УДК 517.956.3

К УСЛОВИЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА В КВАДРАТУРАХ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Е. А. Созонтова

Елабужский институт Казанского федерального университета

Поступила в редакцию 24.03.2016 г.

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Гурса для трехмерной системы первого порядка. Целью исследования является отыскание достаточных условий разрешимости рассматриваемой задачи в квадратурах. Предлагается способ отыскания решения указанной задачи в явном виде, основанный на редукции рассматриваемой системы к уравнениям второго и третьего порядков. В результате исходная задача сводится к девяти более простым задачам: шести задачам Гурса для уравнения второго порядка и трем задачам Гурса для уравнения третьего порядка. Для каждой полученной задачи записываются достаточные условия ее разрешимости в квадратурах. Окончательные результаты в терминах коэффициентов исходной системы формулируются в 7 теоремах.

Ключевые слова: система первого порядка, задача Гурса, разрешимость в квадратурах.

THE CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THE GOURSAT PROBLEM IN QUADRATURES FOR THREE-DIMENSIONAL SYSTEM OF FIRST ORDER

E. A. Sozontova

Abstract. In this paper we consider the Goursat problem for three-dimensional system of the first order. The purpose is to find sufficient conditions of solvability of the considered problems in quadratures. The method of finding solutions to these problems in explicit calculation based on reduction of considered system to equations of the second order and third order is devised. As a result the initial problem is reduced to nine simpler problems: to six Goursat problems for equation of the second order and to three Goursat problems for equation of the third order. For each problem sufficient conditions for its solvability in quadratures is received. The final results in terms of the coefficients of the original system are formulated in seven theorems.

Keywords: system of the first order, the Goursat problem, solvability in quadratures.

В работах [1]–[8] с различных точек зрения и при различных r изучалась система

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}(x)u_k + f_i,\ i = \overline{1,r}. \tag{1}$$

В частности, в [5]–[7], [8, гл.4] для системы (1) при определенных r были исследованы варианты задачи Гурса: доказана однозначная разрешимость этой задачи, а для некоторых отдельных случаев ($r = 2$) получены достаточные условия разрешимости указанной задачи в явном виде [8, с. 180-191]. Целью нашего исследования является выделение случаев разрешимости задачи Гурса в квадратурах для трехмерной системы уравнений

$$\begin{cases} u_x + a_1 u + b_1 v + c_1 w = f_1, \\ v_y + a_2 u + b_2 v + c_2 w = f_2, \\ w_z + a_3 u + b_3 v + c_3 w = f_3. \end{cases} \tag{2}$$

Задача Гурса (задача Г). В области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z\}$ найти регулярное решение системы (2), удовлетворяющее условиям

$$u(x_0,y,z) = \varphi_1(y,z), \quad v(x,y_0,z) = \psi_1(x,z), \quad w(x,y,z_0) = \chi_1(x,y). \tag{3}$$

При этом предполагается, что $\varphi_1 \in C(\overline{X})$, $\psi_1 \in C(\overline{Y})$, $\chi_1 \in C(\overline{Z})$ (X, Y, Z − грани характеристического параллелепипеда D при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$). Гладкость коэффициентов системы (2) определяется включениями

$$a_i,\ b_i,\ c_i \in C(\overline{D}),\ (i = \overline{1{,}3}).$$

Известно [5], что данная задача является однозначно разрешимой.

1. Положим в (2)

$$c_1 \equiv c_2 \equiv 0. \tag{4}$$

Тогда задачу (2)–(3) можно разбить на две задачи

$$\begin{cases} u_x + a_1 u + b_1 v = f_1, \\ v_y + a_2 u + b_2 v = f_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$u(x_0,y,z) = \varphi_1(y,z), \quad v(x,y_0,z) = \psi_1(x,z). \tag{6}$$

$$w_z + a_3 u + b_3 v + c_3 w = f_3,\ w(x,y,z_0) = \chi_1(x,y). \tag{7}$$

Задачи (5)–(6) и (7) следует решать последовательно, начиная с первой из них. Решая задачу (5)–(6), найдем функции u, v (при этом z нужно считать параметром). Подставляя их в уравнение из (7) и считая x и y параметрами, найдем функцию w обычным интегрированием этого уравнения.

Перейдем к детальному исследованию задачи (5)–(6), которая, как известно [5], является однозначно разрешимой. Для отыскания условий разрешимости этой задачи в явном виде, воспользуемся возможностью редукции системы (5) к двум уравнениям вида

$$\Theta_{xy} + a\Theta_x + b\Theta_y + c\Theta = f, \tag{8}$$

которые получаются из рассматриваемой системы путем исключения одной из искомых функций. При выполнении неравенства

$$b_1 \neq 0 \tag{9}$$

приходим к (8) для $\Theta = u$ с коэффициентами

$$\begin{gathered} a = b_2 - (\ln b_1)_y,\ b = a_1,\ c = a_{1y} - a_1(\ln b_1)_y - b_1 a_2 + b_2 a_1, \\ f = b_2 f_1 - (\ln b_1)_y f_1 - b_1 f_2 + f_{1y}, \end{gathered} \tag{10}$$

