УДК 514.75/.77

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ MG-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ОДНОМ НАЧАЛЬНОМ УСЛОВИИ

Д. А. Жуков

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 11.02.2016 г.

Аннотация. В данной статье изучается вопрос о существовании и единственности бесконечно малой MG-деформации поверхности отрицательной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве. При этом на границе поверхности задано начальное условие геометрического типа. В работе выводится система уравнений бесконечно малых MG-деформаций для поверхностей отрицательной гауссовой кривизны, а также происходит преобразование начального условия. В результате, данная задача сводится к задаче Коши для канонической гиперболической системы уравнений в частных производных. Отсюда следует существование и единственность рассматриваемой деформации.

Ключевые слова: поверхность отрицательной гауссовой кривизны, бесконечно малые MG-деформации, задача Коши, каноническая гиперболическая система уравнений в частных производных.

INFIFNITESIMAL MG-DEFORMATIONS OF A SURFACE WITH NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE WITH AN INITIAL CONDITION

D. A. Zhukov

Abstract. In this article, we research a problem of an existence and uniqueness of the infinitesimal MG-deformation of a surface with negative Gaussian curvature in three-dimensional Euclidian space. There is a condition of geometric type on the boundary of the surface. In this work, we get a system of equations of the infinitesimal MG-deformation for surfaces with negative Gaussian curvature, and transform the boundary condition. As a result, this problem is reduced to initial-value problem for canonical hyperbolic system of partial differential equations. From this we get the existence and uniqueness of the deformation.

Keywords: surface with negative Gaussian curvature, infinitesimal MG-deformations, initial-value problem, canonical hyperbolic system of partial differential equations.

1. ВВЕДЕНИЕ

На данный момент бесконечно малые деформации поверхностей положительной гауссовой кривизны исследованы достаточно хорошо. Среди всех видов деформаций наиболее изученными являются бесконечно малые изгибания. Однако, исследований поверхностей отрицательной гауссовой кривизны достаточно мало [1, с. 161], даже в случае изгибаний. Поэтому актуальность имеет вопрос об изучении бесконечно малых деформаций поверхностей отрицательной гауссовой кривизны ($K < 0$).

В данной статье доказывается теорема существования и единственности бесконечно малой MG-деформации односвязной поверхности отрицательной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве. При этом на границе изучаемой поверхности задается следующее условие: вариации первой и второй квадратичных форм равны заданным непрерывным функциям.

При бесконечно малых MG-деформациях сохраняется поточечно сферический образ поверхности, а вариация гауссовой кривизны задается как непрерывная функция σ на поверхности. Бесконечно малые MG-деформации были введены автором [2], где рассматривался случай положительной гауссовой кривизны.

Изучение поверхности с $K < 0$ приводит к новой системе уравнений для бесконечно малых MG-деформаций, которая получена в этой статье. Исследование деформаций сводится к задаче Коши для канонической гиперболической системы уравнений в частных производных.

Работа состоит из пяти пунктов, после введения следует формулировка теоремы, далее, в третьем пункте, приводится подробное определение бесконечно малых MG-деформаций, в четвертом выводится система уравнений, и наконец, в пятом пункте рассматривается граничное условие и доказывается теорема.

Результаты, представленные в статье, носят теоретический характер и ранее в литературе не рассматривались.

2. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим произвольную поверхность отрицательной гауссовой кривизны ($K < 0$), обозначим ее P. Выберем на поверхности P в качестве координатной сети асимптотическую сеть [3, с. 340]. Вырежем из поверхности P кусок, не содержащий точек возврата так, чтобы край этого куска состоял из двух отрезков (обозначим их Γ_1 и Γ_2), лежащих на асимптотических линиях поверхности P, и пространственной кривой Γ_3, которая нигде не асимптотична (рис. 1).

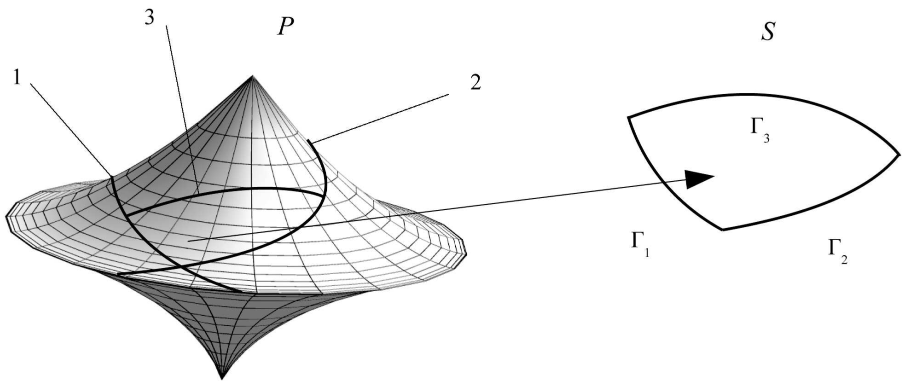

Рис. 1. 1 — *первая асимптота*, 2 — *вторая асимптота*, 3 — *кривая на поверхности* P.

