УДК 517.9

ПЕРВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КОЛЕБАНИЙ НАПРЯЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРАХ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Е. В. Купцова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.02.2015 г.

Аннотация. В настоящей работе для электрического автогенератора на двух связанных контурах Ван-дер-Поля была разработана математическая модель в виде двух дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром. Для исследования нелинейной системы был использован метод усреднения Крылова – Боголюбова. Была получена усредненная система дифференциальных уравнений. После подробного исследования системы показывается, что существуют четыре ограниченных на всей числовой оси решения, а также находятся первые приближения по степеням малого параметра.

Ключевые слова: Электрический автогенератор, малый параметр, метод усреднения, ограниченные решения, двухчастотные колебания.

THE FIRST APPROXIMATIONS FOR VIBRATIONS OF TENSION IN THE VAN-DER-PAUL RELATING ELECTRIC CIRCUITS' SYSTEM

E. V. Kuptsova

Abstract. In the present paper for electric oscillator on two circuits van der Pol mathematical model in the form of two differential equations of second order with a small parameter. For serching the system was used the method of Krylov-Bogolybov. The avereged system of equations was recieved. It is shown that there are four bounded on the entire number axis solutions and are the first approximation in powers of the small parameter.

Keywords: Electric oscillator, small parameter, the method of averaging, limited solutions, dual-frequency oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

Электрические автогенераторы на одном контуре применяются при передаче информации в радио и телевидении и хорошо изучены, начиная с Ван-дер-Поля [1]. Автогенератор на двух связанных контурах изучен в меньшей степени [2, стр. 212]. Для приложений важно знать ответы на следующие вопросы: 1. Возможны ли в автогенераторе одночастотные или двухчастотные колебания напряжения? 2. Если возможны (при подходящем выборе физических параметров), то являются ли они устойчивыми? 3. Могут ли существовать несколько устойчивых ограниченных колебаний, имеющих свои области захвата? Как выбрать значения параметров, при которых в автогенераторе будут устойчивые колебания напряжения с заданными частотами?

При заданных значениях параметров ответы можно получить опытным путем или при помощи численных расчетов на компьютере. Однако такими методами невозможно перебрать все случаи. Здесь может помочь теоретическое исследование задачи. Мы будем использовать метод усреднения [3] исследования ограниченных решений дифференциальных уравнений с малым параметром.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОГЕНЕРАТОРА

Рассмотрим электрическую схему автогенератора на двух связанных контурах Ван-дер-Поля, представленную на рис. 1.

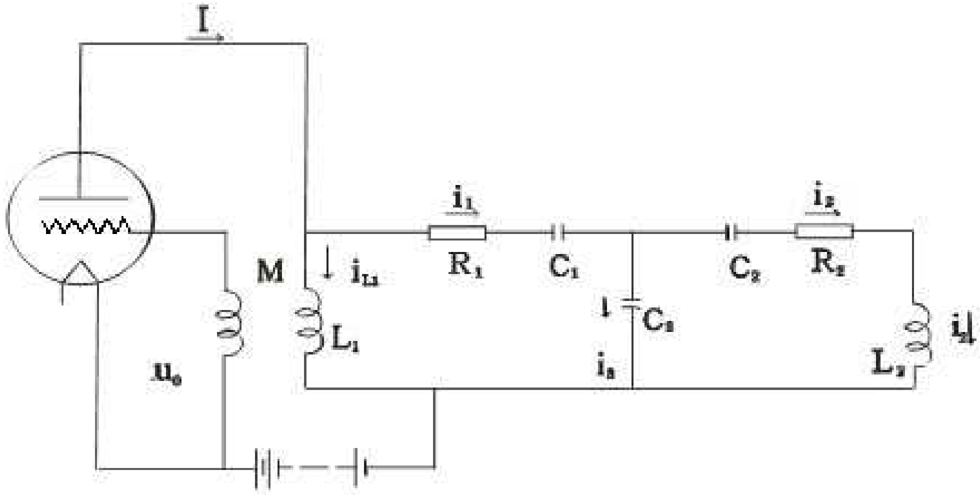

Рис. 1. *Здесь I — сила тока; u_0 — напряжение; R_1, R_2 — сопротивления; C_1, C_2, C_3 — емкости; L_1, L_2 — индуктивности.*

В схеме, изображенной на рис. 1, без ограничения общности вместо лампы может стоять транзистор.

