УДК 517.929

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ*

Г. Г. Петросян, М. С. Афанасова

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 10.02.2016 г.

Аннотация. В настоящей работе доказывается существование решения и компактность множества всех решений задачи Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием в банаховом пространстве. Статья состоит из двух пунктов. Во введении обосновывается актуальность данной проблематики и излагается история вопроса, а также приведены предварительные сведения из теории дробного математического анализа и теории многозначных и уплотняющих отображений. Во втором пункте описывается постановка задачи, формулируется и доказывается, применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений, основной результат работы (Теорема 2.1).

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, задача Коши, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL INCLUSION OF FRACTIONAL ORDER WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

G. G. Petrosyan, M. S. Afanasova

Abstract. In this paper we prove the existence of solutions and the compactness of the set of all solutions of the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear initial conditions in Banach space.

Keywords: differential inclusion, the fractional derivative, the Cauchy problem, MNC, fixed point, condensing multimap.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], статьи [11], [12], [13], [14], [15], [16] и др.).

В настоящей работе мы рассматриваем полулинейные функционально-дифференциальные включения дробного порядка с нелокальным начальным условием в банаховом пространстве. В данной работе обобщаются результата из [16].

* Работа поддержана грантами РФФИ № 14–01–00468, № 14–01–92004 и № 16–01–00386.

В настоящей работе, применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений (см. [17]), мы доказываем (см. Теорему 2.1) существование решения и компактность множества решений задачи Коши для полулинейных функционально-дифференциальных включений указанного класса.

1.1. Дробный интеграл и дробная производная.

Определение 1.1. (см. например [5], [10]) Дробным интегралом порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 1.2. Дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (N-1,N]$ от функции $g \in C^N([0,T];E)$, называется функция $D_0^\alpha g$ следующего вида:

$$D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} g^{(N)}(s)\, ds.$$

1.2. Многозначные отображения.

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Введем следующие обозначения:

$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$ — множество всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$.

$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}$;

$K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}$;

$Kv(\mathcal{E}) = \{Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})\}$ — множество всех непустых компактных и выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

Определение 1.3. (см. например [17], [18]) Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ — некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta : \mathrm{P}(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности(МНК) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *Монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$.

2) *Несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

3) *Правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, $\beta(\Omega) = 0$.

4) *Вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\ \}.$$

Определение 1.4. (см. например [17], [19]) Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$,

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$,

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Нам понадобятся в дальнейшем следующее утверждение (см. [17]).

Лемма 1.1. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.с.*

Определение 1.5. (см. например [17], [19]) Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно МНК β (β–уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено:

$$\beta(F(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega).$$

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений(см. например [17]).

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — β–уплотняющее мультиотображение, где β-несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}$:* $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *— непустое компактное множество.*

Теорема 1.2. *Пусть X — замкнутое подмножество банахового пространства $\mathcal{E}$, β — монотонная мера некомпактности в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : X \to K(\mathcal{E})$ — замкнутый мультиоператор, который является β-уплотняющим на каждом ограниченном множестве. Если множество неподвижных точек $\mathcal{F}$:* $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *ограничено, то оно компактно.*

1.3. Измеримые мультифункции.

Напомним некоторые понятия (см. например [17], [19]). Пусть E — банахово пространство.

Определение 1.6. Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$, для $p \geqslant 1$, называется:

• L^p *-интегрируемой*, если она допускает L^p - интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p\left([0, T]; E\right)$, такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, T]$;

• L^p *-интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0, T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := sup\left\{\|g\|_E : g \in G(t)\right\} \leqslant \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0, T]$.

Множество всех L^p–интегрируемых сечений мультифункции $G : [0, T] \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0, T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0, T] \to K(E)$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t), G(t)) = 0,$$

для п. в. $t \in [0, T]$, где $\mathcal{H}$ — хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p — интегрально ограничена, то она L^p–интегрируема. Для L^p–интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{ \int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G \right\},$$

для любого $t \in [0, T]$.

Лемма 1.2. (см. [17], Теорема 4.2.3.) *Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0, T] \to P(E)$ L^p–интегрируемая и L^p — интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leqslant q(t),$$

для п. в. $t \in [0, T]$, где $q \in L^p_+([0, T])$. Тогда

$$\chi(\int\limits_0^t G(s)ds) \leqslant \int\limits_0^t q(s)ds,$$

для всех $t \in [0, T]$. В частности, если мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$ измерима и L^p–интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем:

$$\chi(\int\limits_0^t G(s)ds) \leqslant \int\limits_0^t \chi(G(s))ds,$$

для всех $t \in [0, T]$.

