

РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА*

Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева

Южный Федеральный Университет

Поступила в редакцию 22.02.2016 г.

Аннотация. Метод годографа, основанный на законах сохранения, использован для решения системы квазилинейных эллиптических уравнений в частных производных первого порядка, описывающих модель зонального электрофореза. Построена функция Римана–Грина, позволяющая получить решение в неявной форме. Предложен аналитико-численный метод восстановления явного решения на линиях уровня неявного решения. Этот метод базируется на построении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой позволяет получить явное решение исходной задачи в параметрической форме. Рассмотрены примеры задач с различными периодическими данными.

Ключевые слова: эллиптические квазилинейные уравнения, пространственно-периодические начальные данные, метод годографа, зональный электрофорез.

THE SOLUTION OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH PERIODIC DATA FOR ZONE ELECTROPHORESIS PROBLEM

T. F. Dolgikh, M. Yu. Zhukov, E. V. Shiryayeva

Abstract. The hodograph method based on the conservation laws used for construct of implicit form solution for a system of first order quasilinear elliptic equations. These equations describe the model of zone electrophoresis. We construct the Riemann–Green function which allows us to obtain the solution in implicit form. Analytical-numerical method for recovery of an explicit solution on the level lines implicit solutions is proposed. This method is based on the construction of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations whose solution allows us to obtain an explicit solution in parametric form for the original problem. Examples of solutions with a variety of periodic data is studied.

Keywords: quasilinear elliptic equations, spatially periodic initial data, hodograph method, zonal electrophoresis.

* Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ (М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева) и в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, Задание № 1.1398.2014/К (Т. Ф. Долгих).

© Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., 2017

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача о переносе вещества в двухкомпонентной смеси под действием электрического поля, известная как задача о зональном электрофорезе — методе разделения смеси на индивидуальные компоненты, который широко используется в биологии и медицине. В работе представлена модель переноса вещества без учёта диффузии. Связано это с тем, что на стадии разделения смеси на отдельные компоненты (начальная стадия зонального электрофореза) диффузионные эффекты менее значимы, чем электромиграционные [1], [2], [3]. Система квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, описывающая процесс, обычно имеет гиперболический тип. Для таких уравнений рассматривается задача Коши с начальными данными, определяющими распределение веществ в начальный момент времени.

Оказывается, что в случаях, когда концентрация компонент смеси велика и проводимость всей смеси в целом может уменьшаться при увеличении концентраций, тип квазилинейных уравнений изменяется на эллиптический. Для таких уравнений, как правило, не принято говорить о начальных данных, но по смыслу это задание концентраций в начальный момент времени, и в дальнейшем сохранено название задачи Коши для эллиптических уравнений. Следует отметить, что в случае квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка независимые переменные времени t и координаты x в некотором смысле равноправны, и о задаче с данными на какой-либо линии принято говорить как о задаче Коши (см. [4]).

Сплошные среды, которые описываются эллиптическими уравнениями, ведут себя подобно неустойчивым квазигазовым средам типа газа Чаплыгина [5]. Для исследования таких сред часто используются периодические начальные данные, позволяющие проследить образование пространственно-временных структур. Именно такие начальные данные для уравнений электрофореза и использованы в предлагаемой работе. Удалось обнаружить и проследить образование солитоноподобных и кинкоподобных структур, возникающих при эволюции решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель зонального электрофореза в бездиффузионном приближении описывается системой уравнений [2], [3], [6], [7]

$$u_t^1 + \mu^1 \mu^2 \left(\frac{\mu^1 u^1}{1+s} \right)_x = 0, \quad u_t^2 + \mu^1 \mu^2 \left(\frac{\mu^2 u^2}{1+s} \right)_x = 0, \quad (1)$$

где $u^k = u^k(x, t)$ и $\mu^k > 0$ ($k = 1, 2$) — «эффективные» концентрации и постоянные подвижности компонент смеси соответственно.

Полная проводимость всей смеси равна $1+s = 1+u^1+u^2 > 0$. Заметим, что эффективные концентрации u^k могут принимать положительные и отрицательные значения, так как они определяются через концентрации компонент смеси и их зарядности.

Система (1) имеет инварианты Римана и представима в виде [2], [8]

$$R_t^i + \lambda^i R_x^i = 0, \quad \lambda^i = R^i R^1 R^2, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где

$$R^1 = \frac{B - \sqrt{D}}{2A}, \quad R^2 = \frac{B + \sqrt{D}}{2A},$$

$$A = 1+s, \quad B = \mu^1 + \mu^2 + u^1 \mu^2 + u^2 \mu^1, \quad C = \mu^1 \mu^2, \quad D = B^2 - 4AC.$$

Здесь значение величины D определяет тип уравнений (1). На (u^1, u^2) -плоскости линия $D = 0$ является параболой. Известно, что в области $D > 0$, $1 + s > 0$ тип уравнений гиперболический, в области $D < 0$ — эллиптический [3].