Рассматривается следующая задача. Требуется определить такие значения параметров автогенератора, при которых в автогенераторе устанавливаются устойчивые колебания напряжения с заданными (несоизмеримыми) частотами $\omega_1 > \omega_2$.

Выпишем законы Кирхгофа для напряжений в контурах

$$\begin{cases} -u_{L_1} + u_{R_1} + u_{C_1} + u_{C_3} = 0, \\ -u_{C_3} + u_{C_2} + u_{R_2} + u_{L_2} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

и для токов в двух узлах

$$I - i_1 - i_{L_1} = 0, \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

где $u_{L_1} = L_1\frac{di_{L_1}}{dt}$, $u_{C_1} = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1 dt$, $u_{C_3} = \dfrac{1}{C_3}\displaystyle\int i_3 dt = \dfrac{1}{C_3}\displaystyle\int (I - i_{L_1} - i_2)\, dt$, $u_{R_1} = R_1 i_1$, $u_{C_2} = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2 dt$, $u_{R_2} = R_2 i_{L_2}$, $u_{L_2} = L_2\frac{di_{L_2}}{dt}$.

Первое из уравнений (1) запишем в виде

$$-L_1\frac{di_{L_1}}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1\, dt + \frac{1}{C_3}\int (I - i_{L_1} - i_2)\, dt = 0.$$

Пусть $u_1 = L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt}$, тогда уравнение принимает вид

$$-u_1 + R_1(I - i_1) + \frac{1}{C_1}\int (I - i_{L_1})\, dt + \frac{1}{C_3}\int (I - i_{L_1} - i_2)\, dt = 0.$$

Продифференцировав это уравнение по переменной t, получим

$$-\frac{du_1}{dt}-\frac{R_1}{L_1}u_1-\frac{i_{L_1}}{C_1}-\frac{i_{L_1}}{C_3}-\frac{i_{C_2}}{C_3}=-R_1\frac{dI}{dt}-\frac{I}{C_1}-\frac{I}{C_3}.$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+\frac{R_1}{L_1}\frac{du_1}{dt}+\frac{u_1}{C_1L_1}+\frac{u_1}{C_3L_1}+\frac{1}{C_3}\frac{di_{C_2}}{dt}=R_1\frac{d^2I}{dt^2}+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)\frac{dI}{dt}.$$

Введем безразмерное время $\tau=\frac{t}{\sqrt{L_1C_1}}$. Тогда $\frac{du_1}{dt}=u_1'\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$, $\frac{d^2u_1}{dt^2}=u_1''\frac{1}{L_1C_1}$, где штрихи обозначают производные по переменной τ. Уравнение принимает вид

$$u_1''\frac{1}{L_1C_1}+\frac{R_1}{L_1\sqrt{L_1C_1}}u_1'+\left(\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C_3}\right)+\frac{1}{C_3}i_{L_2}'\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}=\frac{R_1}{L_1C_1}I''+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)\frac{I'}{\sqrt{L_1C_1}},$$

или

$$u_1''+R_1u_1'\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\left(1+\frac{C_1}{C_3}\right)+\frac{\sqrt{L_1C_1}}{C_3}i_{L_2}'=R_1I''+\sqrt{L_1C_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)I'.$$

Пусть $k_2=\frac{C_1}{C_2}$, $k_3=\frac{C_1}{C_3}$, $\gamma=\frac{L_1C_1}{L_2C_2}$, $u_2=i_{L_2}'\frac{L_2}{\sqrt{L_1C_1}}$, тогда уравнение запишем в виде

$$u_1''+R_1u_1'\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+(1+k_3)u_1+\gamma\frac{k_3}{K_2}u_2=R_1I''+\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)I'. \qquad (2)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1)

$$u_2+R_2i_2+\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt=\frac{1}{C_3}\int(I-i_{L_1}-i_2)\,dt.$$

Дифференцируя это уравнение дважды, получаем

$$\frac{d^2u_2}{dt^2}+\frac{R_2}{L_2}\frac{du_2}{dt}+\frac{1}{L_2C_2}u_2+\frac{1}{L_1C_3}u_1+\frac{1}{L_2C_3}u_2=\frac{1}{C_3}\frac{dI}{dt}.$$