Полученную таким образом поверхность обозначим S. Система координат в асимптотических линиях естественным образом переносится с поверхности P на поверхность S. Поверхность S взаимно однозначно отображается на криволинейный треугольник (u, v) – плоскости, при этом линиям Γ_1 и Γ_2 соответствуют прямолинейные отрезки, параллельные осям координат, а Γ_3 соответствует жорданова кривая нигде не параллельная осям координат. Поэтому можем считать, что поверхность S есть отображение криволинейного треугольника в пространство и задается радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, всюду далее будем считать, что радиус-вектор $\vec{r}$ принадлежит классу C^3 (рис. 2).

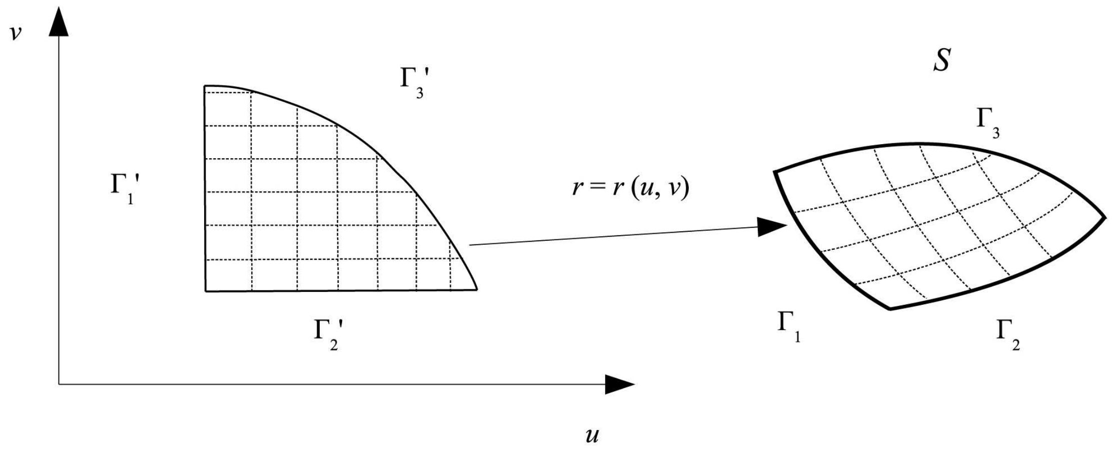

Рис. 2.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть на границе поверхности S вдоль кривой Γ_3 выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \delta I \ \ = \psi_1, \\ \delta II = \psi_2, \end{cases} \qquad (*)$$

где δI и δII – вариации первой и второй квадратичных форм поверхности S, ψ_1 и ψ_2 — заданные непрерывные функции параметров (u, v).

Тогда бесконечно малая MG-деформация поверхности S существует и единственна.

3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ MG-ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим деформацию S_t, $t \in (-t_0, t_0)$, $\quad t_0 > 0$, поверхности S, зададим ее уравнением $\vec{r}_t = \vec{R}(u, v, t)$, где $(u, v) \in \Omega$, $\vec{R}(u, v, t)$ – функция трижды непрерывно дифференцируемая (класса C^3), по параметрам u, v и класса C^2 по параметру t, $\vec{R}(u, v, 0) \equiv \vec{r}(u, v)$.

Пусть $a(u, v)$ – некоторая функция на исходной поверхности S. После деформации функция a перейдет в функцию $A(u, v, t)$ на деформированной поверхности S_t, причем $A(u, v, 0) \equiv a(u, v)$.

Функцию $\delta a = \frac{\partial A}{\partial t}\Big|_{t=0}$ будем называть *вариацией* функции a. Векторное поле $\frac{\partial \vec{R}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta\vec{r}$ обозначим через $\vec{y}$ и будем называть *векторным полем деформации.* Будем в дальнейшем считать, что $\vec{y} = \vec{y}(u, v) \in C^3$.

Две деформации называются *эквивалентными*, если их векторные поля деформаций равны. Каждый класс эквивалентных деформаций будем называть *бесконечно малой деформацией* поверхности S. Сохранение поточечно сферического образа поверхности аналитически записывается в виде:

$$\delta\vec{n} = 0,$$

где $\delta\vec{n}$ – вариация единичного вектора нормали поверхности S.