Связь между переменными уравнений (1) и (2) даётся соотношениями

$$u^1 = \frac{\mu^2(R^1 - \mu^1)(R^2 - \mu^1)}{R^1 R^2 (\mu^1 - \mu^2)}, \quad u^2 = \frac{\mu^1(R^1 - \mu^2)(R^2 - \mu^2)}{R^1 R^2 (\mu^1 - \mu^2)}. \quad (3)$$

Эллиптичность уравнений (1) соответствует комплексно сопряжённым собственным значениям λ^i и инвариантам Римана R^i .

Удобно далее использовать замену переменных $R^i = \frac{1}{K^i}$, $i = 1, 2$. Тогда в новых переменных уравнения (2) примут вид

$$K_t^1 + \Lambda^1 K_x^1 = 0, \quad K_t^2 + \Lambda^2 K_x^2 = 0, \quad (4)$$

где

$$\Lambda^1 = \frac{1}{K^1 K^1 K^2}, \quad \Lambda^2 = \frac{1}{K^2 K^1 K^2}.$$

Для уравнений (4) на некотором контуре

$$\Gamma = \{(x, t) : x = x(\tau), t = t(\tau), a \leq \tau \leq b\}, \quad (5)$$

не являющимся характеристикой, определены начальные данные

$$K^1|_{\Gamma} = K_0^1(\tau), \quad K^2|_{\Gamma} = K_0^2(\tau). \quad (6)$$

Здесь $K_0^i(\tau)$ ($i = 1, 2$) — заданные функции.

2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Решение задачи Коши (4)–(6) строим при помощи метода годографа в форме, предложенной в [9] и развитой в работах [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14]. Замена $(K^1, K^2) \Leftrightarrow (x, t)$ позволяет получить неявные решения $t = t(K^1, K^2)$ и $x = x(K^1, K^2)$ уравнений (4), по которым можно восстановить явный вид неизвестных функций $u^1(x, t)$, $u^2(x, t)$, используя соотношения (3).

Следуя [9], предположим, что для (4) имеется закон сохранения

$$\varphi_t + \psi_x = 0,$$

где $\varphi(K^1, K^2)$ — плотность, $\psi(K^1, K^2)$ — плотность потока, для которых выполнены условия

$$\psi_{K^1} = \Lambda^1 \varphi_{K^1}, \quad \psi_{K^2} = \Lambda^2 \varphi_{K^2}. \quad (7)$$

Условия разрешимости приводят к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi_{K^1 K^2} - \frac{1}{K^2 - K^1} \varphi_{K^1} + \frac{1}{K^2 - K^1} \varphi_{K^2} = 0, \quad (8)$$

$$\psi_{K^1 K^2} + \frac{K^1}{K^2(K^1 - K^2)} \psi_{K^1} - \frac{K^2}{K^1(K^1 - K^2)} \psi_{K^2} = 0. \quad (9)$$

Для определения функций $\varphi(K^1, K^2)$, $\psi(K^1, K^2)$ эти уравнения дополняются условиями

$$(\psi - \Lambda^1 \varphi)|_{K^1=k^1} = 1, \quad (\psi - \Lambda^2 \varphi)|_{K^2=k^2} = -1; \quad (10)$$

$$(\psi - \Lambda^1 \varphi)|_{K^1=k^1} = \Lambda^1|_{K^1=k^1}, \quad (\psi - \Lambda^2 \varphi)|_{K^2=k^2} = -\Lambda^2|_{K^2=k^2}. \quad (11)$$

Оказывается, что в качестве решения $\varphi(K^1, K^2)$ задачи (8), (10) с точностью до множителей можно выбрать функцию Римана–Грина

$$\varphi^t(K^1, K^2) = \frac{2}{\Lambda^2(k^1, k^2) - \Lambda^1(k^1, k^2)} \Phi(K^1, K^2|k^1, k^2).$$

Тогда, согласно условиям (7), полагая $K^1 = k^1$, $K^2 = k^2$, получаем

$$\psi^t(k^1, k^2) = \frac{\Lambda^1(k^1, k^2) + \Lambda^2(k^1, k^2)}{2} \varphi^t(k^1, k^2).$$

Вид функции Римана–Грина $\Phi(K^1, K^2|k^1, k^2)$ для исследуемых уравнений хорошо известен [15]

$$\Phi(K^1, K^2|k^1, k^2) = \frac{(K^1 + K^2)(k^1 + k^2) - 2K^1K^2 - 2k^1k^2}{(k^1 - k^2)^2}.$$

Плотность потока $\psi(K^1, K^2)$ определяется из задачи (9), (11)

$$\psi^x(K^1, K^2) = \frac{2\Lambda^1(k^1, k^2)\Lambda^2(k^1, k^2)}{\Lambda^2(k^1, k^2) - \Lambda^1(k^1, k^2)} \Phi(K^1, K^2|k^1, k^2).$$

