УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

М. А. Керефов[1], С. Х. Геккиева[2]

[1] — *Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,*
[2] — *Институт прикладной математики и автоматизации*

Поступила в редакцию 21.06.2016 г.

Аннотация. В работе исследована нелокальная краевая задача для уравнения влагопереноса с дробной по времени производной Римана–Лиувилля. Рассматриваемое уравнение является обобщением модифицированного уравнения Аллера, учитывающего движение влаги в прямом и обратном направлении, в пористом массиве. Нелокальное краевое условие, содержащее оператор дробного интегрирования, соответственно является аналогом нелокального интегрального условия в случае классического уравнения Аллера.

С помощью метода энергетических неравенств для решения задачи получена априорная оценка в терминах дробного интеграла Римана–Лиувилля, из которой следует единственность решения.

Ключевые слова: обобщенное уравнение влагопереноса, производная дробного порядка, априорная оценка.

A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED EQUATION OF MOISTURE TRANSFER

M. A. Kerefov, S. Kh. Gekkieva

Abstract. A nonlocal boundary-value problem for the moisture transfer equation with the Riemann–Liouville fractional derivative on the time scale is investigated. The equation under consideration is a generalization of the modified Aller equation that takes into account the movement of moisture in the forward and backward directions, in a porous massif. A non-local boundary condition with the fractional integration operator is, respectively, an analog of the nonlocal integral condition in the case of the classical Aller equation.

Using the method of energy inequalities, an a priori estimate was obtained in the solution of the problem in terms of the Riemann–Liouville fractional integral, which implies the uniqueness of the solution.

Keywords: generalized equation of moisture transfer, a derivative of fractional order, a priori estimate.

ВВЕДЕНИЕ

Движение влаги в почве можно описать квазилинейным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

где $u(x,t)$ — влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t, $D(u)$ — коэффициент диффузивности. Это уравнение получено на основе анализа механизма диффузии в пористом массиве, когда учитывается возникновение потоков влаги под действием градиента капиллярного давления. Однако достаточно убедительные и многократные опыты демонстрируют иногда обратный знак потока от слоев с малым к слоям с большим влагосодержанием. Правильное объяснение движения влаги в прямом и обратном направлении возможно на основе модифицированного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right), \tag{1}$$

где A — варьируемый коэффициент Аллера.

Уравнению (1) при различных краевых условиях посвящены работы [1–6].

В [7] дается обобщение уравнения Аллера (1) путем введения дробной производной по времени порядка α, $0 < \alpha < 1$. В результате чего получается следующее качественно новое уравнение влагопереноса в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)u_x + A\partial_{0t}^{\alpha} u_x\right), \tag{2}$$

где $\partial_{0t}^{1-\alpha}$ — оператор дробного (в смысле M. Caputo) дифференцирования по t порядка $\alpha \in (0,1)$, [8, с. 14]. Математические модели движения влаги, основанные на уравнении (2), рассмотрены в [7].

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу для обобщенного уравнения диффузии с дробными производными Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$:

$$D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x,t\right)\frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \tag{3}$$

где $D_{0t}^{\alpha} u_x = \dfrac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{u_x\left(x,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, [9, с. 9].

В случае, когда коэффициенты уравнения (3) постоянны, существование и единственность решения первой краевой задачи доказаны в [10]. В данной работе рассматривается краевая задача с нелокальным условием.

Задача. В области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x,t\right)\frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \Pi\left(0,t\right) = D_{0t}^{\alpha-1}u(0,t), & x = 0, \\ \Pi\left(l,t\right) = \mu_1(t), & x = l, \end{cases} \tag{5}$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{6}$$

где $A > 0$, $\Pi\left(x,t\right) = k\left(x,t\right)\frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}$ — поток влаги через сечение x в единицу времени. Нелокальное условие на слое $x = 0$ в (5) является аналогом условия $\Pi\left(0,t\right) = \displaystyle\int\limits_0^t u(0,\tau)d\tau$ в случае классического уравнения Аллера.