Зададим на поверхности S функцию $\sigma(u, v)$ класса C^1. Рассмотрим следующее условие:

$$\delta K = \sigma,$$

где δK – вариация гауссовой кривизны поверхности S.

Определение. *Бесконечно малой MG-деформацией* называется бесконечно малая деформация поверхности S, при которой выполняются условия $\delta\vec{n} = 0$ и $\delta K = \sigma$.

Будем считать, что в некоторой точке $M_0(u_0, v_0)$ поверхности S задан известный постоянный вектор деформации $\vec{y}(u_0, v_0) = \vec{C}$, $\vec{C} = \overrightarrow{const}$.

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ MG-ДЕФОРМАЦИЙ

Из условия $\delta\vec{n} = 0$ следует справедливость следующей системы уравнений [4, с. 464]:

$$\partial_j \vec{y} = \alpha_j^k \partial_k \vec{r}, \; j = 1, 2, \tag{1}$$

где α_j^k – некоторые скалярные функции от (u, v), $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial v}$.

Так как задача отыскания бесконечно малой MG-деформации состоит в поиске векторного поля деформации $\vec{y}$, то, если будут найдены функции α_j^k, это будет означать, что найдены $\partial_j \vec{y}$. По найденным частным производным $\partial_j \vec{y}$ можно восстановить векторное поле $\vec{y}$ с помощью интегрирования выражения $d\vec{y} = \partial_1 \vec{y} du + \partial_2 \vec{y} dv$. Это выражение, в силу односвязности поверхности, является полным дифференциалом, а потому, с учетом точечного условия $\vec{y}(u_0, v_0) = \vec{C}$, поле $\vec{y}$ будет найдено однозначно. Таким образом, наша задача свелась к поиску функций α_j^k.

Продифференцируем первое из уравнений системы (1) по v, а второе по u, в результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} \partial_{12}\vec{y} = \partial_2 \alpha_1^1 \partial_1 \vec{r} + \alpha_1^1 \partial_{12}\vec{r} + \partial_2 \alpha_1^2 \partial_2 \vec{r} + \alpha_1^2 \partial_{22}\vec{r}, \\ \partial_{21}\vec{y} = \partial_1 \alpha_2^1 \partial_1 \vec{r} + \alpha_2^1 \partial_{11}\vec{r} + \partial_1 \alpha_2^2 \partial_2 \vec{r} + \alpha_2^2 \partial_{21}\vec{r}. \end{cases} \tag{2}$$

Далее, используя деривационные формулы Гаусса $\partial_{jk}\vec{r} = \Gamma_{jk}^l \partial_l \vec{r} + b_{jk}\vec{n}$, $\;j, k = 1, 2$, получаем:

$$\begin{cases} \partial_{12}\vec{y} = \partial_2 \alpha_1^1 \partial_1 \vec{r} + \alpha_1^1 (\Gamma_{12}^1 \partial_1 \vec{r} + \Gamma_{12}^2 \partial_2 \vec{r} + b_{12}\vec{n}) + \partial_2 \alpha_1^2 \partial_2 \vec{r} + \alpha_1^2 (\Gamma_{22}^1 \partial_1 \vec{r} + \Gamma_{22}^2 \partial_2 \vec{r} + b_{22}\vec{n}), \\ \partial_{21}\vec{y} = \partial_1 \alpha_2^1 \partial_1 \vec{r} + \alpha_2^1 (\Gamma_{11}^1 \partial_1 \vec{r} + \Gamma_{11}^2 \partial_2 \vec{r} + b_{11}\vec{n}) + \partial_1 \alpha_2^2 \partial_2 \vec{r} + \alpha_2^2 (\Gamma_{21}^1 \partial_1 \vec{r} + \Gamma_{21}^2 \partial_2 \vec{r} + b_{21}\vec{n}), \end{cases}$$

где b_{jk} – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, Γ_{jk}^l – символы Кристоффеля второго рода. Для односвязной поверхности выполняется условие $\partial_{12}\vec{y} = \partial_{21}\vec{y}$, поэтому, мы можем перегруппировать полученные уравнения, сформировав коэффициенты при $\partial_1 \vec{r}$, $\partial_2 \vec{r}$, $\vec{n}$, а затем приравнять их. В результате получим систему:

$$\begin{cases} \partial_2 \alpha_1^1 + \alpha_1^1 \Gamma_{12}^1 + \alpha_1^2 \Gamma_{22}^1 = \partial_1 \alpha_2^1 + \alpha_2^1 \Gamma_{11}^1 + \alpha_2^2 \Gamma_{21}^1, \\ \partial_2 \alpha_1^2 + \alpha_1^1 \Gamma_{12}^2 + \alpha_1^2 \Gamma_{22}^2 = \partial_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^1 \Gamma_{11}^2 + \alpha_2^2 \Gamma_{21}^2, \\ \alpha_1^1 b_{12} + \alpha_1^2 b_{22} = \alpha_2^1 b_{11} + \alpha_2^2 b_{21}. \end{cases} \tag{3}$$

На поверхности S в качестве координатной сети выбрана асимптотическая сеть. Тогда и только тогда коэффициенты второй квадратичной формы $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$. Поэтому из третьего уравнения системы (3) следует, что $\alpha_1^1 = \alpha_2^2$, (т. к. $b_{12} = b_{21}$ всегда).

