УДК 517.983

О МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ СУММОЙ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

Е. С. Болдырева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.09.2016 г.

Аннотация. В данной статье исследуется устойчивость дифференциального уравнения, правая часть которого представлена в виде суммы двух коммутирующих неограниченных операторов. Рассматривается случай бесконечномерного пространства и исследуются условия на производящие операторы полугрупп, стоящие в правой части уравнения. Целью статьи является разработка метода доказательства сильной устойчивости аналитических полугрупп, порожденных суммой двух коммутирующих неограниченных операторов. Доказательство основано на методах связанных с теоремой Томилова, теоремой Соломяка, Иосиды и с формулами Da Prato – Grisvard, Далецкого – Крейна.

Ключевые слова: полугруппа, резольвента, интегральное представление, устойчивость.

THE METHOD OF PROVING THE STABILITY OF SEMIGROUPS GENERATED BY SUM OF TWO OPERATORS

E. S. Boldyreva

Abstract. In this article we research the stability of differential equation; which right side is represented as the sum of two commuting unbounded operators. We study the case of infinite-dimensional space and investigate the conditions on generators of semigroups, which are located at the right-hand side of the equation. The aim of the article is to provide a method of proving the strong stability of analytic semigroups generated by the sum of two commuting unbounded operators. The proof is based on the methods associated with Tomilov's theorem, theorem of Solomyak, Yoshida and formulas of Da Prato – Grisvard and Daletskii – Crane.

Keywords: semigroup, resolvent, integral representation, stability.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье будет исследоваться сильная устойчивость полугрупп, порожденных суммой коммутирующих операторов.

Хорошо известен факт, что если линейные операторы A и B действуют в конечномерном пространстве и коммутируют, то из устойчивости каждой из полугрупп e^{At} и e^{Bt} следует устойчивость полугруппы $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

В случае бесконечномерного пространства для доказательства аналогичного утверждения мы будем опираться на результаты, изложенные T. Eisner [1], [2], [3], М. А. Красносельским [4], G. Da Prato et P. Grisvard [5] и E. Hille [6], K. Yosida [7], A. Pazy [8], R. Chill, Y. Tomilov [9], [10], K.-J. Engel, R. Nagel [11]. Приведем эти результаты ниже в удобной для нас форме.

Другие задачи с переменным оператором рассматривались М. И. Каменским [12]. Различные задачи теории устойчивости рассматривались И. М. Гудошниковым [13], В. А. Костиным [14], D.-H. Shi and D.-X. Feng [15].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. [1] Псевдо-спектральная граница (или абсцисса равномерной ограниченности резольвенты) $s_0(A)$ определяется следующей формулой

$$s_0(A) = \inf \left\{ a \in R : R(\lambda, A) \text{ ограничена на } \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > a\} \right\}.$$

Определение 2. [4] Полугруппа $T(\cdot)$ называется C_0-полугруппой или сильно непрерывной полугруппой, если выполнено условие:

$$\lim_{t \to s} \|T(t)x - T(s)x\|_X = 0,$$

для любого фиксированного $x \in X$.

Определение 3. [6] Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа операторов, действующих в банаховом пространстве X. Обозначим через A линейный оператор, определяемый как сильный предел

$$Ax = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}[T(\Delta t) - I]x$$

на тех элементах x, для которых указанный предел существует. Оператор A называется производящим оператором полугруппы $T(t)$.

Определение 4. [1] C_0-полугруппа $T(\cdot)$ в банаховом пространстве X называется сильно устойчивой, если $\lim\limits_{t \to \infty} \|T(t)x\| = 0$ для всех $x \in X$.

Теорема Томилова [1]. *Пусть A производящий оператор сильно-непрерывной полугруппы $T(\cdot)$ в банаховом пространстве X и удовлетворяет условию $s_0(A) \leqslant 0$ и $x \in X$. Рассмотрим следующие утверждения:*

а) $\lim\limits_{a \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|R(a+is, A)x\|^2\, ds = 0$, $\lim\limits_{a \to 0+} \sup a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|R(a+is, A^*)y\|^2\, ds < \infty$ *для всех* $y \in X^*$, *где пространство X^* — сопряженное к пространству X, а оператор A^* сопряженный к оператору A.*

б) $\lim\limits_{t \to \infty} \|T(t)x\| = 0$.