а при

$$a_2 \neq 0 \tag{11}$$

приходим к (8) для $\Theta = v$ с коэффициентами

$$\begin{gathered} a = b_2,\ b = a_1 - (\ln a_2)_x,\ c = b_{2x} - b_2(\ln a_2)_x - a_2 b_1 + a_1 b_2, \\ f = a_1 f_2 - (\ln a_2)_x f_2 - a_2 f_1 + f_{2x}. \end{gathered} \tag{12}$$

Решение $u(x,y,z)$ первого уравнения, полученного при выполнении неравенства (9), влечет за собой возможность вычисления функции $v(x,y,z)$ из первого уравнения в (5). Аналогично при выполнении неравенства (11) по известному решению $v(x,y,z)$ из второго уравнения (5) определяется функция $u(x,y,z)$. Однако, для отыскания функций $\Theta = u$ и $\Theta = v$ из (8) условий (6) недостаточно: необходимо иметь еще значения

$$u(x,y_0,z) = \varphi_2(x,z), \quad v(x_0,y,z) = \psi_2(y,z), \tag{13}$$

которые можно найти из (5). Действительно, полагая в первом уравнении системы (5) $y = y_0$, а во втором – $x = x_0$, приходим к линейным уравнениям вида

$$\varphi'_{2x}(x,z) + a_1\varphi_2(x,z) = \Phi_1(x,z),\ \psi'_{2y}(y,z) + b_2\psi_2(y,z) = \Phi_2(y,z).$$

В силу условий (6) известны $\Phi_1(x,z)$, $\Phi_2(x,y)$ и начальные условия $\varphi_2(x_0,z)$, $\psi_2(y_0,z)$, поэтому вычисление $\varphi_2(x,z)$, $\psi_2(y,z)$ происходит путем непосредственного интегрирования полученных дифференциальных уравнений (z рассматривается как параметр). Понятно, что первые (вторые) соотношения в (6) и (13) есть граничные условия первой (второй) задачи Гурса для уравнения вида (8). При этом для нахождения решения задачи (5)–(6) достаточно построить решение хотя бы одной из указанных задач Гурса.

Известно [9, с.172], [8, с.14], что решения сформулированных задач Гурса записываются через соответствующие функции Римана, причем для последних имеются [8, с.15 – 16], [10]–[12] различные случаи их построения в явном виде. В только что указанных источниках обеспечивающие эти случаи условия представлены в терминах следующих соотношений:

$$\begin{gathered}
1)\ a_x + ab - c \equiv 0;\\
2)\ b_y + ab - c \equiv 0;\\
2)\ a_x \equiv b_y,\ c - a_x - ab \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;\\
4)\ b_y - a_x \equiv a_x + ab - c \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;\\
5)\ a_x - b_y \equiv b_y + ab - c \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;\\
6)\ ma_x - b_y \equiv mb_y - a_x \equiv (m-1)(ab - c);\\
7)\ \sigma = \tfrac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2},\ [s(x) + t(y)]s'(x)t'(y) \neq 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь ξ_k, $\eta_k \in C^1$ $(k = \overline{0,2})$, s, t, $m \in C^2$, причем m зависит только от одной из переменных (x,y) и не принимает значение 2. В остальном указанные функции произвольны: то есть в соответствующем классе должны найтись функции, при которых перечисленные соотношения выполняются. Коэффициенты a, b, c имеют гладкость, обеспечивающую возможность выполнения записанных формул. Классы гладкости задаются на замкнутых множествах определения соответствующих функций. Каждого из тождеств 1) – 2) и наборов 3) – 5) достаточно для получения явного вида функций Римана. Формулами же 6) – 7) следует пользоваться совместно: при выполнении набора 6) функцию Римана можно построить, когда левая часть хотя бы одного из соотношений 1), 2) имеет вид σ, указанный в 7). Для всех вариантов виды функций Римана можно найти в [4] – [6].

Применим теперь соотношения (14) к сформулированным задачам. Начнем с первой задачи Гурса (соответствующей условию (9)). Учитывая (10), получим

$$\begin{gathered}
1)\ b_{2x} + a_2b_1 - (\ln b_1)_{xy} - a_{1y} \equiv 0;\\
2)\ a_2 \equiv 0;\\
3)\ b_{2x} - a_{1y} - (\ln b_1)_{xy} \equiv 0,\\
(\ln b_1)_{xy} - a_2b_1 - b_{2x} + a_{1y} \equiv \xi_0(x,z)\eta_0(y,z) \neq 0;\\
4)\ a_{1y} - b_{2x} + (\ln b_1)_{xy} \equiv b_{2x} + a_2b_1 - (\ln b_1)_{xy} - a_{1y} \equiv \xi_1(x,z)\eta_1(y,z) \neq 0;\\
5)\ b_{2x} - a_{1y} - (\ln b_1)_{xy} \equiv a_2b_1 \equiv \xi_2(x,z)\eta_2(y,z) \neq 0;\\
6)\ m[b_{2x} - (\ln b_1)_{xy}] - a_{1y} \equiv ma_{1y} - b_{2x} + (\ln b_1)_{xy} \equiv (m-1)(a_2b_1 - a_{1y});\\
7)\ \sigma_k = \tfrac{2(s_k)'_x(x,z)(t_k)'_y(y,z)}{(2-m)[s_k(x,z)+t_k(y,z)]^2},\ (s_k + t_k)(s_k)'_x(t_k)'_y \neq 0,\ k = 1,2.
\end{gathered} \tag{15}$$

В последней строке нужно считать σ_1, σ_2 равными соответственно левым частям тождеств 1), 2) совокупности (15).