Для определения функции потока достаточно проинтегрировать одно из уравнений в (7). Тогда

$$\varphi^x(k^1, K^2) = \frac{\psi^x(k^1, K^2)}{\Lambda^1(k^1, K^2)} - 1 \quad \text{или} \quad \varphi^x(K^1, k^2) = \frac{\psi^x(K^1, k^2)}{\Lambda^2(K^1, k^2)} + 1.$$

Рассмотрим случай, когда контур Γ , определённый (5), является отрезком оси $t = t_0$. Тогда, начальные условия (6) запишутся в виде

$$K^1|_{t=t_0} = K_0^1(\tau), \quad K^2|_{t=t_0} = K_0^2(\tau), \quad a \leq \tau \leq b. \quad (12)$$

Отсюда следует, что

$$k^2 = K_0^2(a), \quad k^1 = K_0^1(b). \quad (13)$$

Неявное решение задачи Коши (4), (12) имеет вид

$$t = t_0 + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^t d\tau, \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^x d\tau. \quad (14)$$

Таким образом, выбор отрезка $t = t_0$ в качестве начального условия упрощает вычисления, в частности, отпадает необходимость в определении функции ψ^t .

В случае, когда инварианты Римана K^1 , K^2 комплексно сопряжены, ключевым моментом в построении решения поставленной задачи Коши (4), (12) будет требование комплексной сопряжённости параметров a и b в (5).

Введём следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= u + iv, & \mathbf{b} &= u - iv, & \mathbf{a}^* &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{K} &= K^1 = P + iQ, & \mathbf{K}^* &= K^2 = P - iQ, \\ \mathbf{k} &= k^1 = p + iq, & \mathbf{k}^* &= k^2 = p - iq, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$P = P(u, v), \quad Q = Q(u, v), \quad p = p(u, v), \quad q = q(u, v)$$

вещественные функции от вещественных переменных u, v .

Таким образом, в комплексной форме задача (4), (12) запишется в виде

$$\mathbf{K}|\mathbf{K}|^2\mathbf{K}_t + \mathbf{K}_x = 0, \quad \mathbf{K}|_{t=t_0} = \mathbf{K}_0(\tau). \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{K}_0(\tau) = P_0(\tau) + iQ_0(\tau)$ — известная функция.

Соотношения (14) с учётом введённых замен и равенств (13) и (15) переписутся следующим образом

$$t(u, v) = t_0 + \frac{(p^2 + q^2)^2(4iv(p^2 + q^2) + 2pF - 2G)}{(2iq)^3},$$

$$x(u, v) = u + \frac{2(p^2 + q^2)F - 2pG - 2ipv(4p^2 - 6(p^2 + q^2))}{(2iq)^3},$$

где

$$F(u, v) = 2 \int_{u+iv}^{u-iv} P_0(\tau) d\tau, \quad G(u, v) = \int_{u+iv}^{u-iv} (P_0^2(\tau) + Q_0^2(\tau)) d\tau.$$

Легко показать, что функции $F(u, v)$ и $G(u, v)$ — чисто мнимые. Обозначим

$$F^0(u, v) = \text{Im } F(u, v), \quad G^0(u, v) = \text{Im } G(u, v).$$

Очевидно, что функции F^0, G^0 — вещественные функции, зависящие от вещественных переменных u, v .

Используя (15), из начального условия в (16) получим соотношения для функций p и q

$$p(u, v) = \text{Re } \mathbf{K}_0(b), \quad q(u, v) = \text{Im } \mathbf{K}_0(b).$$

Таким образом, получаем неявное решение задачи Коши (16)

$$t(u, v) = t_0 - \frac{(p^2 + q^2)^2(pF_0 - G_0 + 2v(p^2 + q^2))}{4q^3}, \quad (17)$$

$$x(u, v) = u - \frac{pG^0 - (p^2 + q^2)F_0 - 2p(p^2 + 3q^2)}{4q^3}, \quad (18)$$

которое полностью определено начальными условиями.

Для восстановления явного решение задачи Коши на некоторых линиях уровня неявного решения (изохронах), отвечающих фиксированным значениям $t = t_* = \text{const}$, решаем задачу Коши [3], [12], [14]

$$\frac{du}{d\rho} = -t_v(u, v)q^4(u, v), \quad \frac{dv}{d\rho} = t_u(u, v)q^4(u, v), \quad (19)$$

$$u|_{\rho=0} = u_*, \quad v|_{\rho=0} = v_*,$$

где ρ — некоторый параметр, а значения величин u_*, v_* идентифицируют изохрону $t_* = t(u_*, v_*)$.

Производные t_u, t_v вычисляются с помощью (17), а пространственная координата на изохроне $x = x(u(\rho), v(\rho))$ — с помощью (18).