Лемма 1.3. (см. [17], Теорема 4.2.1.) *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0, a]; E)$ для всех $n = 1, 2, ...$ и п. в. $t \in [0, T]$, является L^1–интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\chi(\{\xi_n\}) \leqslant \alpha(t)$$

для п.в. $t \in [0, a]$, где $\alpha \in L^1_+([0, a])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует компактное множество $K_\delta \subset E$ и множество $m_\delta \subset [0, a]$, с лебеговой мерой $m_\delta < \delta$, а также множество функций $G_\delta \subset L^1([0, a]; E)$ со значениями в K_δ, такие, что для каждого $n \geqslant 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leqslant 2\alpha(t) + \delta, \qquad t \in [0, a] \backslash m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Мы рассматриваем задачу Коши для полулинейного дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве E, следующего вида:

$$\begin{cases} D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t), x_t), & t \in [0, a], \qquad (1) \\ x(s) + g(x)(s) = \vartheta(s), & s \in [-h, 0], \qquad (2) \end{cases}$$

где $D^q, 0 < q < 1$, - дробная производная Капуто, $F : [0, a] \times E \times C([-h, 0]; E) \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E (не обязательно ограниченный), $g : C([-h, a]; E) \to C([-h, 0]; E)$ - нелинейное отображение, x_t предыстория функции до момента $t \in [0, a]$, то есть $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, и функция $\vartheta \in C([-h, 0]; E)$.

Пусть мультиотображение:

$$F : [0, a] \times E \times C([-h, 0]; E) \to Kv(E)$$

таково, что:

$(F1)$ Для всех $(x,\xi) \in E \times C([-h,0];E)$ мультифункция $F(\cdot,x,\xi) : [0,a] \longrightarrow Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение;

$(F2)$ Для п.в. $t \in [0,a]$ мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot) : E \times C([-h,0];E) \longrightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху.

$(F3)$ Существует функция $\alpha \in L^{\infty}_{+}([0,a])$ такая, что

$$\|F(t,x,x_t)\|_E \leqslant \alpha(t)(1 + \|x(t)\|_E + \|x_t\|_{C([-h,0];E)}) \text{ для п.в. } t \in [0,a],$$

$(F4)$ найдется функция $\mu \in L^{\infty}([0,a])$ такая, что для любых ограниченных множеств $Q \subset E$ и $\Delta \subset C([-h,0];E)$ мы имеем:

$$\chi(F(t,Q,\Delta)) \leqslant \mu(t)\left(\chi(Q) + \varphi(\Delta)\right),$$

для п.в. $t \in [0,a]$, где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\varphi(\Delta) = \sup_{-h\leqslant\theta\leqslant 0}\chi(\Delta(\theta))$, $\Delta(\theta) = \{y(\theta), y \in \Delta\}$, $\theta \in [-h,0]$.

На A и g мы накладываем следующие условия:

(A) $A : D(A) \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий C_0- полугруппу $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, обозначим $M = \sup\left\{\|T(t)\|; t \in [0;a]\right\}$,

$(g1)$ $g : C([-h,a];E) \to C([-h,0];E)$- вполне непрерывеное отображение.

$(g2)$ Существует константа $K > 0$ такая, что $\|g(x)\|_{C([-h,0];E)} \leqslant K$.

Для $x \in C([0,a];E)$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,a] \to Kv(E), \qquad \Phi_F(t) = F(t,x(t),x_t).$$

Ясно, что функция $t \in [0,a] \to x(t)$ — непрерывна. Тогда (см. [2], Теорема 1.5.22) мультифункция Φ_F является L^p интегрируемой для любого $p \geqslant 1$.

Пусть $\mathcal{P}^p_F : C([0,a];E) \multimap L^p([0,a];E)$- суперпозиционный мультиоператор заданый следующим образом

$$\mathcal{P}^p_F(x) = \mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

Справедливо следующее свойство замкнутости суперпозиционного мультиоператора.

Лемма 2.1. (см. [20]) *Пусть $\{u_n\}$- последовательность в $C([0,a];E)$ сходящаяся к $u^* \in C([0,a];E)$. Предположим, что существует последовательность $\{\varphi_n\} \in L^p([0,a];E), \varphi_n \in \mathcal{P}^p_F(u_n)$, слабо сходится к функции φ^*. Тогда $\varphi^* \in \mathcal{P}^p_F(u^*)$.*

Определение 2.1. (см. [17]) Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,a];E)$ называется L^p-полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена , то есть

$$\|\xi_n(t)\|_E \leqslant v(t) \text{ для всех } n = 1,2,... \text{ и п.в. } t \in [0,a],$$

где $v \in L^p([0,a])$, и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0,a]$.