Перейдем к безразмерному времени τ, получим

$$u_2''+\frac{R_2\sqrt{L_1C_1}}{L_2}u_2'+\frac{L_1C_1}{L_2C_2}u_2+\frac{L_1C_1}{L_1C_3}u_1+\frac{L_1C_1}{L_2C_3}u_2=\frac{\sqrt{L_1C_1}}{C_3}I'.$$

Поскольку

$$\frac{R_2\sqrt{L_1C_1}}{L_2}=R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}},\ \frac{L_1C_1}{L_2C_2}+\frac{L_1C_1}{L_1C_3}=\gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right),\ \frac{\sqrt{L_1C_1}}{C_3}=\sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}},$$

то уравнение принимает вид

$$u_2''+R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}u_2'+\gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)u_2+k_3u_1=\sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}I'. \qquad (3)$$

2. ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Считаем, что сила тока I связана с напряжением u_1 соотношением (аппроксимация многочленом третьего порядка)

$$I=(s_0+\varepsilon)u_1+\varepsilon s_1u_1^2-\varepsilon s_2u_1^3,$$

где ε — малый положительный параметр. При этом $I' = (s_0 + \varepsilon + 2s_1\varepsilon u_1 - 3s_2\varepsilon u_1^2)u_1'$, $I'' = (2s_1\varepsilon - 6s_2\varepsilon u_1){u_1'}^2 + (s_0 + \varepsilon + 2s_1\varepsilon u_1 - 3s_2\varepsilon u_1^2)u_1''$.

Подставим эти выражения в уравнение (2), получим

$$\left(1 - R_1 s_0 - \varepsilon R_1\left(1 + 2s_1u_1 - 3s_2u_1^2\right)\right)u_1'' + \left(R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)s_0\right)u_1' + \\ + (1+k_3)u_1 + \frac{\gamma k_3}{k_2}u_2 = R_1\varepsilon(2s_1 - 6s_2u_1){u_1'}^2 + \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\varepsilon(2s_1u_1 - 3s_2u_1^2)u_1'.$$

Будем считать, что величиной $\varepsilon R_1\left(1 + 2s_1u_1 - 3s_2u_1^2\right)u_1''$ можно пренебречь. Введя обозначение $s_3 = (1 - R_1 s_0)^{-1}$, последнее уравнение запишем в виде

$$u_1'' + s_2\left(R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)s_0\right)u_1' + s_3(1+k_3)u_1 + \frac{s_3\gamma k_3}{k_2}u_2 = \\ = s_3(R_1\varepsilon(2s_1 - 6s_2u_1){u_1'}^2) + \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\varepsilon(2s_1u_1 - 3s_3u_1^2)u_1'. \quad (4)$$

Уравнение (3) записывается в виде

$$u_2'' + R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}u_2' - \sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}s_0u_1' + \gamma\left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right)u_2 + k_3u_1 = \varepsilon\sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}(2s_1u_1 - 3s_2u_1^2)u_1'. \quad (5)$$

Мы получили систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром (4), (5).

3. ПЕРЕХОД К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Мы намерены исследовать систему уравнений (4), (5) методом усреднения. Тогда эту систему сначала нужно привести к стандартному виду [3], а затем строить усредненную систему уравнений. Это можно сделать, приведя систему уравнений второго порядка (4), (5) к системе уравнений первого порядка, однако количество аналитических преобразований уменьшается, если перейти к дифференциальному уравнению четвертого порядка.

Введем обозначение $s_4 = \dfrac{k_2}{s_3\gamma_3}$. Выразим из уравнения (4) u_2

$$u_2 = s_4\left(s_3(R_1\varepsilon(2s_1 - 6s_2u_1){u_1'}^2) + \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\varepsilon(2s_1u_1 - 3s_2u_1^2)u_1'\right) - \\ - \left(u_1'' + s_3\left(R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)s_0\right)u_1' + s_3(1+k_3)u_1\right).$$