Тогда из (а) следует (б). Более того, если X — гильбертово пространство, тогда (а) эквивалентно (б).

В частности, условие (а) для всех $x \in X$ влечет сильную устойчивость $T(\cdot)$ и в гильбертовом пространстве эквивалентно этому условию.

Примечание 1. Резольвента $R(a + is, A)$ имеет следующий вид

$$R(a + is, A) = \int\limits_0^{\infty} e^{-(a+is)t} e^{At}\, dt = (A - (a + is)I)^{-1}.$$

Следствие из теоремы Томилова [1].*Пусть A производящий оператор ограниченной полугруппы $T(\cdot)$ в гильбертовом пространстве H и $x \in X$. Тогда $\|T(t)x\| \to 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{a\to 0+} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|R(a+is, A)x\|^2 \, ds = 0. \qquad (*)$$

В частности, $T(\cdot)$ сильно устойчива тогда и только тогда, когда (*) выполняется для каждого x в плотном множестве из H.

Также нам потребуется некоторые факты из теории аналитических полугрупп.

Определение 5. [4] Сильно-непрерывная полугруппа $T_t(\cdot)$ называется аналитической полугруппой, если она может быть аналитически продолжена в некоторый сектор

$$\Delta_\delta = \{\lambda \in C : |\arg\lambda| < \delta, \operatorname{Re}\lambda > 0\}, 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Теорема Соломяка, Иосиды [4]. *Для того чтобы оператор A был производящим оператором аналитической полугруппы $T(t)$, необходимо и достаточно, чтобы резольвентное множество $\Lambda(A)$ этого оператора содержало некоторую полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda > \sigma_0$, *где σ_0 — некоторое число, и чтобы при* $\operatorname{Re}\lambda > \sigma_0$ *выполнялось неравенство*

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{C}{1+|\lambda|}.$$

Кроме того нам потребуется результат из монографии [5].

Пусть A и B два замкнутых оператора, определенных на соответствующих областях D_A и D_B в X, и их резольвентные множества ρ_A и ρ_B не пусты.

Операторы A и B коммутируют в том смысле, что

$$[(A-\lambda)^{-1}; (B-\mu)^{-1}] = 0, \ \forall\, \lambda \in \rho_A \text{ и } \mu \in \rho_B,$$

то есть $(A-\lambda)^{-1}(B-\mu)^{-1} - (B-\mu)^{-1}(A-\lambda)^{-1} = 0$.

В аналитическом случае для вычисления резольвенты оператора $A+B$ необходимо найти решение уравнения

$$(A+B)x - (a+is)x = y. \qquad (1)$$

Для формулировки условий, следуя [5], удобно ввести следующее обозначение, пусть P линейное отображение с областью определения D_P в X и для $z \in \rho_P \subset \mathbb{C}$ определена резольвента $(P-z)^{-1}$. Пусть $\varphi \in [0;\pi]$, говорят, что P удовлетворяет $H(\varphi)$, если

1) $\rho_P \supset \Sigma_P = \{z \in \mathbb{C}; -\pi+\varphi < \arg z < \pi - \varphi\}$,

2) Существует четная выпуклая функция C_P, определенная на $[-\pi+\varphi; \pi-\varphi]$, такая, что

$$\|(P-z)^{-1}\| \leqslant \frac{C_P(\theta)}{|z|}, \text{ где } \arg z = \theta.$$

Пусть оператор A удовлетворяет условию $H(\theta_A)$ и оператор B удовлетворяет условию $H(\theta_B)$. Мы будем предполагать, что существуют θ_A и $\theta_B \geqslant 0$ такие, что

$$\theta_A + \theta_B < \pi.$$

Тогда один из углов θ_A или θ_B меньше $\frac{\pi}{2}$.