Для второй задачи Гурса (отвечающей неравенству (11)) с учетом (12) соотношения (14) запишутся в виде

$$\begin{gathered}1)\ b_1 \equiv 0;\\ 2)\ a_{1y} + a_2 b_1 - (\ln a_2)_{xy} - b_{2x} \equiv 0;\\ 3)\ b_{2x} - a_{1y} + (\ln a_2)_{xy} \equiv 0,\ a_2 b_1 \equiv \xi_3(x,z)\eta_3(y,z) \neq 0;\\ 4)\ a_{1y} - b_{2x} - (\ln a_2)_{xy} \equiv a_2 b_1 \equiv \xi_4(x,z)\eta_4(y,z) \neq 0;\\ 5)\ b_{2x} - a_{1y} + (\ln a_2)_{xy} \equiv a_{1y} - (\ln a_2)_{xy} - b_{2x} + a_2 b_1 \equiv \xi_5(x,z)\eta_5(y,z) \neq 0;\\ 6)\ m b_{2x} + (\ln a_2)_{xy} - a_{1y} \equiv m[a_{1y} - (\ln a_2)_{xy}] - b_{2x} \equiv (m-1)(a_2 b_1 - b_{2x});\\ 7)\ \sigma_k = \frac{2(s_k)'_x(x,z)(t_k)'_y(y,z)}{(2-m)[s_k(x,z)+t_k(y,z)]^2},\ (s_k+t_k)(s_k)'_x(t_k)'_y \neq 0,\ k=3,4,\end{gathered} \tag{16}$$

где σ_3, σ_4 равны соответственно левым частям тождеств 1), 2) совокупности (16).

Из проведенных в п.1 рассуждений вытекает справедливость следующих утверждений

Теорема 1. *Пусть при выполнении набора тождеств (4), неравенства (9) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (15), или существуют такие функции m, ξ_k, η_k ($k = \overline{0,2}$), s_k, t_k ($k = 1,2$) указанных выше классов, что для совокупности (15) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций σ_1, σ_2. Тогда задача Г разрешима в квадратурах.*

Теорема 2. *Если наряду с выполнением набора тождеств (4), неравенства (11) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (16), или существуют такие функции m, ξ_k, η_k ($k = \overline{3,5}$), s_k, t_k ($k = 3,4$) указанных выше классов, что для совокупности (16) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций σ_3, σ_4, то задача Г разрешима в квадратурах.*

2. Пусть теперь в (2)

$$a_2 \equiv a_3 \equiv 0. \tag{17}$$

Тогда задача (2)–(3) оказывается редуцированной к двум последовательно решаемым задачам

$$\begin{cases} v_y + b_2 v + c_2 w = f_2,\\ w_z + b_3 v + c_3 w = f_3,\end{cases} \tag{18}$$

$$v(x,y_0,z) = \psi_1(x,z), \quad w(x,y,z_0) = \chi_1(x,y). \tag{19}$$

$$u_x + a_1 u + b_1 v + c_1 w = f_1,\ u(x_0,y,z) = \varphi_1(y,z). \tag{20}$$

При решении задачи (18)–(19) x нужно считать параметром, а для задачи (20) в качестве параметров выступают y и z. Задача (18)–(19) аналогична задаче (4)–(5). Для отыскания условий разрешимости этой задачи в явном виде воспользуемся, как и в п.1, возможностью редукции системы (18) к двум уравнениям вида (8) (роль x, y играют соответственно y, z, а x считаем параметром). При выполнении неравенства

$$c_2 \neq 0 \tag{21}$$

приходим к (8) для $\Theta = v$ с коэффициентами

$$\begin{gathered}a = c_3 - (\ln c_2)_z,\ b = b_2,\ c = b_{2z} - b_2(\ln c_2)_z - b_3 c_2 + b_2 c_3,\\ f = c_3 f_2 - (\ln c_2)_z f_2 - c_2 f_3 + f_{2z},\end{gathered}$$

а при
$$b_3 \neq 0 \tag{22}$$
приходим к (8) для $\Theta = w$ с коэффициентами
$$a = c_3,\ b = b_2 - (\ln b_3)_y,\ c = c_{3y} - c_3(\ln b_3)_y - b_3c_2 + b_2c_3,$$
$$f = b_2f_3 - (\ln b_3)_y f_3 - b_3f_2 + f_{3y}.$$