Найдем первую и вторую производные этого выражения и подставим в уравнение (5):

$$- s_4u_1^{(4)} - u_1^{(3)}\left[s_4s_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\,s_4\right] - \\ - u_1''\left[s_4s_3(1+k_3) + R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\,s_4s_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \gamma\left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right)s_4\right] +$$

$$
\begin{gathered}
+\, u_1' \left[-R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} s_4 s_3 (1+k_3) - s_4 s_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) - \sqrt{\frac{L_1}{C_3}} k_3 s_0 \right] + \\
+\, u_1 \left[k_3 - s_4 s_3 (1+k_3) \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) \right] = \sqrt{\frac{L_1}{C_3}} k_3 (2\varepsilon s_1 u_1 - 3\varepsilon s_2 u_1^2) u_1' - \\
-\, s_4 \left[-18\varepsilon s_2 s_3 R_1 {u_1'}^2 u_1'' + 2 s_3 R_1 \left\{ (2\varepsilon s_1 - 6\varepsilon s_2 u_1) \left({u_1''}^2 + u_1' u_1^{(3)} \right) - 6\varepsilon s_2 {u_1}^2 u_1'' \right\} - \right. \\
\left. - s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3) \left\{ -6\varepsilon s_2 {u_1'}^3 + 3(2\varepsilon s_1 - 6\varepsilon s_2 u_1) u_1' u_1'' + (s_0 + \varepsilon + 2 s_1 \varepsilon u_1 - 3\varepsilon s_2 u^2 1) u_1^{(3)} \right\} \right] - \\
-\, R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} s_4 \left[-6\varepsilon s_2 s_3 R_1 {u_1'}^3 + 2 s_3 R_1 (2\varepsilon s_1 - 6\varepsilon s_2 u_1) u_1' u_1'' + \right. \\
\left. +\, s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3) \left\{ (2\varepsilon s_1 - 6\varepsilon s_2 u_1) {u_1'}^2 + (s_0 + \varepsilon + 2\varepsilon s_1 u_1 - 3\varepsilon s_2 u_1^2) u_1'' \right\} \right] - \\
-\, \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) s_4 \left[s_3 u_1' \left(R_1 (\varepsilon s_1 - 6\varepsilon s_2 u_1) u_1' + \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3)(s_0 + \varepsilon + 2\varepsilon s_1 u_1 - 3\varepsilon s_2 u_1^2) \right) \right].
\end{gathered}
$$

После преобразований, получаем

$$
\begin{gathered}
u_1^{(4)} - u_1^{(3)} \left[s_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} + s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3) s_0 s_4^{-1} \right] + \\
+\, u_1'' \left[s_3 (1+k_3) + R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} s_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) - R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3) s_0 \right] + \\
+\, u_1' \left[R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} s_3 (1+k_3) + s_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) + \right. \\
\left. +\, \sqrt{\frac{L_1}{C_3}} k_3 s_0 s_4^{-1} - \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3) s_0 \right] + \\
+\, u_1 \left[-k_3 s_4^{-1} + s_3 (1+k_3) \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) \right] = -\varepsilon s_4^{-1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1} k_3} (2 s_1 u_1 - 3 s_2 u_1^2) u_1' + \\
+\, \varepsilon \left[-18 s_2 s_3 R_1 {u_1'}^2 u_1'' + 2 s_3 R_1 \left\{ (2 s_1 - 6 s_2 u_1) \left({u_1''}^2 + u_1' u_1^{(3)} \right) - 6 s_2 {u_1'}^2 u_1'' \right\} + \right. \\
\left. +\, s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3) s_4^{-1} \left\{ -6 s_2 {u_1'}^3 + 3(2 s_1 - 6 s_2 u_1) u_1' u_1'' + (1 + 2 s_1 u_1 - 3 s_2 u_1^2) u_1^{(3)} \right\} \right] + \\
+\, \varepsilon R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} \left[-\, 6 s_2 s_3 R_1 {u_1'}^3 + 2 s_3 R_1 (2 s_1 - 6 s_2 u_1) u_1' u_1'' + \right. \\
\left. + s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3) \left\{ (2 s_1 - 6 s_2 u_1) {u_1'}^2 + (1 + 2 s_1 u_1 - 3 s_2 u_1^2) u_1'' \right\} \right] + \\
+\, \varepsilon \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2} \right) \left[s_3 R_1 (2 s_1 - 6 s_2 u_1) {u_1'}^2 + s_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+k_3)(1 + 2 s_1 u_1 - 3 s_2 u_1^2) u_1' \right]. \qquad (6)
\end{gathered}
$$

4. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ СТАНДАРТНОГО ВИДА

Уравнение (6) имеет вид

$$u_1^{(4)} + a_1 u_1^{(3)} + a_2 u_1'' + a_3 u_1' + a_4 u_1 = \varepsilon f, \tag{7}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — заданные числа, ε — малый положительный параметр, $f = f(\tau, u_1, u_1', u_1'', u_1^{(3)})$ — известная функция.