Правая часть дифференциальных уравнений (19) определена с точностью до произвольного множителя. Используемый здесь множитель $q^4(u, v)$ позволяет избавиться от особенности правых частей в точке $q = 0$.

Определив значения $u(\rho)$, $v(\rho)$ на изохроне $t = t_*(u_*, v_*)$, найдём функции $p(u, v)$, $q(u, v)$. Далее вычислим концентрации компонент смеси, которые связаны с инвариантами Римана при помощи соотношений (3)

$$u^1 = \frac{\mu^2(1 - 2\mu^1 p + \mu^1 \mu^1 (p^2 + q^2))}{\mu^1 - \mu^2}, \quad (20)$$

$$u^2 = \frac{\mu^1(1 - 2\mu^2 p + \mu^2 \mu^2 (p^2 + q^2))}{\mu^2 - \mu^1}. \quad (21)$$

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим различные случаи пространственно-периодических начальных данных $K_0^1(\tau) = P_0 + iQ_0$, $K_0^2(\tau) = P_0 - iQ_0$ для задачи Коши (16) (см. также [3], [16]).

Для задания функций P_0 и Q_0 в формулах (22)–(24) введены обозначения: ε — амплитуда пространственно-периодического возмущения состояния равновесия $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$; α , β , γ — некоторые положительные параметры.

3.1. Пространственно-периодические данные. I

Пусть

$$P_0(\tau) = -\varepsilon(1 + \alpha \sin \beta\tau) \sin \tau, \quad (22)$$

$$Q_0(\tau) = 1 + \varepsilon(1 + \alpha \sin \beta\tau) \cos \tau.$$

Если известны $u(x, t)$, $v(x, t)$ — решение задачи Коши (19), то явное решение задачи определяется соотношениями

$$p(x, t) = -\varepsilon e^v (1 + \alpha \sin \beta u \operatorname{ch} \beta v) \sin u + \alpha \varepsilon e^v \cos \beta u \operatorname{sh} \beta v \cos u,$$

$$q(x, t) = 1 + \alpha \varepsilon e^v \cos \beta u \operatorname{sh} \beta v \sin u + \varepsilon e^v (1 + \alpha \sin \beta u \operatorname{ch} \beta v) \cos u.$$

Результаты расчётов для концентраций компонент смеси $u^1(x, t)$, $u^2(x, t)$ представлены на рисунке 1, где видно, что с течением времени происходит качественное изменение поведения решения.

3.2. Пространственно-периодические данные. II

Пусть теперь

$$P_0(\tau) = -\varepsilon(1 + \alpha \sin \beta\tau) \sin \tau, \quad (23)$$

$$Q_0(\tau) = 1 + \varepsilon(1 + \alpha \cos \beta\tau) \cos \tau.$$

В этом случае функции $p(x, t)$ и $q(x, t)$ также имеют явный вид и не приведены здесь только ввиду громоздкости выражений.

На рисунке 2 показаны результаты расчётов для задачи Коши (16) с начальными данными (23).

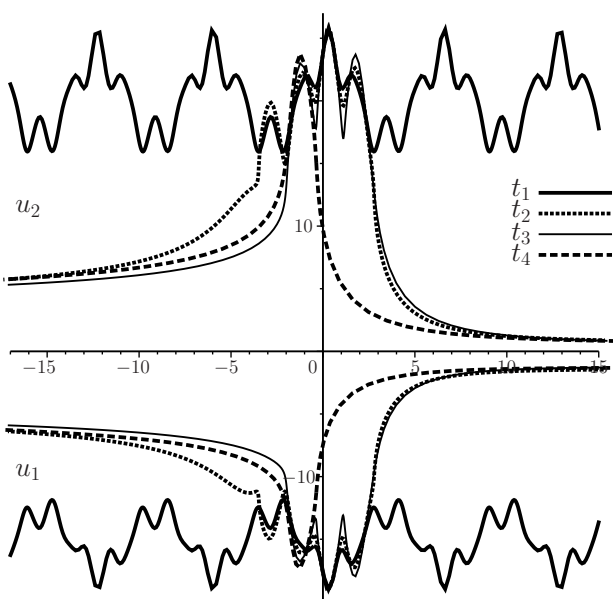


Рис. 1. Концентрации компонент смеси $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ для начальных условий (22) в моменты времени $t_1 = 0.2638$, $t_2 = 0.4998$, $t_3 = 0.6663$, $t_4 = 0.7904$; $u_* = -0.2$, $v_* = -0.30$, -0.63 , -0.95 , -1.20 , соответственно; $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.5$