При этом для отыскания функций $\Theta = v$ и $\Theta = w$ из (8), к условиям (19) необходимо добавить значения
$$v(x,y,z_0) = \psi_3(x,y), \quad w(x,y_0,z) = \chi_2(x,z), \tag{23}$$
которые можно найти из (18) аналогично тому, как мы искали $\varphi_2(x,z)$, $\psi_2(y,z)$ в п.1. Таким образом, первые (вторые) соотношения в (19) и (23) являются граничными условиями первой (второй) задачи Гурса для уравнения вида (8). Условия, обеспечивающие разрешимость полученных задач Гурса в квадратурах, записываются в терминах соотношений (14). Для первой задачи Гурса (связанной с неравенством (21)) эти соотношения запишутся в виде
$$\begin{gathered}
1)\ c_{3y} + b_3c_2 - (\ln c_2)_{yz} - b_{2z} \equiv 0;\\
2)\ b_3 \equiv 0;\\
3)\ c_{3y} - b_{2z} - (\ln c_2)_{yz} \equiv 0,\ (\ln c_2)_{yz} - b_3c_2 - c_{3y} + b_{2z} \equiv \xi_0(x,y)\eta_0(x,z) \neq 0;\\
4)\ b_{2z} - c_{3y} + (\ln c_2)_{yz} \equiv c_{3y} + b_3c_2 - (\ln c_2)_{yz} - b_{2z} \equiv \xi_1(x,y)\eta_1(x,z) \neq 0;\\
5)\ c_{3y} - b_{2z} - (\ln c_2)_{yz} \equiv b_3c_2 \equiv \xi_2(x,y)\eta_2(x,z) \neq 0;\\
6)\ m[c_{3y} - (\ln c_2)_{yz}] - b_{2z} \equiv mb_{2z} - c_{3y} + (\ln c_2)_{yz} \equiv (m-1)(b_3c_2 - b_{2z});\\
7)\ \sigma_k = \frac{2(s_k)'_y(x,y)(t_k)'_z(x,z)}{(2-m)[s_k(x,y)+t_k(x,z)]^2},\ (s_k+t_k)(s_k)'_y(t_k)'_z \neq 0,\ k = 1{,}2.
\end{gathered} \tag{24}$$
В последней строке нужно считать σ_1, σ_2 равными соответственно левым частям тождеств 1), 2) совокупности (24).

Для второй задачи Гурса (отвечающей неравенству (22)) соотношения (14) принимают вид
$$\begin{gathered}
1)\ c_2 \equiv 0;\\
2)\ b_{2z} + b_3c_2 - (\ln b_3)_{yz} - c_{3y} \equiv 0;\\
3)\ c_{3y} - b_{2z} + (\ln b_3)_{yz} \equiv 0,\ b_3c_2 \equiv \xi_3(x,y)\eta_3(x,z) \neq 0;\\
4)\ b_{2z} - c_{3y} - (\ln b_3)_{yz} \equiv b_3c_2 \equiv \xi_4(x,y)\eta_4(x,z) \neq 0;\\
5)\ c_{3y} - b_{2z} + (\ln b_3)_{yz} \equiv b_{2z} - (\ln b_3)_{yz} - c_{3y} + b_3c_2 \equiv \xi_5(x,y)\eta_5(x,z) \neq 0;\\
6)\ mc_{3y} + (\ln b_3)_{yz} - b_{2z} \equiv m[b_{2z} - (\ln b_3)_{yz}] - c_{3y} \equiv (m-1)(b_3c_2 - c_{3y});\\
7)\ \sigma_k = \frac{2(s_k)'_y(x,y)(t_k)'_z(x,z)}{(2-m)[s_k(x,y)+t_k(x,z)]^2},\ (s_k+t_k)(s_k)'_y(t_k)'_z \neq 0,\ k = 3{,}4,
\end{gathered} \tag{25}$$
где σ_3, σ_4 равны соответственно левым частям тождеств 1), 2) совокупности (25). Тогда справедливы

Теорема 3. *Пусть при выполнении набора тождеств (17), неравенства (21) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (24), или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k $(k = \overline{0{,}2})$, s_k, t_k $(k = 1{,}2)$ *указанных выше классов, что для совокупности (24) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций* σ_1, σ_2. *Тогда задача Г разрешима в квадратурах.*

Теорема 4. *Если наряду с выполнением набора тождеств (17), неравенства (22) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (25), или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k $(k = \overline{3{,}5})$, s_k, t_k $(k = 3{,}4)$ *указанных выше классов, что для совокупности (25) либо* *выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций σ_3, σ_4, то задача Г разрешима в квадратурах.*

3. Положим теперь в (2)

$$b_1 \equiv b_3 \equiv 0. \tag{26}$$

Тогда задачу (2)–(3) можно разбить на две задачи

$$\begin{cases} u_x + a_1 u + c_1 w = f_1, \\ w_z + a_3 u + c_3 w = f_3, \end{cases} \tag{27}$$

$$u(x_0,y,z) = \varphi_1(y,z), \quad w(x,y,z_0) = \chi_1(x,y). \tag{28}$$

$$v_y + a_2 u + b_2 v + c_2 w = f_2, \; v(x,y_0,z) = \psi_1(x,z). \tag{29}$$

При нахождении функций u, w из (27)–(28) нужно считать y параметром, а при решении задачи (29) в качестве параметров выступают x и z. Задача (27)–(28) аналогична задачам (4)–(5) и (18)–(19). Рассуждая также, как и в п.1 и п.2, приходим к тому, что при выполнении неравенства