Тогда решение уравнения (1) задается оператором

$$S_\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (A - z - a - is)^{-1}(B+z)^{-1}\, dz, \quad a+is > 0,$$

где γ — кривая, соединяющая $\infty e^{-i\theta_0}$ с $\infty e^{i\theta_0}$ и определенная в $(\Sigma_A - a - is) \cap (\Sigma_{-B})$, где $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть A и B производящие операторы сильно-непрерывных аналитических полугрупп e^{At} и e^{Bt} в гильбертовом пространстве X и оператор A удовлетворяет условию $s_0(A) \leqslant 0$ и*

$$|(A - z - a - is)^{-1}| \leqslant \frac{C}{1 + |z + a + is|}, \quad \text{где } s \in R^1,\ z \in \rho_{A+B}.$$

Оператор B удовлетворяет условию $|(B + z)^{-1}| \leqslant \frac{C}{1+|z|}$. Операторы A и B коммутируют в том смысле, что

$$[(A - z - a - is)^{-1}, (B + z)^{-1}] = 0,$$

$(z + a + is)$ и $(-z)$ лежат в ρ_A и ρ_B соответственно.

Если полугруппа e^{At}, порожденная оператором A, будет сильно-устойчивой, то и полугруппа $e^{(A+B)t}$, порожденная оператором $(A + B)$, будет сильно устойчивой.

Доказательство. Рассмотрим $\lim\limits_{a\to 0} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|R(a+is, A+B)x\|^2\, ds$. Возьмем резольвенту в виде $R_\lambda = -\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (A - z - a - is)^{-1}(B + z)^{-1}\, dz$. Получаем

$$\lim_{a\to+0} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|R(a + is, A + B)x\|^2\, ds = \lim_{a\to+0} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|R(a + is, A + B)x\|^2\, ds =$$

$$= \lim_{a\to+0} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (A - z - a - is)^{-1}(B + z)^{-1}\, dz\, x \right\|^2 ds. \quad (2)$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\left\| \int\limits_\gamma (A - z - a - is)^{-1}(B + z)^{-1}\, dz \right\|^2$$

на контуре интегрирования, состоящем из ломаной с вершиной в точке σ_0, где σ_0 — некоторое число. Обозначим $\Pi_1(\alpha, \sigma_0) + \Pi_2(\alpha, \sigma_0)$ — ломаную, состоящую из двух лучей $\lambda = \sigma_0 + \rho e^{-i\alpha}$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$ и $\lambda = \sigma_0 + \rho e^{i\alpha}$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$, где α любое фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{C}\right)$. Имеем (делая замену $z = e^{\pm i\varphi}$, $dz = e^{\pm i\varphi}\, d\rho$)

$$\left\| \int\limits_\gamma (A - z - a - is)^{-1}(B + z)^{-1}\, dz \right\|^2 = \left\| \int\limits_{\Pi_1+\Pi_2} (A - z - a - is)^{-1}(B + z)^{-1}\, dz \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^\infty (A - \rho e^{i\varphi} - a - is)^{-1}(B + \rho e^{i\varphi})^{-1} e^{i\varphi}\, d\rho \right\|^2 + \left\| \int\limits_0^\infty (A - \rho e^{-i\varphi} - a - is)^{-1}(B + \rho e^{-i\varphi})^{-1} e^{-i\varphi}\, d\rho \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+|\rho e^{i\varphi}+a+is|^2}\cdot\frac{1}{1+|\rho e^{i\varphi}|^2}\,d\rho + \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+|\rho e^{-i\varphi}+a+is|^2}\cdot\frac{1}{1+|\rho e^{-i\varphi}|^2}\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+(a\sin\varphi - s\cos\varphi)^2}\cdot\frac{1}{1+\rho^2}\,d\rho + \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+(a\sin\varphi + s\cos\varphi)^2}\cdot\frac{1}{1+\rho^2}\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \frac{2}{4+4s^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{1}{1+\rho^2}\,d\rho = \frac{2\pi}{4+4s^2\cos^2\varphi}. \quad (3)$$

Следовательно, интеграл (3) будет сходящимся.