Следовательно, учитывая симметрию символов Кристоффеля по нижним индексам, систему (3) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \partial_2 \alpha_1^1 + \alpha_1^1 \Gamma_{12}^1 + \alpha_1^2 \Gamma_{22}^1 = \partial_1 \alpha_2^1 + \alpha_2^1 \Gamma_{11}^1 + \alpha_1^1 \Gamma_{12}^1, \\ \partial_2 \alpha_1^2 + \alpha_1^1 \Gamma_{12}^2 + \alpha_1^2 \Gamma_{22}^2 = \partial_1 \alpha_1^1 + \alpha_2^1 \Gamma_{11}^2 + \alpha_1^1 \Gamma_{12}^2. \end{cases}$$

Приведем подобные члены в полученной системе уравнений, имеем:

$$\begin{cases} \partial_2 \alpha_1^1 + \alpha_1^2 \Gamma_{22}^1 = \partial_1 \alpha_2^1 + \alpha_2^1 \Gamma_{11}^1, \\ \partial_2 \alpha_1^2 + \alpha_1^2 \Gamma_{22}^2 = \partial_1 \alpha_1^1 + \alpha_2^1 \Gamma_{11}^2. \end{cases} \tag{4}$$

Теперь рассмотрим условие $\delta K = \sigma$.

Гауссова кривизна K может быть найдена как отношение дискриминанта второй квадратичной формы поверхности к дискриминанту первой [5, с. 79]:

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}, \tag{5}$$

где g_{ij} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S, а b_{ij} – коэффициенты ее второй квадратичной формы. Для удобства числитель формулы (5) обозначим b, а знаменатель g, тогда формулу (5) можно переписать в виде:

$$K = \frac{b}{g}. \tag{6}$$

Формула (6) позволяет условие $\delta K = \sigma$ переписать в виде:

$$\delta\left(\frac{b}{g}\right) = \sigma. \tag{7}$$

Варьируя левую часть формулы (7) получаем:

$$\frac{\delta b \cdot g - b \cdot \delta g}{g^2} = \sigma. \tag{8}$$

Вычислим вариации коэффициентов первой и второй квадратичных форм, выражая их через α_1^1, α_2^1, α_1^2, α_2^2 и коэффициенты первой и второй квадратичных форм исходной поверхности S.

Учитывая условие (1) и тот факт, что $\delta\vec{r} = \vec{y}$, имеем:

$$\delta g_{11} = \delta(\partial_1\vec{r}, \partial_1\vec{r}) = (\delta(\partial_1\vec{r}), \partial_1\vec{r}) + (\partial_1\vec{r}, \delta(\partial_1\vec{r})) = \\ = 2(\partial_1\vec{y}, \partial_1\vec{r}) = 2(\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^2\partial_2\vec{r}, \partial_1\vec{r}) = 2\alpha_1^1 g_{11} + 2\alpha_1^2 g_{21},$$

$$\delta g_{12} = \delta(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}) = (\delta(\partial_1\vec{r}), \partial_2\vec{r}) + (\partial_1\vec{r}, \delta(\partial_2\vec{r})) = (\partial_1\vec{y}, \partial_2\vec{r}) + (\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{y}) = \\ = (\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^2\partial_2\vec{r}, \partial_2\vec{r}) + (\partial_1\vec{r}, \alpha_2^1\partial_1\vec{r} + \alpha_2^2\partial_2\vec{r}) = \alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_2^1 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21},$$

$$\delta g_{22} = \delta(\partial_2\vec{r}, \partial_2\vec{r}) = (\delta(\partial_2\vec{r}), \partial_2\vec{r}) + (\partial_2\vec{r}, \delta(\partial_2\vec{r})) = 2(\partial_2\vec{y}, \partial_2\vec{r}) = \\ = 2(\alpha_2^1\partial_1\vec{r} + \alpha_2^2\partial_2\vec{r}, \partial_2\vec{r}) = 2\alpha_2^1 g_{12} + 2\alpha_2^2 g_{22}.$$