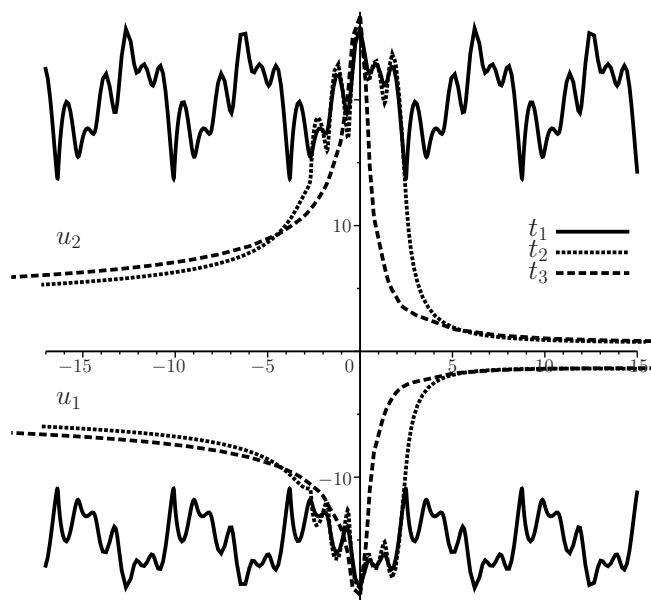


Рис. 2. Концентрации компонент смеси $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ для начальных условий (23) в моменты времени $t_1 = 0.1516$, $t_2 = 0.2298$, $t_3 = 0.4029$; $u_* = 0$, $v_* = -0.10$, -0.15 , -0.25 , соответственно; $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 5$

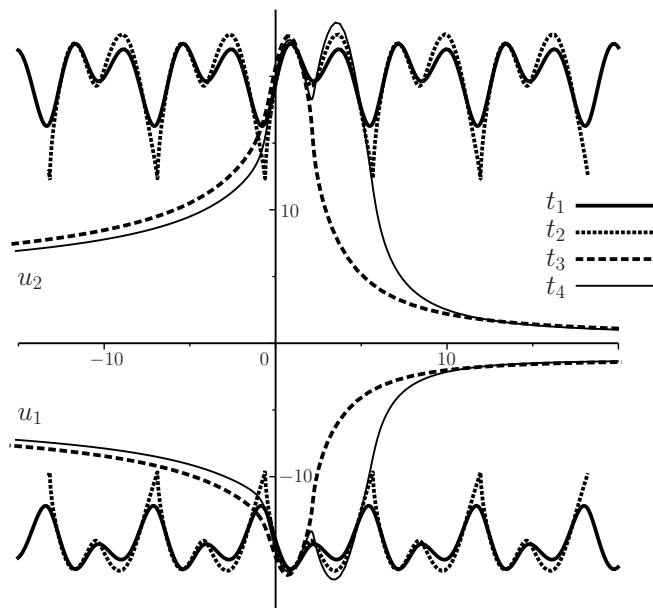


Рис. 3. Концентрации компонент смеси $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ для начальных условий (24) в моменты времени $t_1 = 0.2638$, $t_2 = 0.4998$, $t_3 = 0.6663$, $t_4 = 0.7904$; $u_* = -0.2$, $v_* = -0.30$, -0.63 , -0.95 , -1.20 , соответственно; $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.5$

3.3. Пространственно-периодические данные. III

Для задачи Коши со следующими начальными пространственно-периодическими данными

$$P_0(\tau) = -\alpha\varepsilon \sin \tau, \tag{24}$$

$$Q_0(\tau) = 1 + \gamma\varepsilon \sin \beta\tau,$$

явное решение запишется в виде

$$p(x, t) = -\alpha\varepsilon \operatorname{ch} v \sin u + \gamma\varepsilon \operatorname{sh} \beta v \cos \beta u,$$

$$q(x, t) = 1 + \alpha\varepsilon \operatorname{sh} v \cos u + \gamma\varepsilon \operatorname{ch} \beta v \sin \beta u.$$

На рисунке 3 показаны распределения концентраций компонент смеси в различные моменты времени. Видно, что происходит переход от одного семейства решений к другому, который требует дополнительного исследования, например, на основе изучения поведения функций $t(u_*, v)$, $t_u(u_*, v)$, $t_v(u_*, v)$ [3].

4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Качественные изменения с течением времени решений задачи (16) с начальными данными (22)–(24) особенно отчётливо видны для величин $p(x, t_*)$, $q(x, t_*)$.

Например, на рисунках 4, 5 прослеживается переход от первоначального пространственно-периодического возмущения (24) к солитоноподобному профилю для $q(x, t)$ и кинкоподобному профилю для $p(x, t)$. Причём этот переход возникает в момент, когда производные $p_x(x, t_*)$, $q_x(x, t_*)$ обращаются в бесконечность.

Изменение структуры решения связано с обращением в нуль якобиана для преобразования годографа

$$J(x, t) = x_u t_v - x_v t_u.$$

На рисунке 6 показана перестройка якобиана для соответствующих решений на рисунках 4, 5.