Поэтому, в выражении (2) мы можем воспользоваться обобщенным неравенством Минковского (см. [4]):

$$\lim_{a\to 0+} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (A-z-a-is)^{-1}(B+z)^{-1}\,dz\,x \right\|^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{4\pi^2}\lim_{a\to 0+} a \left[\int\limits_\gamma \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A-z-a-is)^{-1}(B+z)^{-1}x \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dz \right]^2. \quad (4)$$

Рассмотрим внутренний интеграл (делаем замену $z=\rho e^{\pm\varphi}$)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A-z-a-is)^{-1}(B+z)^{-1}x \right\|^2 ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A-\rho e^{i\varphi}-a-is)^{-1}(B+\rho e^{i\varphi})^{-1}x \right\|^2 ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A-\rho e^{-i\varphi}-a-is)^{-1}(B+\rho e^{-i\varphi})^{-1}x \right\|^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|\rho e^{i\varphi}+a+is|^2}\cdot\frac{1}{1+|\rho e^{i\varphi}|^2}\,ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|\rho e^{-i\varphi}+a+is|^2}\cdot\frac{1}{1+|\rho e^{-i\varphi}|^2}\,ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\rho\cos\varphi+a)^2+(\rho\sin\varphi+s)^2}\cdot\frac{1}{1+\rho^2}\,ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\rho\cos\varphi+a)^2+(s-s\sin\varphi)^2}\cdot\frac{1}{1+\rho^2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{1+\rho^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\rho\cos\varphi)^2+1}} \left(\operatorname{arctg}\left|\frac{s+\rho\sin\varphi}{\sqrt{(a+\rho\cos\varphi)^2+1}}\right| + \operatorname{arctg}\left|\frac{s-\rho\sin\varphi}{\sqrt{(a+\rho\cos\varphi)^2+1}}\right| \right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{2\pi}{1+\rho^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\rho\cos\varphi)^2+1}} < \infty,$$

следовательно, интеграл сходится.

Так как интеграл сходящийся, по теореме Лебега можно перейти к пределу под интегралом в выражении (4).

Имеем,

$$-\frac{1}{4\pi^2}\left[\int\limits_\gamma \left(\lim_{a\to 0+} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A-z-a-is)^{-1}(B+z)^{-1}x \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2, \quad (5)$$

так как внутренний интеграл сходится при фиксированном z и $(B+z)^{-1}$ ограничено, то, воспользовавшись условием следствия (см. [1]), получим, что

$$\lim_{a\to 0+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\|(A-z-a-is)^{-1}[(B+z)^{-1}x]\right\|^2\,ds=0.$$

Следовательно, все выражение (5) обращается в 0. Значит, полугруппа $e^{(A+B)t}$, порожденная оператором $(A+B)$, будет сильно-устойчивой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eisner, T. Stability of operators and operator semigroups / T. Eisner // Operator Theory : Advances and Applications (Basel). — 2010. — V. 209. — P. 204.

2. Eisner, T. A note on polynomially growing C_0-semigroups / T. Eisner, H. Zwart // Semigroup Forum. — 2007. — V. 75. — P. 438–445.

3. Eisner, T. Embedding operators into strongly continuous semigroups / T. Eisner // Arch. Math. (Basel). — 2009. — V. 92, № 5. — P. 451–460.

4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966. — 499 с.

5. Da Prato, G. Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationnelles / G. Da Prato et P. Grisvard // J. ds Maths. — 1975. — V. 54. — P. 305–387.

6. Hille, E. Functional analysis and semi-groups / E. Hille, Ralph S. Phillips // Providence, R.I. : American Mathematical Society. — 1957. — V. 31. — P. 808.

7. Yosida, K. Functional analysis / K. Yosida. — Berlin : Springer Verlag, 1978. — 475 p.

8. Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. — New Tork : Springer-Verlag, 1983. — 276 p.

9. Chill, R. Stability of Operator Semigroups : Ideas and Results. Perspectives in operator theory / R. Chill, Y. Tomilov // Warsaw : Banach center publications, Polish Acad. Sci. — 2007. — V. 75. — P. 71–109.

10. Chill, R. Stability of C_0-semigroups and geometry of Banach spaces / R. Chill, Y. Tomilov // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 2003. — V. 135. — P. 493–511.