Таким образом, δg_{jk} выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} &\delta g_{11} = 2\alpha_1^1 g_{11} + 2\alpha_1^2 g_{21}, \\ &\delta g_{12} = \alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_2^1 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}, \\ &\delta g_{22} = 2\alpha_2^1 g_{12} + 2\alpha_2^2 g_{22}. \end{aligned} \tag{9}$$

Продифференцируем первое из уравнений (1) по u, а второе по v:

$$\begin{cases} \partial_{11}\vec{y} = \partial_1\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^1\partial_{11}\vec{r} + \partial_2\alpha_1^2\partial_2\vec{r} + \alpha_1^2\partial_{21}\vec{r}, \\ \partial_{22}\vec{y} = \partial_2\alpha_2^1\partial_1\vec{r} + \alpha_2^1\partial_{12}\vec{r} + \partial_2\alpha_2^2\partial_2\vec{r} + \alpha_2^2\partial_{22}\vec{r}. \end{cases}$$

Используя полученную систему и равенства (2), находим:

$$\delta b_{11} = (\delta(\partial_{11}\vec{r}), \vec{n}) + (\partial_{11}\vec{r}, \delta\vec{n}) = (\partial_{11}\vec{y}, \vec{n}) = \alpha_1^1(\partial_{11}\vec{r}, \vec{n}) + \alpha_1^2(\partial_{21}\vec{r}, \vec{n}) = \alpha_1^1 b_{11} + \alpha_1^2 b_{12},$$

$$\delta b_{12} = (\delta(\partial_{12}\vec{r}),\vec{n}) + (\partial_{12}\vec{r},\delta\vec{n}) = (\partial_{12}\vec{y},\vec{n}) = \alpha_1^1(\partial_{12}\vec{r},\vec{n}) + \alpha_1^2(\partial_{22}\vec{r},\vec{n}) = \alpha_1^1 b_{12} + \alpha_1^2 b_{22},$$

$$\delta b_{21} = (\delta(\partial_{21}\vec{r}),\vec{n}) + (\partial_{21}\vec{r},\delta\vec{n}) = (\partial_{21}\vec{y},\vec{n}) = \alpha_2^1(\partial_{11}\vec{r},\vec{n}) + \alpha_2^2(\partial_{21}\vec{r},\vec{n}) = \alpha_2^1 b_{11} + \alpha_2^2 b_{12},$$

$$\delta b_{22} = (\delta(\partial_{22}\vec{r}),\vec{n}) + (\partial_{22}\vec{r},\delta\vec{n}) = (\partial_{22}\vec{y},\vec{n}) = \alpha_2^1(\partial_{12}\vec{r},\vec{n}) + \alpha_2^2(\partial_{22}\vec{r},\vec{n}) = \alpha_2^1 b_{12} + \alpha_2^2 b_{22}.$$

Таким образом, δb_{jk} выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \delta b_{11} &= \alpha_1^1 b_{11} + \alpha_1^2 b_{12}, \\ \delta b_{12} &= \alpha_1^1 b_{12} + \alpha_1^2 b_{22}, \\ \delta b_{21} &= \alpha_2^1 b_{11} + \alpha_2^2 b_{12}, \\ \delta b_{22} &= \alpha_2^1 b_{12} + \alpha_2^2 b_{22}. \end{aligned} \tag{10}$$

На поверхности S в качестве координатной сети выбрана асимптотическая сеть ($b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$), поэтому формулы (10) принимают вид:

$$\delta b_{11} = \alpha_1^2 b_{12}, \quad \delta b_{12} = \alpha_1^1 b_{12}, \quad \delta b_{21} = \alpha_2^2 b_{12}, \quad \delta b_{22} = \alpha_2^1 b_{12}. \tag{11}$$

Рассмотрим формулу (8) подробнее. С учетом выбора асимптотической сети в качестве системы координат ($b_{11} = b_{22} = 0$), имеем:

$$\delta b = \delta\left(b_{11}b_{22} - (b_{12})^2\right) = \delta b_{11}\cdot b_{22} + b_{11}\cdot\delta b_{22} - 2\delta b_{12}\cdot b_{12} = -2\delta b_{12}\cdot b_{12}.$$

Таким образом, с учетом формул (11) $\delta b = -2\alpha_1^1 (b_{12})^2$. С другой стороны, в силу $b_{11} = b_{22} = 0$, $b = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = -(b_{12})^2$. Следовательно, справедливо равенство:

$$\delta b = 2b\cdot\alpha_1^1. \tag{12}$$

Вариация дискриминанта первой квадратичной формы $\delta g = \delta g_{11}g_{22} + g_{22}\delta g_{11} - 2g_{12}\delta g_{12}$, с учетом формул (9), находим: $\delta g = 2g\left(\alpha_1^1 + \alpha_2^2\right)$. Но, как было показано выше, $\alpha_1^1 = \alpha_2^2$, поэтому

$$\delta g = 4g\cdot\alpha_1^1. \tag{13}$$

В результате, формула (8), с учетом равенств (12) и (13), принимает вид:

$$\frac{2b\cdot g\cdot\alpha_1^1 - 4b\cdot g\cdot\alpha_1^1}{g^2} = \sigma. \tag{14}$$