$$c_1 \neq 0 \tag{30}$$

получаем соотношения

$$\begin{gathered}
1)\; c_{3x} + a_3 c_1 - (\ln c_1)_{xz} - a_{1z} \equiv 0; \\
2)\; a_3 \equiv 0; \\
3)\; c_{3x} - a_{1z} - (\ln c_1)_{xz} \equiv 0, \\
(\ln c_1)_{xz} - a_3 c_1 - c_{3x} + a_{1z} \equiv \xi_0(x,y)\eta_0(y,z) \neq 0; \\
4)\; a_{1z} - c_{3x} + (\ln c_1)_{xz} \equiv c_{3x} + a_3 c_1 - (\ln c_1)_{xz} - a_{1z} \equiv \xi_1(x,y)\eta_1(y,z) \neq 0; \\
5)\; c_{3x} - a_{1z} - (\ln c_1)_{xz} \equiv a_3 c_1 \equiv \xi_2(x,y)\eta_2(y,z) \neq 0; \\
6)\; m[c_{3x} - (\ln c_1)_{xz}] - a_{1z} \equiv m a_{1z} - c_{3x} + (\ln c_1)_{xz} \equiv (m-1)(a_3 c_1 - a_{1z}); \\
7)\; \sigma_k = \frac{2(s_k)'_x(x,y)(t_k)'_z(y,z)}{(2-m)[s_k(x,y)+t_k(y,z)]^2},\; (s_k + t_k)(s_k)'_x(t_k)'_z \neq 0,\; k = 1{,}2,
\end{gathered} \tag{31}$$

а при

$$a_3 \neq 0 \tag{32}$$

имеем

$$\begin{gathered}
1)\; c_1 \equiv 0; \\
2)\; a_{1z} + a_3 c_1 - (\ln a_3)_{xz} - c_{3x} \equiv 0; \\
3)\; c_{3x} - a_{1z} + (\ln a_3)_{xz} \equiv 0,\; a_3 c_1 \equiv \xi_3(x,y)\eta_3(y,z) \neq 0; \\
4)\; a_{1z} - c_{3x} - (\ln a_3)_{xz} \equiv a_3 c_1 \equiv \xi_4(x,y)\eta_4(y,z) \neq 0; \\
5)\; c_{3x} - a_{1z} + (\ln a_3)_{xz} \equiv a_{1z} - (\ln a_3)_{xz} - c_{3x} + a_3 c_1 \equiv \xi_5(x,y)\eta_5(y,z) \neq 0; \\
6)\; m c_{3x} + (\ln a_3)_{xz} - a_{1z} \equiv m[a_{1z} - (\ln a_3)_{xz}] - c_{3x} \equiv (m-1)(a_3 c_1 - c_{3x}); \\
7)\; \sigma_k = \frac{2(s_k)'_x(x,y)(t_k)'_z(y,z)}{(2-m)[s_k(x,y)+t_k(y,z)]^2},\; (s_k + t_k)(s_k)'_x(t_k)'_z \neq 0,\; k = 3{,}4.
\end{gathered} \tag{33}$$

Итак, справедливы

Теорема 5. *Пусть при выполнении набора тождеств (26), неравенства (30) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (31), или существуют такие функции m, ξ_k, η_k ($k = \overline{0{,}2}$), s_k, t_k ($k = 1{,}2$) указанных выше классов, что для совокупности (31) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций σ_1, σ_2. Тогда задача Г разрешима в квадратурах.*

Теорема 6. *Если наряду с выполнением набора тождеств (26), неравенства (32) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (33), или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k $(k=\overline{3{,}5})$, s_k, t_k $(k=3{,}4)$ *указанных выше классов, что для совокупности (33) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций* σ_3, σ_4, *то задача Г разрешима в квадратурах.*

4. Наконец, пусть для системы (2) выполняется условие

$$c_1 \equiv a_2 \equiv b_3 \equiv 0 \tag{34}$$

Применим к полученной системе подстановки вида

$$u = U\exp(-a_1x), \quad v = V\exp(-b_2y), \;\; w = W\exp(-c_3z). \tag{35}$$

В итоге получим систему

$$\begin{cases} U_x = \beta V + F_1, \\ V_y = \gamma W + F_2, \\ W_z = \alpha U + F_3, \end{cases} \tag{36}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha = -a_3\exp(c_3z - a_1x),\, \beta = -b_1\exp(a_1x - b_2y),\, \gamma = -c_2\exp(b_2y - c_3z), \\ F_1 = f_1\exp(a_1x),\, F_2 = f_2\exp(b_2y),\, F_3 = f_3\exp(c_3z). \end{gathered} \tag{37}$$

При этом условия (2) переходят в условия вида

$$\begin{gathered} U(x_0,y,z) = \varphi_1(y,z)\exp(a_1x_0), \quad V(x,y_0,z) = \psi_1(x,z)\exp(b_2y_0), \\ W(x,y,z_0) = \chi_1(x,y)\exp(c_3z_0). \end{gathered} \tag{38}$$

Далее воспользуемся возможностью редукции системы (36) к уравнению вида

$$\Theta_{xyz} + a\Theta_{xy} + b\Theta_{yz} + c\Theta_{xz} + d\Theta_x + e\Theta_y + f\Theta_z + g\Theta = \Phi. \tag{39}$$