Выпишем характеристический многочлен уравнения (7)

$$L(p) = p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4.$$

Лемма. Многочлен $L(p)$ с вещественными коэффициентами имеет корни $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, если и только если

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, a_4 = \omega_1^2\omega_2^2. \tag{8}$$

Доказательство. Действительно,

$$L(p) = (p - i\omega_1)(p + i\omega_1)(p - i\omega_2)(p + i\omega_2) = p^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)p^2 + \omega_1^2\omega_2^2.$$

Отсюда и следует утверждение.

Уравнение (7) запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} u_1' = \widetilde{u}_2, \\ \widetilde{u}_2' = u_3, \\ u_3' = u_4, \\ u_4' = -a_4 u_1 - a_3 \widetilde{u}_2 - a_2 u_3 - a_1 u_4 + \varepsilon f. \end{cases} \tag{9}$$

Теорема. При выполнении условий (8) замена переменных

$$\begin{cases} u_1 = \rho_1 \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2 \cos(\omega_2\tau - \varphi_2), \\ \widetilde{u}_2 = -\rho_1\omega_1 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) - \rho_2 2\omega_2 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2), \\ u_3 = -\rho_1\omega_1^2 \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) - \rho_2\omega_2^2 \cos(\omega_2\tau - \varphi_2), \\ u_4 = \rho_1\omega_1^3 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2\omega_2^3 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2), \end{cases} \tag{10}$$

где $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ — новые неизвестные функции приводит систему (9) к стандартному виду метода усреднения [3]

$$\begin{cases} \rho_1' = -\dfrac{\varepsilon f \sin(\omega_1\tau - \varphi_1)}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \\ \rho_2' = -\dfrac{\varepsilon f \sin(\omega_2\tau - \varphi_2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \\ \varphi_1' = -\dfrac{\varepsilon f \cos(\omega_1\tau - \varphi_1)}{\rho_1\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \\ \varphi_2' = -\dfrac{\varepsilon f \cos(\omega_2\tau - \varphi_2)}{\rho_2\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Сделав замену переменных (10) в системе (9), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \rho_1' \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2' \cos(\omega_2\tau - \varphi_2) + \varphi_1'\rho_1 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) + \varphi_2'\rho_2 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2) = 0, \\ -\rho_1'\omega_1 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) - \rho_2'\omega_2 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2) + \varphi_1'\rho_1\omega_1 \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \varphi_2'\rho_2\omega_2 \cos(\omega_2\tau - \varphi_2) = 0, \\ \rho_1'\omega_1^2 \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2'\omega_2^2 \cos(\omega_2\tau - \varphi_2) + \varphi_1'\rho_1\omega_1 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) + \varphi_2'\rho_2\omega_2^2 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2) = 0, \\ \rho_1'\omega_1^3 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2'\omega_2^3 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2) - \varphi_1'\rho_1\omega_1^3 \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) - \varphi_2'\rho_2\omega_2^3 \cos(\omega_2\tau - \varphi_2) = \varepsilon f. \end{cases}$$

Полученную систему решаем методом Крамера. Основной определитель системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \cos(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ -\omega_1\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & -\omega_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\omega_1\cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\omega_2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ \omega_1^2\cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \omega_2^2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ \omega_1^3\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \omega_2^3\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & -\rho_1\omega_1^3\cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \end{vmatrix}$$

Умножим первую строку определителя на $-\omega_1^2$ и прибавим к третьей строке, затем умножим вторую строку на ω_1^2 и прибавим к четвертой, получим

$$\Delta =$$
$$\begin{vmatrix} \cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \cos(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ -\omega_1\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & -\omega_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\omega_1\cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\omega_2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ 0 & (\omega_2^2-\omega_1^2)\cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & 0 & \rho_2(\omega_2^2-\omega_1^2)\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ 0 & (\omega_2^3-\omega_1^2\omega_2)\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & 0 & \rho_2\omega_2(-\omega_2^2+\omega_1^2)\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \end{vmatrix} =$$
$$= \rho_1\omega_1\rho_2\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2\sin(\omega_1\tau-\varphi_1).$$

Посчитаем Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ 0 & -\omega_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\omega_1\cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\omega_2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ 0 & \omega_2^2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2\sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ \varepsilon f & \omega_2^3\sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & -\rho_1\omega_1^3\cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3\cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \end{vmatrix} =$$
$$= \varepsilon f\rho_2\omega_2\rho_1(\omega_1^2-\omega_2)\sin(\omega_1 t-\varphi_1).$$

Тогда

$$\rho_1' = -\frac{\varepsilon f\sin(\omega_1\tau-\varphi_1)}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}.$$

Аналогично находим остальные уравнения системы (11). Теорема доказана.

5. УСРЕДНЕННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Из вида замен переменных (10) следует, что в первую очередь важно поведение амплитуд ρ_1, ρ_2, поэтому, построим усредненные уравнения для первых двух уравнений системы (11). Для этого подставим выражения (10) в первые два уравнения системы (11) и найдем средние значения по переменной t. Проводя преобразования, приходим к усредненной системе уравнений

$$\begin{cases} \dot\rho_1 = -\dfrac{\varepsilon\rho_1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left\{-\dfrac{3}{4}s_2 s_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}k_3}\left(\dfrac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2^2\right)+\right. \\ \quad +s_3 s_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\left(\dfrac{3}{8}s_2\rho_1^2\omega_1^2-\dfrac{1}{2}\omega_1^2+\dfrac{3}{4}s_2\rho_2^2\omega_1^2\right)+s_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}s_2\times \\ \quad \left.\times\left(\dfrac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\dfrac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}s_2\left(\dfrac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2^2\right)\right)\right\}, \\ \dot\rho_2 = -\dfrac{\varepsilon\rho_2}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left\{-\dfrac{3}{4}s_2 s_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}k_3}\left(\dfrac{1}{2}\rho_2^2+\rho_1^2\right)+s_3 s_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\times\right. \\ \quad \times\left(\dfrac{3}{8}s_2\rho_2^2\omega_2^2-\dfrac{1}{2}\omega_2^2+\dfrac{3}{4}s_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+s_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}s_2\times \\ \quad \left.\times\left(\dfrac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2+\dfrac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{2}\rho_2^2+\rho_1^2\right)\right)\right\}. \end{cases} \tag{12}$$

6. ОСОБЫЕ ТОЧКИ УСРЕДНЕННОЙ СИСТЕМЫ

Точки, в которых правые части системы уравнений (12) обращаются в нуль, называются особыми точками.

Легко видеть, что точка с нулевыми координатами обращает правые части (12) в нуль, т. е. точка $M_1(0,0)$ является особой точкой системы (12).

Положим $\rho_1 = 0$, получим уравнение для нахождения ρ_2

$$-\frac{3}{8}s_2 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}k_3}\,\rho_2^2 + s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\left(\frac{3}{8}s_2\rho_2^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2\right) + \\ + \frac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2 s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}s_2 + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}s_2\rho_2^2\right) = 0.$$

Отсюда легко находим

$$\rho_2^2 = \left(s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\omega_2^2 + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right)\Bigg/ \\ \Bigg/\frac{3}{4}s_2\left(\sqrt{\frac{L_1}{C_1}k_3} + 2\omega_2^2 s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3) + \omega_2^2 s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + \right. \\ \left. +\gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right).$$

Аналогично при $\rho_2 = 0$ находим

$$\rho_1^2 = \left(s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\omega_1^2 + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right)\Bigg/ \\ \Bigg/\frac{3}{4}s_2\left(s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}k_3} + 2\omega_1^2 s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3) + \omega_1^2 s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + \right. \\ \left. +\gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right).$$

При $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ получаем систему уравнений

$$-\frac{3}{4}s_2 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}k_3}\left(\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2^2\right) + s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\times \\ \times\left(\frac{3}{8}s_2\rho_1^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{3}{4}s_2\rho_2^2\omega_1^2\right) + s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}s_2\times \\ \times\left(\frac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2 + \frac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right) + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}s_2\left(\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2^2\right)\right) = 0,$$

$$-\frac{3}{4}s_2 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}k_3}\left(\frac{1}{2}\rho_2^2+\rho_1^2\right) + s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\times \\ \times\left(\frac{3}{8}s_2\rho_2^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 + \frac{3}{4}s_2\rho_1^2\omega_2^2\right) + s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}s_2\times$$

$$\times \left(\frac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2 + \frac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right) + \gamma\left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right) s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1 + k_3)\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}s_2\left(\frac{1}{2}\rho_2^2 + \rho_1^2\right)\right) = 0,$$

