

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСИЛИТЕЛЯ МОЩНОСТИ D-КЛАССА НА ОСНОВЕ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Ю. Ю. Разуваев

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 02.02.2017 г.

**Аннотация.** Статья посвящена моделированию и расчету параметров усилителя D-класса на основе широтно-импульсной модуляции (ШИМ). Предлагается подход к расчету спектра ШИМ-сигнала и выходного сигнала усилителя с помощью прямого и обратного преобразований Фурье. Проводится расчёт и анализ влияния параметров LCR-фильтра на его амплитудно-частотную характеристику (АЧХ). Проводится расчет и анализ зависимости отношения сигнал-шум ( $SNR$ ) от параметров фильтра и частоты модулятора. Даются практические рекомендации для получения желаемого  $SNR$ . Работа может представлять интерес для разработчиков аналоговых и цифро-аналоговых схем.

**Ключевые слова:** усилитель мощности, усилитель D-класса, широтно-импульсная модуляция, математическое моделирование.

## MATHEMATICAL SIMULATION OF D-CLASS POWER AMPLIFIER ON BASIS OF PULSE WIDTH MODULATION

Yu. Yu. Razuvaev

**Abstract.** This paper is dedicated to simulation and calculation of the parameters of D-class Power Amplifier on basis of Pulse Width Modulation (PWM). Special approach is presented to calculate PWM-signal spectrum and output signal using direct and inverse Fourier transform. The calculation and analysis of LCR-filter gain-frequency characteristic are performed. The calculation and analysis of correlation between signal to noise ratio (SNR) and filter parameters and modulator frequency are performed. Practical recommendations are given for obtaining desired SNR. This paper can be interesting for analog and digital schemes developers.

**Keywords:** power amplifier, D-class amplifier, Pulse Width Modulation, mathematical simulation.

### ВВЕДЕНИЕ

В усилителях мощности D-класса [1, 2] силовые транзисторы работают в ключевом режиме, что обуславливает малые статические потери энергии и, как следствие, высокий коэффициент полезного действия (к.п.д.) [3, 4]. Ключевой режим работы транзисторов достигается за счёт преобразования аналогового сигнала в последовательность прямоугольных импульсов. Такое преобразование, как правило, осуществляется посредством широтно-импульсного модулятора (ШИМ). В настоящей статье будет предложен метод расчёта спектра ШИМ-сигнала для частного случая входного гармонического сигнала, частота которого в целое число раз

меньше частоты модулятора. Будет показано, что спектр ШИМ-сигнала содержит спектр входного сигнала и комбинационные частоты, образованные гармониками частот сигнала и модулятора. Отношение сигнал-шум (SNR) усилителя зависит от выбора выходного фильтра и частоты модулятора. Для получения усиленного аналогового сигнала ШИМ-сигнал фильтруется аналоговым фильтром нижних частот (ФНЧ). Как правило, используется LCR-фильтр, который включает в себя активное сопротивление нагрузки. В данной статье проводится расчёт этого фильтра, и выводятся соотношения для его параметров, позволяющие получить амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) определённой формы. Анализируется зависимость отношения сигнал-шум от АЧХ фильтра и частоты модулятора. Даются практические рекомендации для получения желаемого SNR.

## ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА УСИЛИТЕЛЯ D-КЛАССА

На рис. 1 представлена принципиальная схема усилителя D-класса. Широтно-импульсный модулятор реализуется генератором пилообразного напряжения и компаратором, который сравнивает входной сигнал с напряжением пилы. Если входное напряжение больше напряжения пилы, открывается верхний ключ. В противном случае открывается нижний ключ. В результате на вход LCR-фильтра подаются биполярные прямоугольные импульсы.