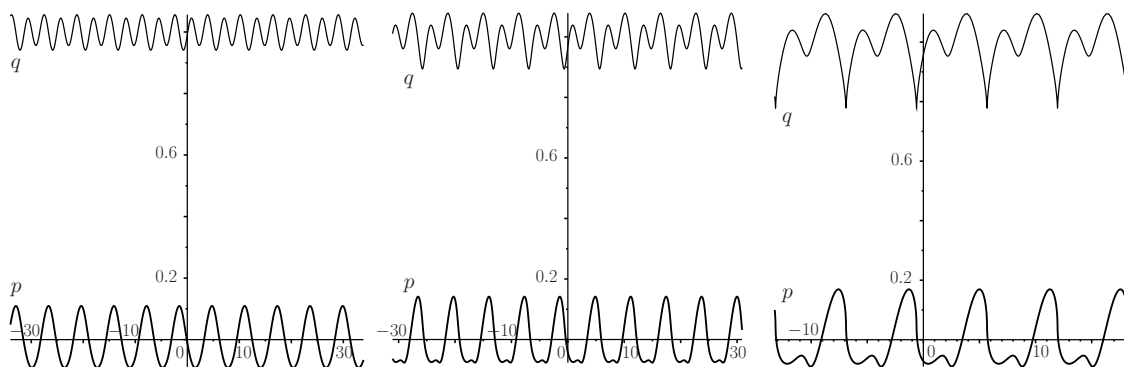


Рис. 4. Функции $p(x,t)$, $q(x,t)$ в моменты времени $t_1 = 0.0923$, $t_2 = 0.3420$, $t_3 = 0.4998$; $u_* = -0.2$, $v_* = -0.10, -0.40, -0.63$, соответственно; $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.5$

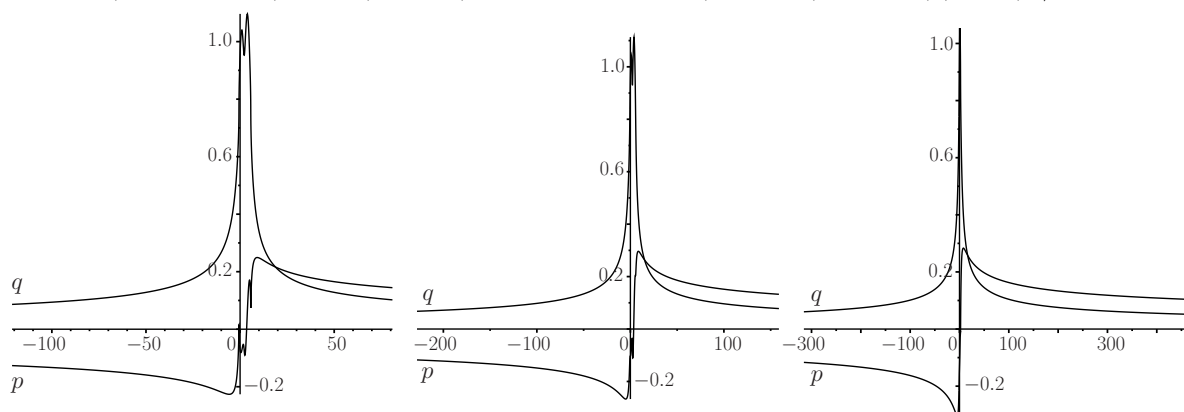


Рис. 5. Функции $p(x,t)$ (снизу), $q(x,t)$ (сверху) в моменты времени $t_4 = 0.5059$, $t_5 = 0.6436$, $t_6 = 0.7904$; $u_* = -0.2$, $v_* = -0.64, -0.90, -1.20$, соответственно; $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.5$

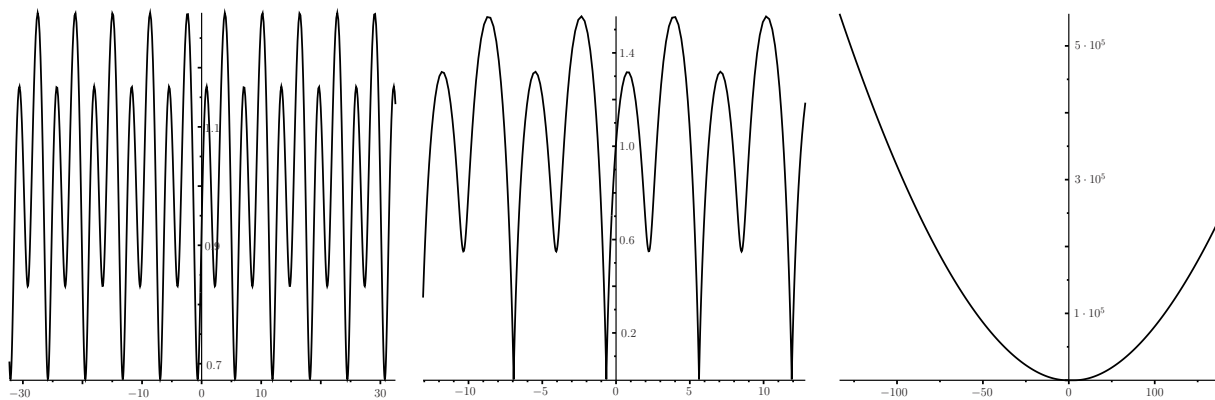


Рис. 6. Якобиан преобразования годографа $J(x,t)$ в моменты времени $t_2 = 0.3420$, $t_4 = 0.5059$, $t_5 = 0.6436$; $u_* = -0.2$, $v_* = -0.40, -0.64, -0.90$, соответственно; $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.5$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые примеры показывают, что в двухкомпонентной смеси в случае малых периодических возмущений начальных концентраций возможно спонтанное возникновение пространственно-временных структур. Вместо обычного переноса и разделения смеси на