Для удобства введем обозначения:

$$a = -\frac{3}{4}s_2 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C+1}k_3}, \quad b = s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1 + k_3),$$

$$c = s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}s_2, \quad d = \gamma\left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right) s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1 + k_3),$$

$$m_1 = \frac{a}{2} + \frac{3d}{8}S_2 + \frac{3}{4}\omega_1^2\left(\frac{b}{2}S_2 + c\right), \quad n_1 = a + \frac{3b}{4}S_2\omega_1^2 + \frac{3c}{2}\omega_2^2 + \frac{3d}{4}S_2,$$

$$c_1 = \frac{b\omega_1^2 + d}{2}, \quad m_2 = a + \frac{3b}{4}S_2\omega_2^2 + \frac{3c}{2}\omega_1^2 + \frac{3d}{4}S_2,$$

$$n_2 = \frac{a}{2} + \frac{3d}{8}S_2 + \frac{3}{4}\left(\frac{b}{2}S_2 + c\right), \quad c_2 = \frac{b\omega_2^2 + d}{2}.$$

В новых обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} \rho_1^2 m_1 + \rho_2^2 n_1 = c_1, \\ \rho_1^2 n_2 + \rho_2^2 m_2 = c_2. \end{cases}$$

Легко находим $\rho_2^2 = \dfrac{c_2 m_1 - c_1 n_2}{m_1 m_2 - n_1 n_2}$, $\rho_1^2 = \dfrac{c_1 m_2 - c_2 n_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2}$. Таким образом, получен следующий результат

Теорема. При малых $\varepsilon > 0$ уравнение (6) имеет четыре ограниченных на всей числовой оси решения. Первые приближения для этих решений имеют вид

1. $u_1 = 0$,

2. $u_1 = \dfrac{\left(s_3 s_4^{-1}\frac{L_1}{C_1}(1+k_3)\omega_1^2 + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right)^{0.5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{s_2}\left(s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}k_3} + 2\omega_1^2 s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3) + \omega_1^2 s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right)^{0.5}}\cos(\omega_2\tau - \varphi_2)$,

3. $u_1 = \dfrac{\left(s_3 s_4^{-1}\frac{L_1}{C_1}(1+k_3)\omega_1^2 + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right)^{0.5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{s_2}\left(s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}k_3} + 2\omega_1^2 s_3 s_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3) + \omega_1^2 s_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)s_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)\right)^{0.5}}\cos(\omega_1\tau - \varphi_1)$,

4. $u_1 = \sqrt{\frac{c_1 m_2 - c_2 n_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2}}\cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \sqrt{\frac{c_2 m_1 - c_1 n_2}{m_1 m_2 - n_1 n_2}}\cos(\omega_2\tau - \varphi_2)$.

Отметим, что мы изучаем ограниченные на всей числовой оси решения. Решения периодические на бесконечности изучались в работе [4].

Автор благодарен проф. Задорожнему В. Г. за полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Van der Pol B. Oscillations sinusoidales et de relaxation / Van der Pol. — L'Onde electrique, 1930. — 992 p.

2. Хейл, Дж. Колебания в нелинейных системах / Дж Хейл. — М. : Мир, 1966. — 230 с.

3. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974. — 503 с.

4. Коструб, И. Д. Частотные признаки существования, единственности и устойчивости ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / И. Д. Коструб // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 109–114.

REFERENCES

1. Van der Pol B. Oscillations sinusoidales et de relaxation. L'Onde electrique, 1930, 992 p.

2. Hale J. Vibrations in non-linear systems. [Xejl Dzh. Kolebaniya v nelinejnyx sistemax]. Moscow: Mir, 1966, 230 p.

3. Bogolubov N.N., Mitropolskii Y.A. Asymptotic methods of non-linear vibration theory. [Bogolyubov N.N., Mitropol'skij Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyx kolebanij]. Moscow: Nauka, 1974, 503 p.

4. Kostrub I.D. Frequency signs for existence, uniqueness and stability of strict solutions of non-linear differential second-order equations. [Kostrub I.D. Chastotnye priznaki sushhestvovaniya, edinstvennosti i ustojchivosti ogranichennyx reshenij nelinejnyx differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 109–114.

Купцова Екатерина Валериевна, Аспирант кафедры нелинейных колебаний ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: Ekaterina_kuptsova@lenta.ru
Тел.: 8920–455–53–73

Kuptsova Ekaterina V., PhD student of non-linear vibrations' department of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: Ekaterina_kuptsova@lenta.ru
Tel.: 8920–455–53–73