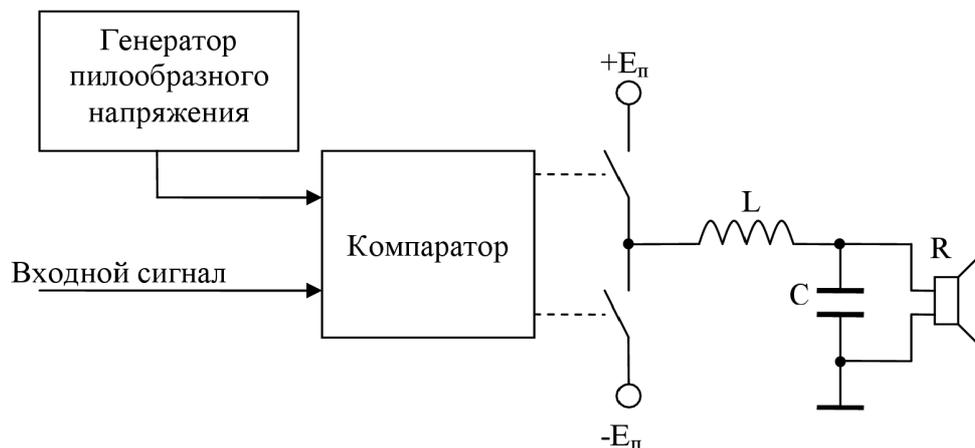


Рис. 1. Принципиальная схема усилителя D-класса

В простейшем случае в качестве ключей используется КМОП-инвертор, в котором на затворы транзисторов подаётся один управляющий сигнал. Для получения больших мощностей может использоваться раздельное управление силовыми ключами с введением “мёртвого времени” [3], исключающего сквозные токи, которые могут протекать через ключи в процессе переключения, когда оба ключа оказываются одновременно открытыми.

## СПЕКТР ШИМ-СИГНАЛА

Задача расчёта спектра ШИМ-сигнала значительно упрощается, если рассмотреть частный случай — гармонический модулирующий сигнал, период которого  $T_s$  в целое число  $N$  раз больше периода пилы модулятора  $T_p$ . В этом случае последовательность модулированных по длительности прямоугольных импульсов, следующих с частотой модулятора, можно рассматривать как сумму последовательностей импульсов фиксированной длительности, следующих с частотой модулирующего сигнала, как показано на рис. 2.

Спектр прямоугольных импульсов длительностью  $d$  и частотой следования  $f_s = 1/T_s = 1/(NT_p)$  определяется формулой (1), где  $j$  — мнимая единица. Эта формула справедлива