При выполнении неравенства $\beta\gamma \neq 0$, эквивалентного в силу (37)

$$b_1c_2 \neq 0, \tag{40}$$

исключая из системы (36) функции V, W, приходим к (39) для $\Theta = U$. Нетрудно убедиться, что коэффициенты уравнения даются формулами

$$\begin{gathered} b \equiv e \equiv f \equiv 0, \; -a = (\ln(\beta\gamma))_z, \; -c = (\ln\beta)_y, \\ -d = (\ln\beta)_{yz} - (\ln\beta)_y[\ln(\beta\gamma)]_z, \; -g = \alpha\beta\gamma, \\ \Phi = \beta\gamma F_3 + (\beta F_2)_z - ((\ln\beta)_y F_1)_z + \\ +[\ln(\beta\gamma)]_z(-F_2\beta + F_1(\ln\beta)_y - (F_1)_y) + (F_1)_{yz}. \end{gathered} \tag{41}$$

Однако, для отыскания $\Theta = U$ из (39) первого условия из (38) недостаточно: нужно иметь еще значения

$$U(x,y_0,z) = \varphi_2(x,z), \quad U(x,y,z_0) = \varphi_3(x,y). \tag{42}$$

Они могут быть найдены из (36). Действительно, полагая в первом уравнении системы (36) сначала $y = y_0$, а потом $z = z_0$, приходим к линейным уравнениям вида

$$\varphi'_{2x}(x,z) = \Phi_1(x,z),\, \varphi'_{3x}(x,y) = \Phi_2(x,y).$$

В силу условий (38) известны $\Phi_1(x,z)$, $\Phi_2(x,y)$ и начальные условия $\varphi_2(x_0,z)$, $\varphi_3(x_0,y)$, поэтому вычисление $\varphi_2(x,z)$, $\varphi_3(x,y)$ происходит путем непосредственного интегрирования полученных дифференциальных уравнений, причем, при нахождении $\varphi_2(x,z)$ z рассматривается как параметр, а при решении второго уравнения в качестве параметра выступает y . Таким образом, первое соотношение в (38) и соотношения (42) есть граничные условия задачи Гурса для уравнения вида (39) при $\Theta = U$.

Аналогично, при выполнении неравенства $\alpha\gamma \neq 0$, равносильного вследствие (37)

$$a_3 c_2 \neq 0, \tag{43}$$

приходим к (39) для $\Theta = V$ с коэффициентами

$$\begin{gathered} c \equiv d \equiv f \equiv 0, \; -a = (\ln\gamma)_z, \; -b = (\ln(\alpha\gamma))_x, \\ -e = (\ln\gamma)_{xz} - (\ln\gamma)_z[\ln(\alpha\gamma)]_x, \; -g = \alpha\beta\gamma, \\ \Phi = \alpha\gamma F_1 + (\gamma F_3)_x - ((\ln\gamma)_z F_2)_x + \\ +[\ln(\alpha\gamma)]_x(-F_3\gamma + F_2(\ln\gamma)_z - (F_2)_z) + (F_2)_{xz}. \end{gathered} \tag{44}$$

Кроме того, к условию $V(x,y_0,z) = \psi_1(x,z)\exp(\beta_2 y_0)$ необходимо добавить граничные значения $V(x_0,y,z) = \psi_2(y,z)$, $V(x,y,z_0) = \psi_3(x,y)$, которые могут быть найдены из второго уравнения системы (36).

Наконец, в случае, когда $\alpha\beta \neq 0$, что равносильно в связи с (37)

$$a_3 b_1 \neq 0, \tag{45}$$

приходим к (39) для $\Theta = W$ с коэффициентами

$$\begin{gathered} a \equiv d \equiv e \equiv 0, \; -b = (\ln\alpha)_x, \; -c = (\ln(\alpha\beta))_y, \\ -f = (\ln\alpha)_{xy} - (\ln\alpha)_x[\ln(\alpha\beta)]_y, \; -g = \alpha\beta\gamma, \\ \Phi = \alpha\beta F_2 + (\alpha F_1)_y - ((\ln\alpha)_x F_3)_y + \\ +[\ln(\alpha\beta)]_y(-F_1\alpha + F_3(\ln\alpha)_x - (F_3)_x) + (F_3)_{xy} \end{gathered} \tag{46}$$

и граничными условиями $W(x_0,y,z) = \chi_1(y,z)\exp(\gamma_3 z)$, $W(x,y_0,z) = \chi_2(x,z)$, $W(x,y,z_0) = \chi_3(x,y)$.

Таким образом, задача (2)–(3) редуцирована к трем задачам Гурса для уравнения вида (39). Известно [8, с. 26 – 28], что решения сформулированных задач Гурса записываются через соответствующие функции Римана, причем для последних имеются [8, с.36 – 46] различные случаи их построения в явном виде. Важную роль в обозначенной выше работе играют конструкции

$$\begin{gathered} h_1 = a_x + ab - e, \; h_2 = a_y + ac - d, \; h_3 = b_y + bc - f, \\ h_4 = b_z + ab - e, \; h_5 = c_x + bc - f, \; h_6 = c_z + ac - d, \\ h_7 = d_x + bd - g, \; h_8 = e_y + ce - g, \; h_9 = f_z + af - g \end{gathered}$$