Для решения нашей задачи мы будем использовать суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}^{\infty}_F : C([0,a];E) \multimap L^{\infty}([0,a];E)$ - заданый следующим образом

$$\mathcal{P}^{\infty}_F(x) = \mathcal{S}^{\infty}_{\Phi_F}.$$

Определение 2.2. Интегральным решением задачи Коши (1)-(2) на промежутке $[-h,a]$ называется функция $x \in C([-h,a];E)$:

$$x(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(x)(t), & t \in [-h,0], \\ \mathcal{G}(t)\left(\vartheta(0) - g(x)(0)\right) + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\varphi(s)ds, & t \in [0,a], \end{cases}$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \int\limits_0^{\infty} \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \qquad \mathcal{T}(t) = q\int\limits_0^{\infty} \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q), \theta \in \mathbb{R}^+,$$

и $\varphi(s) \in \mathcal{P}_F^{\infty}(x)$.

Замечание 2.1. $\int_0^{\infty}\theta\xi_q(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}$.

Лемма 2.2. (см. [16])*Операторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$ обладают следующими свойствами:*

1) *Для любого $t \in [0,a]$, $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются линейными ограниченными операторами, т.е.* $\|\mathcal{G}(t)x\|_E \leqslant M\|x\|_E$; $\|\mathcal{T}(t)x\|_E \leqslant \frac{qM}{\Gamma(1+q)}\|x\|_E$

2) *операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ сильно непрерывны для всех $t \in [0,a]$.*

Для нахождения интегральных решений задачи (1)-(2) рассмотрим отображение:

$$S : L^{\infty}([0,a];E) \to C([0,a];E),$$

$$S(\varphi)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\varphi(s)ds$$

Рассмотрим мультиоператор $G : C([-h,a];E) \multimap C([-h,a];E)$, заданный следующим образом:

$$G(x) = j(x) + S \circ \mathcal{P}_F^{\infty}(x),$$

$$j(x)(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(x)(t), & t \in [-h,0], \\ \mathcal{G}(t)\left(\vartheta(0) - g(x)(0)\right), & t \in [0,a], \end{cases}$$

Ясно, что функция $x \in C([-h,a];E)$ - интегральное решение задачи (1)-(2) на интервале $[-h,a]$ тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора G. Нашей задачей является показать, что G имеет неподвижную точку.

Применяя теорему Арцела-Асколи и свойства $(A), (g1)$ можно установить следующую лемму.

Лемма 2.3. *Оператор j вполне непрерывен.*

Лемма 2.4. *Оператор S обладает следующими свойствами:*

(S_1) *если $\frac{1}{q} < p < \infty$, то существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E^p \leqslant C^p\int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p\,ds, \qquad \xi,\eta \in L^p([0,a]);$$

(S_2) *для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^{\infty}([0,a];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,a]$, множество $\{S(\eta_n)\}$ относительно компактно в пространстве $C([0,a];E)$.*

Доказательство: (S_1) Используя неравенство Гельдера мы получим:

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E \leqslant \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\,\|\xi(s) - \eta(s)\|_E\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{qM}{\Gamma(1+q)}\left[\int_0^t (t-s)^{\frac{(q-1)p}{p-1}}ds\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

Тогда

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E^p \leqslant C^p \int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds,$$

где

$$C = \left[\frac{p-1}{qp-1}\right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{qMa^{q-\frac{1}{p}}}{\Gamma(1+q)}$$

(S_2) Применяя Лемму 2.2, мы получим:

$$\chi\Big(\big\{S\left(\eta_n\right)(t)\big\}\Big) \leqslant \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} \chi(\{\mathcal{T}\left(t-s\right)\eta_n\})ds = 0$$

Это означает, что последовательность $\{S\left(\eta_n\right)(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0,a]$.

С другой стороны, если мы возьмем $t_1, t_2 \in [0,a]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leqslant a$, то для $\eta_n \in \mathcal{P}_F^{\infty}(x_n)$ мы имеем:

$$\Big\|S\left(\eta_n\left(t_2\right)\right) - S\left(\eta_n\left(t_1\right)\right)\Big\|_E =$$

$$= \left\|\int\limits_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1}\,\mathcal{T}\left(t_2-s\right)\eta_n(s)ds - \int\limits_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1}\,\mathcal{T}\left(t_1-s\right)\eta_n(s)ds\right\|_E =$$

$$= \left\|\int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1}\,\mathcal{T}\left(t_2-s\right)\eta_n(s)ds\right\|_E +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1}\,\mathcal{T}\left(t_2-s\right) - (t_1-s)^{q-1}\,\mathcal{T}\left(t_1-s\right)\Big)\eta_n(s)ds\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1}\,\mathcal{T}\left(t_2-s\right)\eta_n(s)ds\right\|_E +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\Big)\,\mathcal{T}\left(t_1-s\right)\eta_n(s)ds\right\|_E +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1}\left(\mathcal{T}\left(t_2-s\right) - \mathcal{T}\left(t_1-s\right)\right)\eta_n(s)ds\right\|_E = Z_1 + Z_2 + Z_3,$$