Приводя подобные члены в равенстве (14), получаем:

$$-2K\cdot\alpha_1^1 = \sigma.$$

И наконец, разделим полученное равенство на $(-2K)$:

$$\alpha_1^1 = \frac{\sigma}{-2K}. \tag{15}$$

Подставим равенство (15) в систему (4) и получим:

$$\begin{cases} \partial_2\left(\frac{\sigma}{-2K}\right) + \alpha_1^2\Gamma_{22}^1 = \partial_1\alpha_2^1 + \alpha_2^1\Gamma_{11}^1, \\ \partial_2\alpha_1^2 + \alpha_1^2\Gamma_{22}^2 = \partial_1\left(\frac{\sigma}{-2K}\right) + \alpha_2^1\Gamma_{11}^2. \end{cases} \tag{16}$$

Перегруппируем систему (16), имеем:

$$\begin{cases} -\partial_1\alpha_2^1 = \alpha_2^1\Gamma_{11}^1 - \alpha_1^2\Gamma_{22}^1 + \partial_2\left(\frac{\sigma}{2K}\right), \\ \partial_2\alpha_1^2 = \alpha_2^1\Gamma_{11}^2 - \alpha_1^2\Gamma_{22}^2 - \partial_1\left(\frac{\sigma}{2K}\right). \end{cases} \tag{17}$$

В системе (17) две неизвестных функции α_2^1 и α_1^2, функция σ зависит от $(u,\ v)$, а все остальные функции зависят только от радиус-вектора поверхности S, который, в свою очередь, является функцией от аргументов $(u,\ v)$. Поэтому, для удобства, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1\left(u,v,\alpha_2^1,\alpha_1^2\right) &= \alpha_2^1\Gamma_{11}^1 - \alpha_1^2\Gamma_{22}^1 + \partial_2\left(\tfrac{\sigma}{2K}\right), \\ F_2\left(u,v,\alpha_2^1,\alpha_1^2\right) &= \alpha_2^1\Gamma_{11}^2 - \alpha_1^2\Gamma_{22}^2 - \partial_1\left(\tfrac{\sigma}{2K}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Система уравнений (17), с учетом обозначений (18), запишется в виде:

$$\begin{cases} -\partial_1\alpha_2^1 = F_1\left(u,v,\alpha_2^1,\alpha_1^2\right), \\ \partial_2\alpha_1^2 = F_2\left(u,v,\alpha_2^1,\alpha_1^2\right). \end{cases} \tag{19}$$

Полученная система описывает бесконечно малые MG-деформации поверхности S отрицательной гауссовой кривизны. Система (19) является канонической гиперболической системой уравнений в частных производных [6, с. 367].

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ

Как было указано в формулировке теоремы, вдоль границы Γ_3, которая является гладкой пространственной кривой (и нигде не асимптотична) выполнено условие (*).

Зададим отношением $(\xi{:}\eta)$, $\xi^2+\eta^2\neq 0$, вдоль кривой Γ_3 произвольное направление, таким образом, чтобы оно не являлось главным направлением ни в одной точке кривой Γ_3.

Рассмотрим первое из равенств системы (*). Выпишем выражение для вариации первой квадратичной формы $\delta I = \delta g_{11}\xi^2 + 2\delta g_{12}\xi\eta + \delta g_{22}\eta^2$. Преобразуем это выражение, использовав формулы (9), имеем:

$$\delta I = \left(2\alpha_1^1 g_{11} + 2\alpha_1^2 g_{21}\right)\xi^2 + 2\left(\alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_2^1 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}\right)\xi\eta + \left(2\alpha_2^1 g_{12} + 2\alpha_2^2 g_{22}\right)\eta^2.$$

Перегруппируем полученное выражение и подставим его в первое из равенств (*), получим следующее выражение:

$$\alpha_1^1\left(2g_{11}\xi^2 + 2g_{12}\xi\eta\right) + \alpha_1^2\left(2g_{21}\xi^2 + 2g_{22}\xi\eta\right) + \alpha_2^1\left(2g_{11}\xi\eta + 2g_{12}\eta^2\right) + \alpha_2^2\left(2g_{21}\xi\eta + 2g_{22}\eta^2\right) = \psi_1.$$

Разделим последнее равенство на 2 и учтем, что $\alpha_1^1 = \alpha_2^2$, а также используем формулу (15), имеем:

$$\alpha_1^2\left(g_{21}\xi^2 + g_{22}\xi\eta\right) + \alpha_2^1\left(g_{11}\xi\eta + g_{12}\eta^2\right) = \frac{\psi_1}{2} + \frac{\sigma}{2K}\cdot I, \tag{20}$$

где $I = g_{11}\xi^2 + 2g_{12}\xi\eta + g_{22}\eta^2$ – первая квадратичная форма поверхности S.