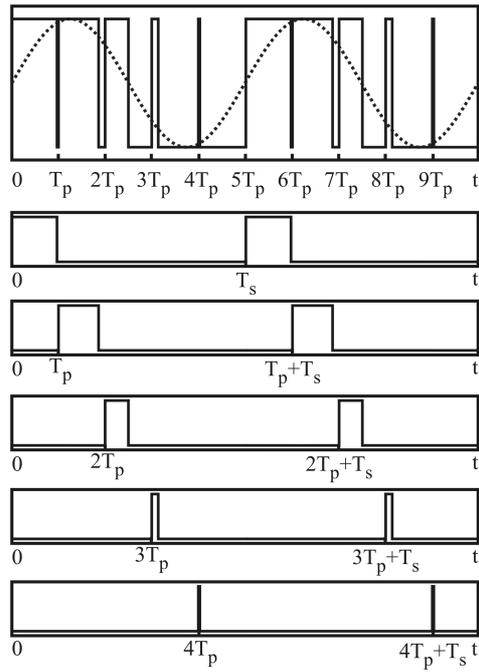


Рис. 2. ШИМ-сигнал как сумма последовательностей импульсов

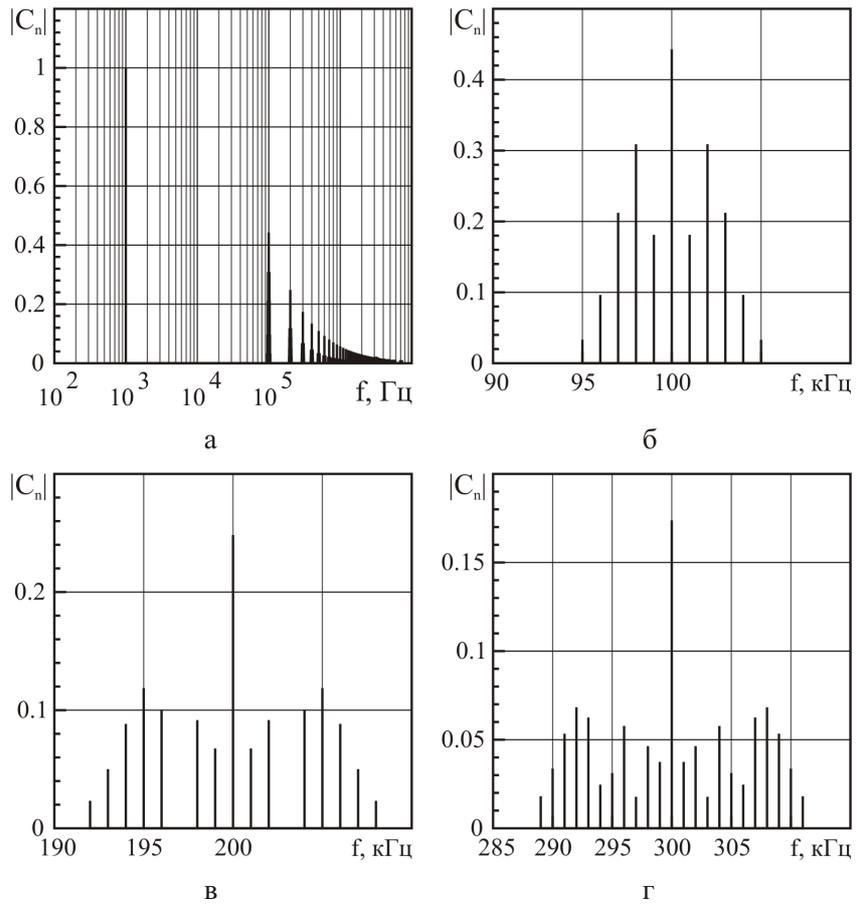


Рис. 3. АЧС ШИМ-сигнала (а) и его фрагменты в окрестностях первой гармоники (б), второй гармоники (в) и третьей гармоники (г) частоты пилы

как для униполярных импульсов единичной амплитуды, так и для биполярных импульсов с единичным размахом. Спектральные коэффициенты формулы (1), взятые по модулю, соответствует амплитудам гармоник входного сигнала усилителя.

$$S_n = 2 \frac{j}{\pi n} (\exp[-j2\pi n f_s d] - 1), n = 1, 2.. \quad (1)$$

Спектр ШИМ-сигнала определяется суммой спектров последовательностей импульсов с длительностями  $d_i$  с учётом временного сдвига:

$$C_n = \sum_{i=0}^{N-1} S_{n,i} \exp[-j2\pi n f_s i T_p]. \quad (2)$$

Остаётся найти длительности импульсов на периоде модулирующего сигнала  $x(t)$ :

$$x(t) = \sin(2\pi f_s t) \quad (3)$$

Длительность импульса находится из решения уравнения:

$$x(iT_p + d_i) = 2 \frac{d_i}{T_p} - 1. \quad (4)$$

Для больших значений  $N$  можно найти приближённое решение этого уравнения:

$$d_i \approx \frac{NT_p (\sin(2\pi \frac{i}{N}) + 1)}{2(N - \pi \cos(2\pi \frac{i}{N}))} \quad (5)$$

Более точное решение можно найти численными методами. Ошибка решения (5) будет тем меньше, чем больше  $N$ , как показано в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость ошибки приближённого решения (5) от  $N$

N	10	30	50	70	90	110	130	150
Max( $\Delta d/T_p \cdot 100\%$ )	10.27	1.10	0.40	0.20	0.12	0.08	0.06	0.04

Результаты расчёта амплитудно-частотного спектра (АЧС) ШИМ сигнала с частотой следования импульсов  $f_p = 100$  кГц и частотой модулирующего сигнала  $f_s = f_p/100 = 1$  кГц единичной амплитуды представлены на рис. 3. Длительность импульсов рассчитывалась численным методом по формуле (4) с абсолютной точностью  $10^{-6}$ . По графику рис. 3а видно, что спектр ШИМ-сигнала содержит частоту модулирующего сигнала, частоту пилы и её гармоники. На рис. 3б, рис. 3в и рис. 3г показаны фрагменты спектра в окрестностях гармоник частоты пилы. Видно, что спектр ШИМ-сигнала содержит комбинационные частоты  $af_p \pm bf_s$ , причём, чем выше гармоника частоты пилы, тем меньше её амплитуда и амплитуды смежных с ней комбинационных частот, но при этом увеличивается их количество, т. е. спектральные полосы, образованные гармониками пилы на высоких частотах становятся шире.