где

$$Z_1 = \left\|\int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1}\,\mathcal{T}\left(t_2-s\right)\eta_n(s)ds\right\|_E,$$

$$Z_2 = \left\|\int\limits_0^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\Big)\,\mathcal{T}\left(t_1-s\right)\eta_n(s)ds\right\|_E,$$

$$Z_3 = \left\| \int\limits_0^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} \left(\mathcal{T}(t_2 - s) - \mathcal{T}(t_1 - s)\right) \eta_n(s) ds \right\|_E .$$

Используя Лемму 2.2 и условие $(F3)$, мы можем для любого $\varepsilon_1 > 0$, подобрать $\delta_1 > 0$, такое, что как только $|t_2 - t_1| < \delta_1$, будет справедлива следующая оценка:

$$Z_1 \leqslant \frac{qM \|\alpha\|_\infty \left(1 + 2 \|x_n\|_{C([-h,a];E)}\right)}{\Gamma(1+q)} \frac{(t_2 - t_1)^q}{q} < \varepsilon_1 .$$

Для оценки Z_2 возьмем константу $d > 0$, для которой мы имеем:

$$Z_2 \leqslant \left\| \int\limits_0^{t_1 - d} \left((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}\right) \mathcal{T}(t_1 - s) \eta_n(s) ds \right\|_E +$$

$$+ \left\| \int\limits_{t_1 - d}^{t_1} \left((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}\right) \mathcal{T}(t_1 - s) \eta_n(s) ds \right\|_E = I_1 + I_2 ,$$

где

$$I_1 = \left\| \int\limits_0^{t_1 - d} \left((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}\right) \mathcal{T}(t_1 - s) \eta_n(s) ds \right\|_E ,$$

$$I_2 = \left\| \int\limits_{t_1 - d}^{t_1} \left((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}\right) \mathcal{T}(t_1 - s) \eta_n(s) ds \right\|_E .$$

Рассмотрим функцию $v : [d, a] \to \mathbb{R}, v(\tau) = \tau^{q-1}$. Данная функция является непрерывной на отрезке $[d, a]$, поэтому по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом отрезке, то есть для любого $\gamma > 0$ существует $\delta_2 > 0$, такое, что как только $|\tau_2 - \tau_1| < \delta_2 < d, \tau_1, \tau_2 \in [d, a]$:

$$\left| \tau_2^{q-1} - \tau_1^{q-1} \right| < \gamma .$$

Теперь, считая $\tau = t - s$, мы имеем:

$$I_1 \leqslant \frac{qM \|\alpha\|_\infty \left(1 + 2 \|x_n\|_{C([-h,a];E)}\right) \gamma(t_1 - d)}{\Gamma(1+q)} < \varepsilon_2 .$$

Непосредственно интегрируя, мы для I_2 имеем:

$$I_2 \leqslant \frac{M \|\alpha\|_\infty \left(1 + 2 \|x_n\|_{C([-h,a];E)}\right) d^q (2 + 2^q)}{\Gamma(1+q)} < \varepsilon_3$$

Учитывая, что операторы $\mathcal{T}(t)$ сильно непрерывны для $x \in K$, то есть для любого $\gamma_1 > 0$, существует $\delta_3 > 0$, такое, что как только $|t_2 - t_1| < \delta_3$:

$$\|\mathcal{T}(t_2 - s) x - \mathcal{T}(t_1 - s) x\| < \gamma_1 \ x \in K ,$$

мы имеем следующую оценку:

$$Z_3 \leqslant \gamma_1 a^q < \varepsilon_4 .$$

Таким образом для любго $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, такое, что:

$$\left\| S\left(\eta_n\left(t_2\right)\right) - S\left(\eta_n\left(t_1\right)\right) \right\|_E \leqslant Z_1 + Z_2 + Z_3 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 < \varepsilon$$

Поэтому последовательность $\{S\left(\eta_n\right)\}$ равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела–Асколли получаем, что последовательность $\{S\left(\eta_n\right)\} \subset C\left([0,a]\,; E\right)$ относительно компактна. Лемма доказана.