11. Engel, K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel // Springer-Verlag New York. — 2000. — V. 194. — P. 589.

12. Каменский, М. И. Об устойчивости возмущенных полугрупп в полуупорядоченных банаховых пространствах / М. И. Каменский, И. М. Гудошников // СМФН. — 2016. — № 59. — С. 97–118.

13. Гудошников, И. М. Об устойчивости полугрупп, порожденных возмущенным дифференциальным оператором второй производной с условием Неймана / И. М. Гудошников // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 91–101.

14. Костин, В. А. К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп / В. А. Костин // Алгебра и анализ. — 1999. — Т. 11, № 1. — С. 118–140.

15. Shi, D.-H. Characteristic conditions of the generation of C_0-semigroups in a Hilbert space / D.-H. Shi, D.-X. Feng // J. Math. Anal. Appl. — 2000. — V. 247. — P. 356–376.

REFERENCES

1. Eisner T. Stability of operators and operator semigroups. Operator Theory: Advances and Applications (Basel), 2010, vol. 209, p. 204.

2. Eisner T., Zwart H. A note on polynomially growing C_0-semigroups, Semigroup Forum, 2007, vol. 75, pp. 438–445.

3. Eisner, T. Embedding operators into strongly continuous semigroups. Arch. Math. (Basel), 2009, vol. 92, no. 5, pp. 451–460.

4. Krasnosel'skii M.A., Zabreyko P.P., Pystylnik E.I., Sobolevski P.E. Integral operators in spaces of summable functions. [Krasnosel'skii M.A., Zabreyko P.P., Pystylnik E.I., Sobolevski P.E. Integral'nye operatory v prostranstvax summiruemyx funkcij]. Moscow: Nauka, 1966, 499 p.

5. G. Da Prato et P. Grisvard. Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationnelles. J. ds Maths, 1975, vol. 54, pp. 305–387.

6. Hille E., Ralph S. Phillips. Functional analysis and semi-groups. Providence, R.I. American Mathematical Society, 1957, vol. 31, p. 808.

7. Yosida K. Functional analysis. Berlin: Springer Verlag, 1978, 475 p.

8. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New Tork: Springer-Verlag, 1983, 276 p.

9. Chill R., Tomilov Y. Stability of Operator Semigroups: Ideas and Results. Perspectives in operator theory. Warsaw: Banach center publications, Polish Acad. Sci., 2007, vol. 75, pp. 71–109.

10. Chill R., Tomilov Y. Stability of C_0-semigroups and geometry of Banach spaces. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 2003, vol. 135, pp. 493–511.

11. Engel, K.-J., Nagel, R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer-Verlag New York, 2000, vol. 194, p. 589.

12. Kamenskii M.I., Gudoshnikov I.M. On stability of perturbed semigroups in partially ordered Banach spaces. [Ob ustojchivosti vozmushhennyx polugrupp v poluuporyadochennyx banaxovyx prostranstvax]. *SMFN — CMFD*, 2016, vol. 59, pp. 97–118.

13. Gudoshnikov I.M. On stability of semigroups generated byperturbed differential operator defined by second derivative and Neumann conditions. [Gudoshnikov I.M. Ob ustojchivosti polugrupp, porozhdennyx vozmushhennym differencial'nym operatorom vtoroj proizvodnoj s usloviem Nejmana]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 91–101.

14. Kostin V.A. On the Solomyak-Yosida theorem for analytic semigroups. [Kostin V.A. K teoreme Solomyaka–Iosidy dlya analiticheskix polugrupp]. *Algebra i analiz — Algebra and analysis*, 1999, vol. 11, no. 1, pp. 118–140.

15. Shi, D.-H., Feng, D.-X. Characteristic conditions of the generation of C_0-semigroups in a Hilbert space. J. Math. Anal. Appl., 2000, vol. 247, pp. 356–376.

Болдырева Елена Сергеевна, аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: elenaliapina11@mail.ru
Тел.: +7(473)220–87–71

Boldyreva Elena Sergeevna, Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: elenaliapina11@mail.ru
Tel.: +7(473)220–87–71