{R},X)$ существовал $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x$.*

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = S^p_c(\mathbb{R},X)/S^p_0(\mathbb{R},X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y\in x+S^p_0(\mathbb{R},X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + S^p_0(\mathbb{R},X)$ – класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in S^p_c(\mathbb{R},X)$.

Отметим, что банахово пространство $\mathcal{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом $\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}$, $\widetilde{x},\widetilde{y} \in \mathcal{X}$.

В $\mathcal{X}$ действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$, действующая по правилу $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x} = S(t)x + S^p_0(\mathbb{R},X)$, $x \in S^p_c(\mathbb{R},X)$, $t \in \mathbb{R}$. Фактор-пространство $\mathcal{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля с помощью формулы $f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}d\tau$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$.

Подпространство $\mathcal{X}_{\omega,\infty} = S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)/S^p_0(\mathbb{R},X)$ является замкнутым подмодулем из $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$.

Непосредственно из определения представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ следует, что $\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$. Таким образом, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)\widetilde{x} : \mathbb{R} \to \mathcal{X}_{\omega,\infty}$, $\widetilde{x} \in \mathcal{X}_{\omega,\infty}$, является непрерывной ω-периодической функцией, т.е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{X}_{\omega,\infty})$. Следовательно, имеет место

Теорема 13. *Функция $x \in S^p_c(\mathbb{R},X)$ является ω-периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + S^p_0(\mathbb{R},X)$ является ω-периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S} \in End\ \mathcal{X}$.*

Доказательство теоремы 11. Поскольку фактор-пространство $\mathcal{X} = S^p_c(\mathbb{R},X)/S^p_0(\mathbb{R},X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})-$модулем, то непосредственно из определений 3 и 4 следует, что $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda_{ess}(x)$. Утверждение теоремы следует из теорем 6 и 13.

Доказательство теоремы 12. Необходимость. Пусть функция $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in S^p_\omega(\mathbb{R},X)$, $x_0 \in S^p_0(\mathbb{R},X)$. Тогда $A_N(x_1 + x_0) = x_1 + A_N x_0$, $N \geqslant 1$. Поскольку $x_0 \in S^p_0(\mathbb{R},X)$, то $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x_0 = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = x_1$.

Достаточность. Пусть для некоторой функции $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = y$. Покажем, что x представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in S^p_\omega(\mathbb{R},X)$, $x_0 \in S^p_0(\mathbb{R},X)$. В силу равенств

$$S(\omega)y - y = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S((k+1)\omega)x - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)x\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}(S(N\omega)x - x)\right) = 0$$

функция y является периодической, т.е. $y \in S^p_\omega(\mathbb{R},X)$, откуда вытекает, что $A_N y = y$ для любого $N \geqslant 1$. Обозначив $x - y = x_0 \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$, получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{N\to\infty} A_N x_0 = \lim_{N\to\infty} A_N(x - y) = \lim_{N\to\infty}(A_N x - y) = y - y = 0. \tag{5}$$

По функции x_0 построим класс $\widetilde{x_0} \in \mathcal{X}$, который в силу теоремы 13 является ω-периодическим вектором в пространстве $\mathcal{X} = S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)/S^p_0(\mathbb{R},X)$, т.е. $\widetilde{x_0} \in \mathcal{X}_\omega$. Наряду с операторами A_N, $N \geqslant 1$, рассмотрим последовательность операторов $(\widetilde{A_N})$, $N \geqslant 1$, из $End\ \mathcal{X}$ следующего вида $\widetilde{A_N} = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{S}(k\omega)$. Тогда $\widetilde{A_N}\widetilde{x_0} = \widetilde{x_0}$ для любого $N \geqslant 1$. С другой стороны, из (5) следует справедливость равенства $\lim\limits_{N\to\infty}\widetilde{A_N}\widetilde{x_0} = \widetilde{0}$, откуда непосредственно получаем, что $\widetilde{x_0} = \widetilde{0}$. А значит $x_0 \in S^p_0(\mathbb{R},X)$, т.е. функция x представима в виде $x = y + x_0$, где $y \in S^p_\omega(\mathbb{R},X)$, $x_0 \in S^p_0(\mathbb{R},X)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : МГУ, 1978. — 205 с.

2. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

3. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 3–68.

4. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // СМФН. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.

5. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3–54.

6. Баскаков, А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174–190.

7. Баскаков, А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 1978. — Т. 24, № 2. — С. 195–206.