Назовем регулярным решением уравнения (3) в области Q_T функцию из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $D_{0t}^{\alpha}u\left(x,t\right)$, $u_{xx}\left(x,t\right)$, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}\left(x,t\right) \in C\left(Q_T\right)$, которая, удовлетворяет уравнению (3) во всех точках $(x,t) \in Q_T$. Предполагая существование регулярного решения, сформулируем следующую теорему.

Теорема. Пусть $k_x\left(x,t\right)$, $k_t\left(x,t\right)$, $f\left(x,t\right) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$; $\mu_1\left(t\right) \in C[0,T]$, $u_0\left(x\right) \in C[0,l]$, $k \geqslant c_1 > 0$, $A > 0$, $k_t \leqslant 0$ всюду на $\bar{Q}$, тогда для решения задачи (3)–(6) справедлива априорная оценка

$$\left\|U\left(x,t\right)\right\|_{W_2^1(0,l)} \leqslant M\left(t\right)\left(\left\|f\right\|_{2,Q_t}^2 + \int\limits_0^t \mu_1^2(\tau)d\tau + \left\|u_0\left(x\right)\right\|_0^2 + \left\|u_0'\left(x\right)\right\|_0^2\right), \tag{7}$$

где $U = D_{ot}^{\alpha-1}u(x,\tau) = \dfrac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\displaystyle\int\limits_0^t \frac{u\left(x,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}$.

Доказательство. Воспользуемся методом энергетических неравенств, для чего умножим уравнение (3) скалярно на U:

$$\left(D_{0t}^{\alpha}u, U\right) = \left(\left(ku_x\right)_x, U\right) + \left(AD_{0t}^{\alpha}u_{xx}, U\right) + (f, U), \tag{8}$$

где $(u,v) = \displaystyle\int\limits_0^l uvdx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$. Преобразуем слагаемые тождества (8):

$$\left(D_{0t}^{\alpha}u, U\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|U\right\|_0^2,$$

$$\left(\left(ku_x\right)_x, U\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}k\left(l,t\right)u_x\left(l,t\right)\int\limits_0^t \frac{u\left(l,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}} - \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}k\left(0,t\right)u_x\left(0,t\right)\int\limits_0^t \frac{u\left(0,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}} -$$
$$- \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_0^l ku_x\left(x,t\right)\int\limits_0^t \frac{u_x\left(x,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}dx,$$

$$\left(AD_{ot}^{\alpha}u_{xx}, U\right) =$$
$$= \frac{A}{\Gamma^2\left(1-\alpha\right)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u_x\left(l,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}\int\limits_0^t \frac{u\left(l,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u_x\left(0,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}\int\limits_0^t \frac{u\left(0,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|U_x\right\|_0^2\right\},$$

$$(f, U) \leqslant \frac{1}{2}\left\|f\right\|_0^2 + \frac{1}{2}\left\|U\right\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (8) получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|U\right\|_0^2 - \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}k\left(l,t\right)u_x\left(l,t\right)\int\limits_0^t \frac{u\left(l,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}k\left(0,t\right)u_x\left(0,t\right)\int\limits_0^t \frac{u\left(0,\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}} +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_0^l ku_x\left(x,t\right)\int\limits_0^t \frac{u_x\left(x,t\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}dx + \frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|U_x\right\|_0^2 -$$

$$-\frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{u_x(l,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\int\limits_0^t\frac{u(l,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}+\frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{u_x(0,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\int\limits_0^t\frac{u(0,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_0^2+\frac{1}{2}\|U\|_0^2.$$

Последнее неравенство с учетом граничных условий (5) примет вид:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U\|_0^2-\mu_1(t)U(l,t)+D_{0t}^{\alpha-1}u(0,t)U(0,t)+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l ku_x(x,t)\int\limits_0^t\frac{u_x(x,t)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U_x\|_0^2\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_0^2+\frac{1}{2}\|U\|_0^2. \quad (9)$$