Рассмотрим второе из равенств системы (*).

Выпишем выражение для вариации второй квадратичной формы $\delta II = \delta b_{11}\xi^2 + 2\delta b_{12}\xi\eta + \delta b_{22}\eta^2$. Преобразуем это выражение, использовав формулы (10), имеем:

$$\delta II = \left(\alpha_1^1 b_{11} + \alpha_1^2 b_{12}\right)\xi^2 + \left(\alpha_1^1 b_{12} + \alpha_1^2 b_{22}\right)\xi\eta + \left(\alpha_2^1 b_{12} + \alpha_2^2 b_{22}\right)\eta^2.$$

Перегруппируем полученное выражение и подставим его во второе из равенств (*), получим следующее выражение:

$$\alpha_1^1\left(b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta\right) + \alpha_1^2\left(b_{12}\xi^2 + 2b_{22}\xi\eta\right) + \alpha_2^1 b_{12}\eta^2 + \alpha_2^2 b_{22}\eta^2 = \psi_2.$$

С учетом того, что $\alpha_1^1 = \alpha_2^2$, а также формул (15), получаем:

$$\alpha_1^2\left(b_{12}\xi^2 + 2b_{22}\xi\eta\right) + \alpha_2^1 b_{12}\eta^2 = \psi_2 + \frac{\sigma}{2K}\cdot II, \tag{21}$$

где $II = b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + b_{22}\eta^2$ – вторая квадратичная форма поверхности S. Так как в нашем случае $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$, то равенство (21) окончательно принимает следующий вид:

$$\alpha_1^2 b_{12}\xi^2 + \alpha_2^1 b_{12}\eta^2 = \psi_2 + \frac{\sigma}{2K} \cdot II. \tag{22}$$

Объединим уравнения (20) и (22) в систему, в результате получим систему уравнений, эквивалентную системе (*):

$$\begin{cases} \alpha_1^2 \left(g_{21}\xi^2 + g_{22}\xi\eta\right) + \alpha_2^1 \left(g_{11}\xi\eta + g_{12}\eta^2\right) = \frac{\psi_1}{2} + \frac{\sigma}{2K} \cdot I, \\ \alpha_1^2 b_{12}\xi^2 + \alpha_2^1 b_{12}\eta^2 = \psi_2 + \frac{\sigma}{2K} \cdot II. \end{cases} \tag{23}$$

Система уравнений (23) состоит из двух уравнений и имеет две неизвестных функции. Покажем, что определитель Δ системы (23) отличен от нуля.

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{21}\xi^2 + g_{22}\xi\eta & g_{11}\xi\eta + g_{12}\eta^2 \\ b_{12}\xi^2 & b_{12}\eta^2 \end{vmatrix} = b_{12}\left(g_{21}\xi^2\eta^2 + g_{22}\xi\eta^3 - g_{11}\xi^3\eta - g_{12}\xi^2\eta^2\right) =$$

$$= b_{12}\left(g_{22}\xi\eta^3 - g_{11}\xi^3\eta\right) = \left(b_{12}g_{22}\eta^2 - b_{12}g_{11}\xi^2\right)\xi\eta \neq 0.$$

Последнее выражение в ноль не обращается по следующим причинам:

1. $\left(b_{12}g_{22}\eta^2 - b_{12}g_{11}\xi^2\right) \neq 0$, так как является частным случаем (при $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$) левой части следующей формулы $\left(b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11}\right)\xi^2 + \left(b_{11}g_{22} - b_{22}g_{11}\right)\xi\eta + \left(b_{12}g_{22} - b_{22}g_{12}\right)\eta^2 = 0$, которая является критерием того, что выбранное направление является главным. Но мы в начале этого пункта задали отношение $(\xi{:}\eta)$ так, чтобы направление, задаваемое этим отношением не являлось главным ни в одной точке кривой Γ_3.

2. $\xi\eta \neq 0$ по той же причине; ξ и η одновременно в ноль не обращаются, а одна из этих функций может оказаться нулем, только в случае выбора главного направления, подробнее см. [7, с. 260 – 261].