8. Баскаков, А. Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе / А. Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. — 1979. — Т. 20, № 5. — С. 942–952.

9. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : ВГУ, 1987. — 165 с.

10. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 535 с.

11. Hardy, G. H. A theorem concerning trigonometrical series / G. H. Hardy // J. London Math. Soc. — 1928. — № 3. — P. 12–13.

12. Сенета, Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. — М. : Наука, 1985. — 144 с.

13. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : Гостехиздат, 1956. — 632 с.

14. Schmidt, M. R. Uber divergent Folgen und linear Mittelbildurgen / M. R. Schmidt // Math. Z. — 1925. — V. 22, № 1. — P. 89–152.

15. Струкова, И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 4. — С. 34–41.

16. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 186–198.

17. Струкова, И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 28–38.

18. Струкова, И. И. Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 98–111.

19. Струкова, И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы / И. И. Струкова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 161–165.

REFERENCES

1. Levitan B.M., Zhikov V.V. Almost periodic functions and differential equations. [Levitan B.M., Zhikov V.V. Pochti-periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya]. Moscow, 1978, 205 p.

2. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie linejnyx differencial'nyx uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyx operatorov i linejnyx otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

3. Baskakov A.G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. [Baskakov A.G. Spektral'nyj

analiz differencial'nyx operatorov s neogranichennymi operatornymi koe'fficientami, raznostnye otnosheniya i polugruppy raznostnyx otnoshenij]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2009, vol. 73, no. 2. pp. 3–68.

4. Baskakov A.G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Teoriya predstavlenij banaxovyx algebr, abelevyx grupp i polugrupp v spektral'nom analize linejnyx operatorov]. *SMFN — CMFD*, 2004, vol. 9, pp. 3–151.

5. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. [Baskakov A.G., Krishtal I.A. Garmonicheskij analiz kauzal'nyx operatorov i ix spektral'nye svojstva]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 3–54.

6. Baskakov A.G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. [Baskakov A.G. Garmonicheskij i spektral'nyj analiz operatorov s ogranichennymi stepenyami i ogranichennyx polugrupp operatorov na banaxovom prostranstve]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 174–190.

7. Baskakov A.G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. [Baskakov A.G. Spektral'nye kriterii pochti periodichnosti reshenij funkcional'nyx uravnenij]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1978, vol. 24, no. 2, pp. 195–206.

8. Baskakov A.G. Bernšteĭn-type inequalities in abstract harmonic analysis. [Baskakov A.G. Neravenstva bernshtejnovskogo tipa v abstraktnom garmonicheskom analize]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 942–952.

9. Baskakov A.G. Harmonic analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Garmonicheskij analiz linejnyx operatorov]. Voronezh: VSU, 1987, 165 p.

10. Daletsky Yu.L., Krein M.G. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. [Daletsky Yu.L., Krein M.G. Ustojchivost' reshenij differencial'nyx uravnenij v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1970, 535 p.

11. Hardy G.H. A theorem concerning trigonometrical series. Journal L. M. S., 1928, vol. 3, pp. 12–13.

12. Seneta E. Regularly varying functions. [Seneta E. Pravil'no menyayushhiesya funkcii]. Moscow: Nauka, 1985, 144 p.

13. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. [Levin B.Ya. Raspredelenie kornej celyx funkcij]. Moscow, 1956, 632 p.

14. Schmidt M.R. Uber divergent Folgen und linear Mittelbildurgen. Math. Z., 1925, vol. 22, no. 1, pp. 89–152.

15. Strukova I.I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. [Strukova I.I. Teorema Vinera dlya periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 4, pp. 34–41.

16. Strukova I.I. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. [Strukova I.I. O teoreme Vinera dlya periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 186–198.

17. Strukova I.I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. [Strukova I.I. O garmonicheskom analize periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 28–38.

18. Strukova I.I. Harmonic analysis of periodic vectors and functions periodic at infinity. [Strukova I.I. Garmonicheskij analiz periodicheskix vektorov i periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Vestn. NGU. Ser. matem., mex., inform. — Journal of Mathematical Sciences*, 2014,

vol. 14, no. 1, pp. 98–111.

19. Strukova I.I. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. [Strukova I.I. Spektry algebr medlenno menyayushhixsya i periodicheskix na beskonechnosti funkcij i banaxovy predely]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 161–165.

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Тел.: 8–904–212–77–49

Strukova Irina Igorevna, Ph.D., Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Tel.: 8–904–212–77–49