Слагаемые в левой части неравенства (9) оценим так:

$$\mu_1(t)U(l,t)\leqslant\frac{\mu_1^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\varepsilon\|U_x\|_0^2+c_\varepsilon\|U\|_0^2\right), \quad (10)$$

$$\left|U(0,t)D_{ot}^{\alpha-1}u\right|=U^2(0,t)\leqslant\varepsilon\|U_x\|_0^2+c_\varepsilon\|U\|_0^2,$$

где ε — произвольная постоянная, $c_\varepsilon=\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}$. Подставляя оценки (10) в неравенство (9), находим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l ku_x(x,t)\int\limits_0^t\frac{u_x(x,t)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U_x\|\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_0^2+\nu_1\|U\|+\nu_2\|U_x\|+\frac{1}{2}\mu_1^2,$$

$$v_1=c_\varepsilon+\frac{1}{2}c_\varepsilon+\frac{1}{2}>0,\quad \nu_2=\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}>0.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по τ от 0 до t:

$$\frac{1}{2}\|U\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l ku_x(x,\tau)\int\limits_0^\tau\frac{u_x(x,\tau_1)\,d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha}dx+\frac{A}{2}\|U_x\|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_{2,Q_t}^2+\nu_1\int\limits_0^t\|U(x,\tau)\|_0^2\,d\tau+\nu_2\int\limits_0^t\|U_x(x,\tau)\|_0^2\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\mu_1^2(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\|U(x,0)\|_0^2+\frac{A}{2}\left\|U_x'(x,0)\right\|_0^2, \quad (11)$$

где $\|u\|_{2,Q_t}^2=\int\limits_0^t\|u(x,\tau)\|_0^2\,d\tau$.

Предположим, что $k_t\leqslant 0$, тогда неотрицательность тройного интеграла в левой части неравенства (11) доказывается так же, как в [9, с. 35]. Усиливая неравенство (11), получим

$$\frac{1}{2}\|U\|_0^2+\frac{A}{2}\|U_x\|_0^2\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_{2,Q_t}^2+\nu_1\int\limits_0^t\|U(x,\tau)\|_0^2\,d\tau+\nu_2\int\limits_0^t\|U_x(x,\tau)\|_0^2\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \mu_1^2(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\left\|U\left(x,0\right)\right\|_0^2+\frac{A}{2}\left\|U'_x\left(x,0\right)\right\|_0^2$$

или

$$\left\|U\left(x,t\right)\right\|_0^2+A\left\|U_x\left(x,t\right)\right\|_0^2\leqslant$$

$$\leqslant\left\|f\right\|_{2,Q_t}^2+2\nu_1\int\limits_0^t\left\|U\left(x,\tau\right)\right\|_0^2d\tau+2\nu_2\int\limits_0^t\left\|U_x\left(x,\tau\right)\right\|_0^2d\tau+\int\limits_0^t\mu_1^2(\tau)d\tau+\left\|u_0\left(x\right)\right\|_0^2+A\left\|u'_0\left(x\right)\right\|_0^2.$$

Из последней оценки следует

$$\left\|U\right\|_0^2\leqslant 2\nu_2\int\limits_0^t\left\|U_x\right\|_0^2d\tau+2\nu_1\int\limits_0^t\left\|U\right\|_0^2d\tau+F\left(t\right),\tag{12}$$

где

$$F\left(t\right)=\int\limits_0^t\mu_1^2\left(\tau\right)d\tau+\left\|f\right\|_{2,Q_t}^2+\left\|u_0\left(x\right)\right\|_0^2+A\left\|u'_0\left(x\right)\right\|_0^2.$$