Итак, определитель Δ системы (23) отличен от нуля, следовательно, система (23) имеет единственное решение, которое может быть найдено по правилу Крамера. Для этого запишем еще два определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\psi_1}{2} + \frac{\sigma}{2K} \cdot I & g_{11}\xi\eta + g_{12}\eta^2 \\ \psi_2 + \frac{\sigma}{2K} \cdot II & b_{12}\eta^2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{21}\xi^2 + g_{22}\xi\eta & \frac{\psi_1}{2} + \frac{\sigma}{2K} \cdot I \\ b_{12}\xi^2 & \psi_2 + \frac{\sigma}{2K} \cdot II \end{vmatrix} \tag{24}$$

Таким образом, задание условий (*) вдоль границы Γ_3, эквивалентно заданию вдоль Γ_3 неизвестных функций:

$$\alpha_1^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \alpha_2^1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{25}$$

где Δ – определитель системы (23), а Δ_1 и Δ_2 определяются формулами (24).

Вывод. Задача отыскания поля бесконечно малой MG-деформации поверхности S, при заданных начальных условиях, свелась к задаче Коши для канонической гиперболической системы уравнений в частных производных (19) с начальными условиями (25).

Решение этой задачи существует и единственно [6, с. 367 – 368]. Следовательно, существуют и единственны α_1^2 и α_2^1, а значит существуют единственные $\partial_1\vec{y}$ и $\partial_2\vec{y}$. Отсюда следует, что существует единственный полный дифференциал $d\vec{y} = \partial_1\vec{y}du + \partial_2\vec{y}dv$, интегрируя который, с учетом точечного условия $\vec{y}_{M_0} = \vec{C}$, можно получить единственное векторное поле $\vec{y}$. Отсюда следует справедливость теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова-Каратопраклиева, И. Изгибание поверхностей I / И. Иванова-Каратопраклиева, И. Х. Сабитов // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии. ВИНИТИ. — 1991. — № 23. — С. 131–184.

2. Жуков, Д. А. Бесконечно малые MG-деформации поверхности положительной гауссовой кривизны при стационарности четвертой квадратичной формы поверхности вдоль края / Д. А. Жуков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 85–92.

3. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия : первое знакомство / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. — М. : Изд–во МГУ, 1990. — 384 с.

4. Фоменко, В. Т. Об одном аналоге теоремы Зауера / В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 3. — С. 463–470.

5. Розендорн, Э. Р. Теория поверхностей. 2-е изд., перераб. и доп. / Э. Р. Розендорн. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 304 с.

6. Курант, Р. Методы математической физики. Том 2 / Р. Курант, Д. Гильберт. — М.-Л. : ГТТИ, 1945. — 620 с.

7. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. — М.-Л. : ГТТИ, 1950. — 428 с.

REFERENCES

1. Ivanova-Karatopraclieva I., Sabitov I.X. Bendings of the surfaces I. [Ivanova-Karatopraclieva I., Sabitov I.X. Izgibania poverxnost'ei I.]. *Itogi nauki I texniki. Seria: Problemi geometrii — Summary of science and technique. Series: Problems of Geometry, VINITI*, 1991, no. 23, pp. 131–184.

2. Zhukov D.A. The infinitesimal MG-deformations of a surface with positive Gaussian curvature with stationary forth quadratic form of a surface along boundary. [Zhukov D.A. Beskonechno malye MG-deformacii poverxnosti polozhitel'noi gaussovoi krivizny pri stacionarnosti chetvertoi kvadratichnoi formy poverxnosti vdol' kraya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 85–92.

3. Pozniak E.G., Shikin E.V. Differential geometry: first acquaintance. [Pozniak E.G., Shikin E.V. Differencial'naya geometria: pervoe znakomstvo]. Moscow: Moscow University, 1990, 384 p.

4. Fomenko V.T. On one analogue of the Sauer theorem. [Fomenko V.T. Ob odnom analoge teoremy Zauera]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, iss. 3, pp. 463–470.

5. Rozendorn E.R. The theory of surfaces. [Rozendorn E.R. Teoriya poverxnostei]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 304 p.

6. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. 2. [Courant R., Hilbert D. Metody matematicheskoi fiziki. T. 2]. Moscow-Leningrad: GTTI, 1945, 620 p.

7. Rashevsky P.K. Course of differential geometry. [Rashevsky P.K. Kurs differencial'noi geometrii]. Moscow-Leningrad: GTTI, 1950, 428 p.

Жуков Дмитрий Александрович, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры геометрии Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
E-mail: fossil.new@yandex.ru, dzhukov@sfedu.ru

Zhukov Dmitry Alexandrovich, candidate of sciences in physics and mathematics, department of geometry, Institute for mathematics, mechanics and computer science in the name of I. I. Vorovich, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
E-mail: fossil.new@yandex.ru, dzhukov@sfedu.ru