Примечательно, что полезный сигнал по мощности составляет 50% от мощности ШИМ сигнала. Однако к.п.д. рассматриваемых усилителей D-класса не ограничивается 50%. Объясняется это тем, что ШИМ-сигнал подаётся на LCR-фильтр, который сглаживает импульсы тока. Мощность на входе фильтра не пропорциональна квадрату напряжения, потому что в то время как напряжение имеет вид прямоугольных импульсов, диаграмма тока практически совпадает с диаграммой напряжения модулирующего сигнала.

## ФИЛЬТРАЦИЯ ШИМ-СИГНАЛА

Для восстановления аналогового сигнала спектр модулирующего сигнала выделяется из спектра ШИМ-сигнала фильтром. Комплексный коэффициент передачи LCR-фильтра выражается следующей формулой:

$$K(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\frac{L}{R} - \omega^2 LC}, \quad (6)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) этого фильтра может иметь резонансный “выброс”. Для уменьшения искажений сигнала и лучшего ослабления шума желательно, чтобы АЧХ была монотонной. Это требование можно сформулировать математически: производная от модуля коэффициента передачи (6) не должна обращаться в ноль, следовательно, следующее уравнение не должно иметь корней:

$$\omega \left( 2\omega^2 LC + \frac{L}{R^2 C} - 2 \right) = 0. \quad (7)$$

Корень  $\omega = 0$  для нас не представляет интерес. Надо, чтобы не было других действительных корней. Из (7) получаем уравнение:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2 C^2}. \quad (8)$$

Отсюда следует условие отсутствия “выброса”:

$$C < \frac{L}{2R^2}. \quad (9)$$

Интересен частный случай монотонной АЧХ, который соответствует фильтру второго порядка с критическим затуханием. Коэффициент передачи такого фильтра определяется формулой:

$$K(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega\tau)^2}. \quad (10)$$

Формула (6) переходит в формулу (10) с  $\tau = \frac{L}{2R}$ , если выполняется следующее соотношение:

$$C = \frac{L}{4R^2}. \quad (11)$$

Частота среза  $f_c$ , при которой по определению  $|K(2\pi f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , выражается следующей формулой:

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{R^2 C} - 2\right)^2 + 4} - \left(\frac{L}{R^2 C} - 2\right)}{2LC}}. \quad (12)$$

На рис. 4 представлены АЧХ LCR-фильтра с критическим затуханием (прерывистая линия для  $L = 82$  мкГн,  $C = L/(4R^2)$ ), с предельно монотонной АЧХ (сплошная линия для  $L = 90$  мкГн,  $C = L/(2R^2)$ ) и с выбросом (линия из точек для  $L = 81$  мкГн,  $C = L/R^2$ ). Фильтры рассчитаны для сопротивления нагрузки  $R = 8$  Ом и частоты среза  $f_c = 20$  кГц. Видно, что с увеличением ёмкости увеличивается крутизна спада АЧХ. Чем круче АЧХ фильтра, тем меньше будут пульсации в выходном сигнале.

Рассчитать выходной сигнал можно с помощью обратного преобразования Фурье:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[ \sum_n C_n K(2\pi n f_s) \exp(j2\pi n f_s t) + \sum_n \overline{C_n K(2\pi n f_s)} \exp(-j2\pi n f_s t) \right]. \quad (13)$$