Введем обозначение $y\left(t\right)=\int\limits_0^t\left\|U\right\|_0^2d\tau$, тогда неравенство (12) примет вид

$$\frac{dy}{dt}\leqslant\nu_2 y\left(t\right)+F\left(t\right).$$

Применяя лемму Гронуолла–Беллмана [11, с. 152] к неравенству (12), получаем

$$\left\|U\right\|_{2,Q_t}^2\leqslant\exp\left(\nu_1 t\right)\int\limits_0^t\widetilde{F}\left(\tau\right)d\tau\leqslant\exp\left(\nu_1 t\right)t\widetilde{F}\left(t\right),\tag{13}$$

где $\widetilde{F}\left(t\right)=F\left(t\right)+\nu_2\int\limits_0^t\left\|u_x\right\|_0^2d\tau$. С помощью (13) из (12) находим

$$\left\|U\right\|_0^2+A\left\|U_x\right\|_0^2\leqslant\nu_2\int\limits_0^t\left\|U_x\right\|_0^2d\tau+\nu_1 e^{\nu_1 t}t\left(F\left(t\right)+\nu_2\int\limits_0^t\left\|u_x\right\|_0^2d\tau\right),$$

или

$$\left\|U\right\|_0^2+A\left\|U_x\right\|_0^2\leqslant M\left(t\right)\int\limits_0^t\left\|u_x\right\|_0^2d\tau+\nu_1 e^{\nu_1 t}tF\left(t\right),\tag{14}$$

где $M\left(t\right)=\nu_2+\nu_2\nu_1 e^{\nu_1 t}t$. Из оценки (14) имеем

$$\left\|U_x\right\|_0^2\leqslant M\left(t\right)/A\int\limits_0^t\left\|U_x\right\|_0^2d\tau+\bar{F}\left(t\right),$$

где $\bar{F}\left(t\right)=\nu_1 e^{\nu_1 t}tF\left(t\right)/A$. Применяя снова лемму к последнему неравенству, получим

$$\left\|U_x\right\|_{2,Q_t}^2\leqslant\exp\left(\int\limits_0^t M\left(\tau\right)d\tau\right)t\bar{F}\left(t\right).\tag{15}$$

С помощью (15) из (14) окончательно находим

$$\|U\|_0^2 + A\,\|U_x\|_0^2 \leqslant M\,(t)\exp\left(\int\limits_0^t M(\tau)d\tau\right) t\bar{F}\,(t) + \nu_1 e^{\nu_1 t} tF\,(t)\,,$$

откуда следует оценка

$$\|U\|_0^2 + A\,\|U_x\|_0^2 \leqslant M_1\,(t)\left(\int\limits_0^t \mu_1^2 d\tau + \|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0\,(x)\|_0^2 + A\left\|u_0'\,(x)\right\|_0^2\right)$$

или (7).

Оценка получена в терминах U. Так как однородное уравнения Абеля имеет только тривиальное решение [9, с. 10], то из оценки (7) следует единственность решения задачи (3)–(6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудновский, А. Ф. Теплофизика почв / А. Ф. Чудновский. — М. : Наука, 1976. — 352 с.

2. Нахушев, А. М. О некоторых способах линеаризации уравнений движения грунтовых вод и почвенной влаги / А. М. Нахушев // Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики. — 1979. — Вып. 2. — С. 173–183.

3. Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М. : Высшая школа, 1995. — 301 с.

4. Солдатов, А. П. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка / А. П. Солдатов, М. Х. Шхануков // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.

5. Кожанов, А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера / А. И. Кожанов // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 6. — С. 763–774.

6. Керефов, М. А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной в многомерной области / М. А. Керефов, С. Х. Геккиева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия : Математика. Физика. — 2015. — Т. 41, № 23. — С. 17–23.

7. Беданокова, С. Ю. Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальной организацией : Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Таганрог, 2007. — 16 с.

8. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.

9. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

10. Керефов, М. А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной : Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Нальчик, 2000. — 75 с.

11. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М. : Наука, 1973. — 407 с.

REFERENCES

1. Chudnovsky A.F. Thermophysics of soils. [Chudnovskij A.F. Teplofizika pochv]. Moscow: Nauka, 1976, 352 p.

2. Nakhushev A.M. On some methods of linearization of the motion groundwater and soil moisture equations. [Naxushev A.M. O nekotoryx sposobax linearizacii uravnenij dvizheniya

gruntovyx vod i pochvennoj vlagi]. *Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo tipa i rodstvennye problemy funkcional'nogo analiza i prikladnoj matematiki — Boundary value problems for mixed equations and related problems of functional analysis and applied mathematics*, 1979, vol. 2, pp. 173–183.

3. Nakhushev A.M. Equations of Mathematical Biology. [Naxushev A.M. Uravneniya matematicheskoj biologii]. Moscow, 1995, 301 p.

4. Soldatov A.P., Shkhanukov M.Kh. Boundary value problems with the A.A. Samarskii general non-local condition for pseudo-parabolic equations of high order. [Soldatov A.P., Shxanukov M.X. Kraevye zadachi s obshhim nelokal'nym usloviem A.A. Samarskogo dlya psevdoparabolicheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Dokl. AN SSSR — Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1987, vol. 297, no. 3, pp. 547–552.

5. Kozhanov A.I. On a nonlocal boundary-value problem with variable coefficients for the heat and the Aller equations. [Kozhanov A.I. Ob odnoj nelokal'noj kraevoj zadache s peremennymi koe'fficientami dlya uravneniya teploprovodnosti i Allera]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 763–774.

6. Kerefov M.A., Gekkieva S.Kh. Boundary value problems for a modified moisture transfer equation with a time-fractional derivative in a multidimensional domain. [Kerefov M.A., Gekkieva S.X. Kraevye zadachi dlya modificirovannogo uravneniya vlagoperenosa s drobnoj po vremeni proizvodnoj v mnogomernoj oblasti]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika — Scientific Bulletin of the Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics*, 2015, vol. 41, no. 23, pp. 17–23.

7. Bedanokova S.Yu. Mathematical modeling of water-salt regime in soils with a fractal organization. [Bedanokova S.Yu. Matematicheskoe modelirovanie vodnogo i solevogo rezhimov v pochvax s fraktal'noj organizaciej]. Author's abstract. Dis.... cand. Fiz.-mat. Sciences.

8. Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. [Psxu A.V. Uravneniya v chastnyx proizvodnyx drobnogo poryadka]. Moscow: Nauka, 2005, 199 p.

9. Nakhushev A.M. Fractional calculus and its application. [Naxushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie]. Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.

10. Kerefov M.A. Boundary value problems for a modified moisture transfer equation with a time derivative. [Kerefov M.A. Kraevye zadachi dlya modificirovannogo uravneniya vlagoperenosa s drobnoj po vremeni proizvodnoj]. Dis.... cand. Fiz.-mat. Sciences, Nalchik, 2000, 75 p.

11. Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. [Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1973, 407 p.

Керефов М. А., доцент кафедры информатики и математического обеспечения автоматизированных систем Математического факультета КБГУ им. Х. М. Бербекова, к.ф.-м.н., Нальчик, Российская Федерация
E-mail: kerefov@mail.ru

Kerefov M. A., Associate Professor of Department of Computer Science and Mathematical Software of the Automated Systems Faculty of Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Ph.D., Nalchik, Russian Federation
E-mail: kerefov@mail.ru

Геккиева С. Х., заведующий отделом математического моделирования геофизических процессов ИПМА, к.ф.-м.н., Нальчик, Российская Федерация
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Gekkieva S. Kh., Head of Department of Mathematical Modeling of the Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation, Ph.D., Nalchik, Russian Federation
E-mail: gekkieva_s@mail.ru