отдельные компоненты (как в случае гиперболических уравнений) происходит перестройка пространственно-периодических решений в солитоноподобные и кинкоподобные структуры с неограниченным ростом амплитуд с течением времени — поведение, типичное для неустойчивых сплошных сред. В практике проведения процесса зонального электрофореза это означает, что для смеси с большими концентрациями в случае слабых периодических возмущений, которые могут возникнуть по причине недостаточно стабилизированной постоянной напряжённости внешнего электрического поля, возможно возникновение локальных неоднородностей концентраций, растущих с течением времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babskii, V. G. Mathematical theory of electrophoresis / V. G. Babskii, M. Yu. Zhukov, V. I. Yudovich. — Plenum Press, NY, 1988. — 247 p.
2. Жуков, М. Ю. Массоперенос электрическим полем / М. Ю. Жуков. — Ростов-на-Дону : Изд. РГУ, 2005. — 216 с.
3. Жуков, М. Ю. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Т. Ф. Долгих. — Ростов-на-Дону : Изд. ЮФУ, 2015. — 126 с.
4. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М. : Наука, 1978. — 687 с.
5. Жданов, С. К. Квазигазовые неустойчивые среды / С. К. Жданов, Б. А. Трубников. — М. : Наука, 1991. — 176 с.
6. Жуков, М. Ю. Метод годографа для решения задачи о движении двухкомпонентной смеси под действием электрического поля / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева // Труды XVII Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 14.10–17.10.2014. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2014. — Т. 1. — С. 191–195.
7. Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part II. Zonal Electrophoresis Equations / M. Yu. Zhukov, E. V. Shiryaeva // <http://arxiv.org/abs/1503.01762>. — 2015. — 23 p.
8. Елаева, М. С. Разделение двухкомпонентной смеси под действием электрического поля / М. С. Елаева // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 6. — С. 1143–1159.
9. Senashov, S. I. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // SIGMA. — 2012. — V. 8, 071. — 16 p.
10. Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations / M. Yu. Zhukov, E. V. Shiryaeva // <http://arxiv.org/abs/1410.2832>. — 2014. — 19 p.
11. Senashov, S. I. Application of conservation laws to Dirichlet problem for elliptic quasilinear systems / S. I. Senashov, A. Yakhno // Int. J. of Non-Linear Mechanics. — 2016. — V. 85. — 5 p.
12. Жуков, М. Ю. Зональный электрофорез. Численно-аналитический метод решения прикладных задач в частных производных первого порядка / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Ф. А. Щитов // Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона». — 2015. — № 4. — 11 с.
13. Жуков, М. Ю. Построение явного решения для некоторого класса квазилинейных уравнений / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Ф. А. Щитов // Труды XVIII Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 7.11–10.11.2016. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2016. — Т. 1. — С. 199–203.
14. Елаева, М. С. Взаимодействие слабых разрывов и метод годографа для задачи о фракционировании двухкомпонентной смеси электрическим полем / М. С. Елаева, М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016.

— Т. 56, № 8. — С. 75–89.

15. Copson, E. T. On the Riemann-Green Function / E. T. Copson // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1958. — V. 1. — P. 324–348.

16. Долгих, Т. Ф. Уравнения эллиптического типа для зонального электрофореза / Т. Ф. Долгих // Труды XVIII Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 7.11–10.11.2016. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2016. — Т. 1. — С. 179–183.

REFERENCES

1. Babskii V.G., Zhukov M.Yu., Yudovich V.I. Mathematical theory of electrophoresis. Plenum Press, NY, 1988, 247 p.

2. Zhukov M.Yu. Mass transfer by an electric field. [Zhukov M.Yu. Massopereenos e'lektricheskim polem]. Rostov-on-Don, 2005, 216 p.

3. Zhukov M.Yu., Shiryayev E.V., Dolgikh T.F. The method of the hodograph for the solution of hyperbolic and elliptic quasilinear equations. [Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V., Dolgix T.F. Metod godografa dlya resheniya giperbolicheskix i e'llipticheskix kvazilinejnyx uravnenij]. Rostov-on-Don, 2015. 126 p.