и условия

$$\begin{gathered} 1.\; h_1 \equiv h_2 \equiv h_5 \equiv 0,\; h_7 \in M; \quad 2.\; h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv 0,\; h_8 \in M; \\ 3.\; h_4 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0,\; h_9 \in M; \quad 4.\; h_1 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0,\; h_7 \in M; \\ 5.\; h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 0,\; h_8 \in M; \quad 6.\; h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv 0,\; h_9 \in M; \\ 7.\; a = \lambda(z) + \delta xy, \;\; b = \mu(x) + \delta yz, \;\; c = \nu(y) + \delta xz,\; \delta = const, \end{gathered} \tag{47}$$

где M – класс функций вида $m_1(x)m_2(y)m_3(z)$. Каждого из условий 1 – 6 совместно с условием 7 достаточно для получения явного вида функции Римана. Используя формулы (37), (41), (44), (46), запишем соотношения (47) через коэффициенты системы (2). Для первой задачи

Гурса (при $\theta = U$) имеем

$$\begin{gathered}
1.\ [\ln(b_1c_2)]_{xz} + (a_1x - c_3z)_{xz} \equiv (\ln c_2)_{yz} + (b_2y - c_3z)_{yz} \equiv \\
\equiv (\ln b_1)_{xy} + (a_1x - b_2y)_{xy} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
2.\ (\ln c_2)_{yz} + (b_2y - c_3z)_{yz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
3.\ (\ln b_1)_{xy} + (a_1x - b_2y)_{xy} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
4.\ [\ln(b_1c_2)]_{xz} + (a_1x - c_3z)_{xz} \equiv (\ln b_1)_{xy} + (a_1x - b_2y)_{xy} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
5.\ [\ln(b_1c_2)]_{xz} + (a_1x - c_3z)_{xz} \equiv (\ln c_2)_{yz} + (b_2y - c_3z)_{yz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
6.\ a_3b_1c_2 \in M; \\
7.\ a = \lambda(z), \quad c = \nu(y),
\end{gathered} \tag{48}$$

где

$$-a = [\ln(b_1c_2)]_z + (a_1x - c_3z)_z,\ -c = (\ln b_1)_y + (a_1x - b_2y)_y.$$

При $\Theta = V$ условия (47) принимают вид

$$\begin{gathered}
1.\ (\ln c_2)_{yz} + (b_2y - c_3z)_{yz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
2.\ (\ln c_2)_{yz} + (b_2y - c_3z)_{yz} \equiv [\ln(a_3c_2)]_{xy} + (b_2y - a_1x)_{xy} \equiv \\
\equiv (\ln a_3)_{xz} + (c_3z - a_1x)_{xz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
3. (\ln a_3)_{xz} + (c_3z - a_1x)_{xz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
4.\ a_3b_1c_2 \in M; \\
5. (\ln c_2)_{yz} + (b_2y - c_3z)_{yz} \equiv [\ln(a_3c_2)]_{xy} + (b_2y - a_1x)_{xy} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
6.\ [\ln(a_3c_2)]_{xy} + (b_2y - a_1x)_{xy} \equiv (\ln a_3)_{xz} + (c_3z - a_1x)_{xz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
7.\ a = \lambda(z), \quad b = \mu(x),
\end{gathered} \tag{49}$$

где

$$-a = (\ln c_2)_z + (b_2y - c_3z)_z,\ -b = [\ln(a_3c_2)]_x + (b_2y - a_1x)_x.$$

В случае, когда $\Theta = W$, получаем

$$\begin{gathered}
1.\ (\ln b_1)_{xy} + (a_1x - b_2y)_{xy} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
2. (\ln a_3)_{xz} + (c_3z - a_1x)_{xz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
3. (\ln a_3)_{xz} + (c_3z - a_1x)_{xz} \equiv (\ln b_1)_{xy} + (a_1x - b_2y)_{xy} \equiv \\
\equiv [\ln(a_3b_1)]_{yz} + (c_3z - b_2y)_{yz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
4.\ (\ln b_1)_{xy} + (a_1x - b_2y)_{xy} \equiv [\ln(a_3b_1)]_{yz} + (c_3z - b_2y)_{yz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
5.\ a_3b_1c_2 \in M; \\
6.\ (\ln a_3)_{xz} + (c_3z - a_1x)_{xz} \equiv [\ln(a_3b_1)]_{yz} + (c_3z - b_2y)_{yz} \equiv 0,\ a_3b_1c_2 \in M; \\
7.\ b = \mu(x), \quad c = \nu(y),
\end{gathered} \tag{50}$$

где

$$-b = (\ln a_3)_x + (c_3z - a_1x)_x,\ -c = [\ln(a_3b_1)]_y + (c_3z - b_2y)_y.$$

Таким образом, из проведенных в п.4 рассуждений вытекает

Теорема 7. *Пусть при выполнении набора тождеств (34):*
– или выполняется неравенство (40) и одно из условий 1 – 6 совокупности (48) совместно с условием 7 из той же совокупности;
– или выполняется неравенство (43) и одно из условий 1 – 6 совокупности (49) совместно с условием 7 из (49) ;
– или выполняется неравенство (45) и одно из условий 1 – 6 совокупности (50) совместно с условием 7 из той же совокупности .
Тогда задача Г разрешима в квадратурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плещинская, И. Е. Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными / И. Е. Плещинская // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 9. — С. 1634–1637.