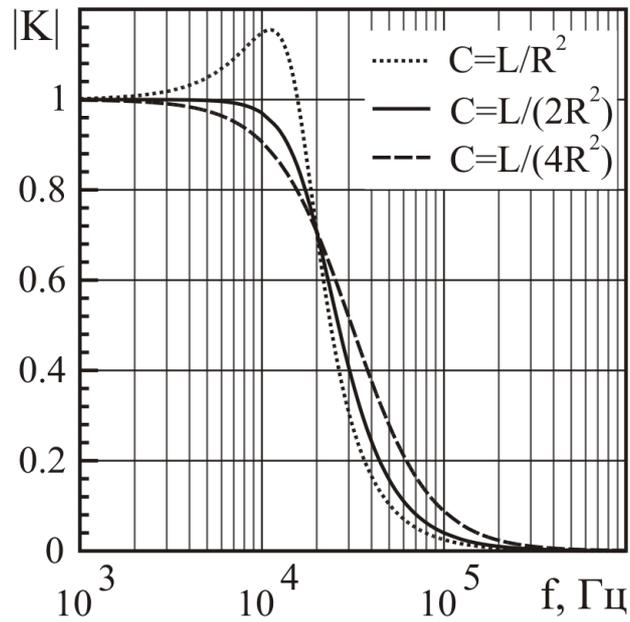


Рис. 4. АЧХ LCR-фильтров

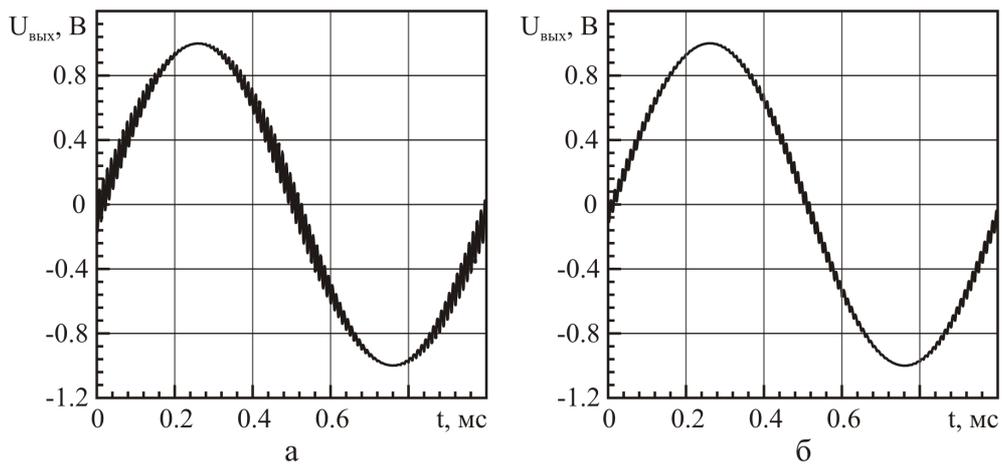


Рис. 5. Временные диаграммы сигналов на выходе фильтра с критическим затуханием (а) и фильтра с предельно монотонной АЧХ (б)

На рис. 5а представлен результат расчёта выходного сигнала для фильтра с критическим затуханием, а на рис. 5б – для фильтра с предельно монотонной АЧХ (АЧХ этих фильтров изображены на рис. 4). В последнем случае пульсации заметно меньше.

## ОПТИМИЗАЦИЯ СООТНОШЕНИЯ СИГНАЛ-ШУМ

Уменьшить пульсации в выходном сигнале можно за счёт применения фильтра с более крутым спадом АЧХ, либо за счёт увеличения частоты пилообразного сигнала. В предыдущем разделе было показано, что LCR-фильтр с предельно монотонной АЧХ демонстрирует меньший уровень пульсаций по сравнению с фильтром с критическим затуханием. Очевидно, фильтр с немонотонной АЧХ позволит получить ещё меньшие пульсации, но при этом сигнал будет искажён за счёт усиления высоких частот в полосе пропускания фильтра. Можно предположить, что в реальной аудиосистеме такой фильтр позволит скомпенсировать ослабление высоких частот в динамической головке, но это частный случай, который в данной статье мы рассматривать не будем.

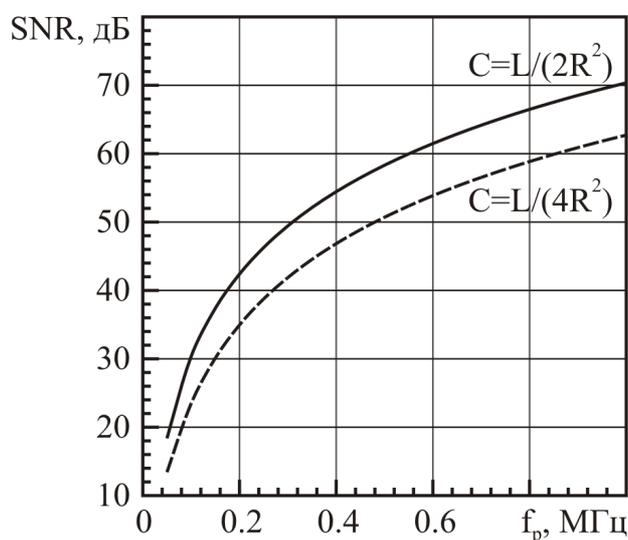


Рис. 6. Зависимость отношения сигнал-шум от частоты пилообразного сигнала

На рис. 6 представлены зависимости отношения сигнал-шум  $SNR$  от частоты пилообразного сигнала для фильтра с критическим затуханием (прерывистая линия) и для фильтра с предельно монотонной АЧХ (сплошная линия). На больших частотах для фильтра с предельно монотонной АЧХ отношение сигнал-шум получается выше почти на 8 дБ. Данные зависимости были рассчитаны для входного сигнала с частотой 1 кГц, при этом спектр ШИМ-сигнала рассчитывался в диапазоне от 1 кГц до 10 МГц.