4. Rogdestvensy B.L., Yanenko N.N. Systems of quasilinear equations. [Rozhdestvenskij B.L., Yanenko N.N. Sistemy kvazilinejnyx uravnenij]. Moscow: Nauka, 1978, 687 p.

5. Zhdanov S. K., Trubnikov B. A. Kazihanova unstable environment. [Zhdanov S.K., Trubnikov B.A. Kvazigazovye neustojchivye sredy]. Moscow: Nauka, 1991, 176 p.

6. Zhukov M.Yu., Shiryayev E.V. Hodograph method for solving the problem about the movement of two-component mixture under the influence of an electric field. [Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Metod godografa dlya resheniya zadachi o dvizhenii dvukomponentnoj smesi pod dejstviem e'lektricheskogo polya]. Proceedings of the XVII Int. Conf. «Modern problems of continuum mechanics», 14.10–17.10.2014. Rostov-on-Don, 2014, vol. 1, pp. 191–195.

7. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part II. Zonal Electrophoresis Equations. <http://arxiv.org/abs/1503.01762>, 2015, 23 p.

8. Elaeva M.S. Separation of two component mixture under the influence of an electric field. [Elaeva M.S. Razdelenie dvukomponentnoj smesi pod dejstviem e'lektricheskogo polya]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 6, pp. 1143–1159.

9. Senashov S.I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity. *SIGMA*, 2012, vol. 8, 071, 16 p.

10. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations. <http://arxiv.org/abs/1410.2832>, 2014, 19 p.

11. Senashov S.I., Yakhno A. Application of conservation laws to Dirichlet problem for elliptic quasilinear systems. *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 2016, vol. 85, 5 p.

12. Zhukov M.Yu., Shiryayev E.V., Shitov F.A. Zonal electrophoresis. Numerical-analytical method for solving applied problems in partial derivatives of the first order. [Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V., Shhitov F.A. Zonal'nyj e'lektroforez. Chislenno-analiticheskij metod resheniya prikladnyx zadach v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *E'lektronnyj nauchnyj zhurnal «Inzhenernyj vestnik Dona» — Electronic scientific journal the «Engineering journal of Don»*, 2015, no. 4, 11 p.

13. Zhukov M.Yu., Shiryayev E.V., Shitov F.A. The construction of an explicit solution for a class of quasilinear equations. [Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V., Shhitov F.A. Postroenie yavnogo resheniya dlya nekotorogo klassa kvazilinejnyx uravnenij]. Proceedings of the XVIII Int. Conf. «Modern problems of continuum mechanics», 7.11–10.11.2016. Rostov-on-Don, 2016, vol. 1,

pp. 199–203.

14. Elaeva M.S., Zhukov M.Yu., Shiryayev E.V. The interaction of weak discontinuities and the hodograph method for the problem of two-component fractionation of the mixture by the electric field. [Elaeva M.S., Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Vzaimodejstvie slabyx razryvov i metod godografa dlya zadachi o frakcionirovanii dvukomponentnoj smesi e'lektricheskim polem]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 8, pp. 75–89.

15. Copson E.T. On the Riemann-Green Function. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 324–348.

16. Dolgikh T.F. Equation of elliptic type for zone electrophoresis. [Dolgix T.F. Uravneniya e'llipticheskogo tipa dlya zonal'nogo e'lektroforeza]. *Proceedings of the XVIII Int. Conf. «Modern problems of continuum mechanics»*, 7.11–10.11.2016. Rostov-on-Don, 2016, vol. 1, pp. 179–183.

Долгих Татьяна Федоровна, аспирант кафедры вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: dolgikh@sfedu.ru
Тел.: +7(863)297-51-11 (доб. 214)

Dolgikh Tatiana Fedorovna, post-graduate of Department Numerical Methods and Mathematic Physics, Institute of mathematics, mechanics and computer science of I. I. Vorovich, South Federal University, Rostov on Don, Russia
E-mail: dolgikh@sfedu.ru
Tel.: +7(863)297-51-11 (доб. 214)

Жуков Михаил Юрьевич, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики, профессор, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: myzhukov@sfedu.ru
Тел.: +7(863)297-51-11 (доб. 214)

Zhukov Michael Yurievich, professor, Head of Department Numerical Methods and Mathematic Physics, Institute of mathematics, mechanics and computer science of I. I. Vorovich, South Federal University, Rostov on Don, Russia
E-mail: myzhukov@sfedu.ru
Tel.: +7(863)297-51-11 (доб. 214)

Ширяева Елена Владимировна, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: evshiryayeva@sfedu.ru
Тел.: +7(863)297-51-11 (доб. 214)

Shiryayeva Elena Vladimirovna, associate professor of Department Numerical Methods and Mathematic Physics, Institute of mathematics, mechanics and computer science of I. I. Vorovich, South Federal University, Rostov on Don, Russia
E-mail: evshiryayeva@sfedu.ru
Tel.: +7(863)297-51-11 (доб. 214)