2. Зомот, Н. Х. Х. Общая линейная характеристическая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка : дисс.. . . канд. физ.-мат. наук. — Казань, 1998. — 113 с.

3. Жегалов, В. И. Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений / В. И. Жегалов // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 8. — С. 70–72.

4. Созонтова, Е. А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа / Е. А. Созонтова // Изв. вузов. Матем. — 2013. — № 10. — С. 43–54.

5. Чекмарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными / Чекмарев Т. В. // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1614–1622.

6. Бицадзе, А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе // Матем. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 6. — С. 22–31.

7. Чекмарев Т.В. Системы уравнений смешанного типа / Т. В. Чекмарев. — Нижний Новгород : Нижегородский гос. техн. ун-т, 1995. — 199 с.

8. Жегалов, В. И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов. — Казань, 2001. — 226 с.

9. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. — М. : Наука, 1982. — 336 с.

10. Жегалов, В. И. К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций / В. И. Жегалов // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 2002. — С. 73–79.

11. Жегалов, В. И. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах / В. И. Жегалов, И. М. Сарварова // Изв. вузов. Математика. — 2013. — № 3. — С. 68–73.

12. Жегалов, В. И. Условия разрешимости одной системы интегральных уравнений в квадратурах / В. И. Жегалов, Е. А. Созонтова // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 958–961.

REFERENCES

1. Pleshchinskaya I.E. On the equivalence of some classes of elliptic and hyperbolic systems of first order equations and second order partial differential equations. [Pleshhinskaya I.E. Ob e'kvivalentnosti nekotoryx klassov e'llipticheskix i giperbolicheskix sistem pervogo poryadka i uravnenij vtorogo poryadka s chastnymi proizvodnymi]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1987, vol. 23. no 9, pp. 1634–1637.

2. Zomot N.H.H. General linear characteristic problem for the system of equations of the first order. [Zomot N.X.X. Obshhaya linejnaya xarakteristicheskaya zadacha dlya sistemy uravnenij v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. Dis.. . . cand. Fiz.-mat. Sciences, Kazan, 1998, 113 p.

3. Zhegalov V.I. A problem with normal derivatives in boundary conditions for a system of differential equations. [Zhegalov V.I. Zadacha s normal'nymi proizvodnymi v granichnyx usloviyax dlya sistemy differencial'nyx uravnenij]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2013, no. 8, pp. 70–72.

4. Sozontova E. A. Characteristic problems with normal derivatives for hyperbolic systems.

[Sozontova E.A. O xarakteristicheskix zadachax s normal'nymi proizvodnymi dlya sistemy giperbolicheskogo tipa]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2013, no. 10, pp. 43–54.

5. Chekmarev T.V. Formula of solution of the Goursat problem for one linear system of partial derivatives. [Chekmarev T.V. Formuly resheniya zadachi Gursa dlya odnoj linejnoj sistemy uravnenij s chastnymi proizvodnymi]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1982, vol. 18. no 9, pp. 1614–1622.

6. Bitsadze A.V. Structural properties of solutions of hyperbolic systems of first-order partial differential equations. [Bicadze A.V. O strukturnyh svojstvah reshenij giperbolicheskih sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh]. *Matem. modelirovanie — Mathem. modeling*, 1994, vol. 6, no. 6, pp. 22–31.

7. Chekmarev V.T. System of equations of mixed type. [Chekmarev T.V. Sistemy uravnenij smeshannogo tipa]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod state technical university, 1995, 199 p.

8. Zhegalov V.I., Mironov A.N. Differential equations with leading partial derivatives. [Zhegalov V.I., Mironov A. N. Differencial'nye uravneniya so starshimi chastnymi proizvodnymi]. Kazan, 2001, 226 p.

9. Bitsadze A.V. Equations of mathematical physics. [Bicadze A.V. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1982, 336 p.

10. Zhegalov V.I. A remark on cases of solvability of hyperbolic equations in terms of special functions. [Zhegalov V.I. K sluchayam razreshimosti giperbolicheskih uravnenij v terminah special'nyh funkcij]. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoi fiziki — Nonclassical equations of mathematical physics*, Novosibirsk, 2002, pp. 73–79.

11. Zhegalov V.I., Sarvarova I.M. Solvability of the Goursat problem by quadratures. [Zhegalov V.I., Sarvarova I.M. K usloviyam razreshimosti zadachi Gursa v kvadraturah]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2013, no. 3, pp. 68–73.

12. Zhegalov V.I., Sozontova E.A. Conditions for the solvability of a system of integral equations by quadratures. [Zhegalov V.I., Sozontova E.A. Usloviya razreshimosti odnoj sistemy integral'nyh uravnenij v kvadraturah]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2015, vol. 51. no. 7, pp. 958–961.

Созонтова Елена Александровна, ассистент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии ЕИ КФУ, Россия
E-mail: sozontova-elena@rambler.ru
Тел.: 89656246142

Sozontova Elena Aleksandrovna, Assistant lecturer, Chair of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Elabuga Institute of KFU, Russia
E-mail: sozontova-elena@rambler.ru
Tel.: 89656246142