Поскольку мы не выявили экстремумов в зависимости  $SNR$  от типа фильтра и частоты пилообразного сигнала, оптимизация должна проводиться по другим параметрам, таким как сложность схемотехнической реализации, коэффициент полезного действия усилителя, стоимость реализации и т. п. Однако рассмотрение этих параметров выходит за пределы данной работы. Поэтому мы ограничимся рекомендацией использовать фильтр с предельно монотонной АЧХ и выбирать частоту пилообразного сигнала широкоимпульсного модулятора в соответствии с требуемым значением  $SNR$  по рис. 6.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в настоящей работе подход к расчету спектра ШИМ-сигнала позволил осуществить математическое моделирование усилителя D-класса: рассчитать выходной сигнал, а также зависимость отношения сигнал-шум от частоты модулятора для двух типов АЧХ выходного фильтра. Несмотря на то, что расчеты справедливы лишь для частного случая, когда частота модулятора кратна частоте сигнала, данный подход позволяет получить достаточно полное представление о таких характеристиках усилителя, как его АЧХ и отношение сигнал-шум. АЧХ усилителя в случае идеального широтно-импульсного модулятора совпадает с АЧХ выходного фильтра. Чем круче срез АЧХ, тем больше  $SNR$ . В то же время, при увеличении частоты пилообразного сигнала модулятора шумовой спектр смещается в область более высоких частот, что позволяет увеличивать  $SNR$  теоретически неограниченно. На практике большие частоты модулятора могут приводить к значительному усложнению схемы, ухудшению линейности пилообразного сигнала, уменьшению к.п.д. усилителя, увеличению электромагнитных помех. Использование более сложного выходного фильтра представляется экономически не целесообразным. Однако, как было показано в данной работе, параметры LCR-фильтра могут быть оптимизированы для получения большего  $SNR$ .

Таким образом, выбирая параметры фильтра и частоту модулятора можно добиться желаемого значения  $SNR$ . Полученные в данной работе расчётные формулы и соотношения позволяют решить данную задачу, что представляет не только теоретический, но и практический интерес для разработчиков усилителей D-класса. Аналогично можно рассчитать и параметры цифроаналогового преобразователя на основе ШИМ. Этой задаче может быть посвящена следующая статья.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cordell B. Designing Audio Power Amplifiers / B. Cordell. — McGraw-Hill, 2011. — 608 p.
2. Class D Amplifiers: Fundamentals of Operation and Recent Developments, 2007. — 10 p. — URL: <http://www.maximintegrated.com/en/app-notes/index.mvp/id/3977>
3. Мелешин, В. И. Транзисторная преобразовательная техника / В. И. Мелешин. — М. : Техносфера, 2005. — 632 с.
4. Титце, У. Полупроводниковая схемотехника : [Справочник] / У. Титце, К. Шенк. — М. : Мир, 1982. — 512 с.

## REFERENCES

1. Cordell B. Designing Audio Power Amplifiers. McGraw-Hill, 2011, 608 p.
2. Class D Amplifiers: Fundamentals of Operation and Recent Developments, 2007, 10 p. URL: <http://www.maximintegrated.com/en/app-notes/index.mvp/id/3977>.
3. Meleshin V.I. Transistor Converter engineering. [Meleshin V.I. Tranzistornaya preobrazovatel'naya texnika]. Moscow, 2005, 632 p.
4. Titse Y. Solid state circuitry. [Titse U. Poluprovodnikovaya sxemotexnika]. Moscow, 1982, 512 p.

*Разуваев Юрий Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры электроники Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: RazuvaevYY@mail.ru  
Тел.: +7(473)220-82-84*

*Razuvaev Yury Yuryevich, PhD, associated professor of physics, department of electronics, faculty of physics at Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: RazuvaevYY@mail.ru  
Tel.: +7(473)220-82-84*