Для доказательства, того факта, что мультиоператор G является уплотняющим, введем в пространстве $C([0,a];E)$ векторную меру некомпактности

$$\nu : P(C([0,a];E)) \to \mathbb{R}^2_+$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, определенную как:

$$\nu(\Omega) = \max_{\mathcal{D}\in\Delta(\Omega)} \left(\psi(\mathcal{D}), mod_C(\mathcal{D})\right),$$

где $\Delta(\Omega)$ - совокупность всех счетных подмножеств Ω,

$$\psi(\mathcal{D}) = \sup_{t\in[0,a]} e^{-pt}\chi(\mathcal{D}(t)),$$

и константа $p > 0$ выбрана так, что для $d > 0$ и удовлетворяющего неравенству:

$$\frac{2qM\left\|\mu\right\|_\infty}{\Gamma(1+q)} \frac{d^q}{q} < \frac{1}{4}, \tag{3}$$

выполняется следующая оценка:

$$\frac{2qM\left\|\mu\right\|_\infty}{\Gamma(1+q)} \frac{1}{pd^{1-q}} < \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Вторая компонента нами определенной меры некомпактности ν, суть модуль равностепенной непрерывности, который определяется в следующем виде:

$$mod_C(\mathcal{D}) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{u\in\mathcal{D}} \max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta} \|u(t_1) - u(t_2)\|.$$

Лемма 2.5. *Мультиоператор G является уплотняющим относительно меры некомпактности ν.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0,a];E)$ непустое ограниченное множество и

$$\nu(G(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega), \tag{5}$$

покажем, что Ω- относительно компактное множество.

Из леммы 2.3 следует, что нам достаточно доказать теорему для мультиотображения $S \circ \mathcal{P}^\infty_F$.

Пусть максимум в неравенстве (5) достигается на счетном множестве $\mathcal{D}' = \{y_n\}_{n=1}^\infty$,

$$y_n(t) = Sf_n(t), \quad f_n \in \mathcal{P}^\infty_F(x_n),\ n \geqslant 1,$$

где $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$.

Из неравества (5) следует, что:

$$\psi(\{y_n\}_{n=1}^\infty) \geqslant \psi(\{x_n\}_{n=1}^\infty). \tag{6}$$

Теперь, применяя условие регулярности $(F4)$, мы имеем:

$$\chi(\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant \mu(s)\cdot(\chi(\{x_n(s)\}_{n=1}^{\infty}) + \varphi(\{(x_n)_s\}_{n=1}^{\infty})) =$$

$$= \mu(s)\cdot(\chi(\{x_n(s)\}_{n=1}^{\infty}) + \sup_{\tau\in[0,s]}(\{x_n(\tau)\}_{n=1}^{\infty})) =$$

$$= e^{ps}\mu(s)\cdot(e^{-ps}\chi(\{x_n(s)\}_{n=1}^{\infty}) + \sup_{\tau\in[0,s]} e^{-ps}(\{x_n(\tau)\}_{n=1}^{\infty})) \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{ps}\mu(s)\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Воспользовавшись леммой 2.2 и последним неравенством, мы получаем следующую оценку:

$$e^{-pt}\chi(\{Sf_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant e^{-pt}\frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\,2e^{ps}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\left(e^{-pt}\int\limits_0^{t-d}(t-s)^{q-1}\,e^{ps}ds + e^{-pt}\int\limits_{t-d}^{t}(t-s)^{q-1}\,e^{ps}ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{p(t-d)}-1}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\left(\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{-pd}}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\left(\frac{1}{pd^{1-q}} + \frac{d^q}{q}\right).$$

теперь, используя неравенства (3) и (4), мы для последней оценки имеем:

$$\sup_{t\in[0,a]} e^{-pt}\chi(\{Sf_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}),$$

$$\psi(\{Sf_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Учитывая нeравество (6) вместе с поеследним, мы получаем:

$$\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}),$$

поэтому

$$\psi(\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) = 0$$

более того

$$\chi(\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) = 0$$

для всех $t\in[0,a]$.

Теперь докажем, что

$$mod_C\left(\{Sf_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0.$$

Для этого покажем, что множество

$$\left\{\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f_n(s)ds : f_n\in\mathcal{P}_F^{\infty}(x_n)\right\}$$

равностепенно непрерывно. Если мы возьмем $t_1, t_2 \in [0, a]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leqslant a$, то для произвольного f_n мы имеем:

$$\left\| S\left(f_n\left(t_2\right)\right) - S\left(f_n\left(t_1\right)\right) \right\|_E =$$

$$= \left\| \int_0^{t_2} \left(t_2 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_2 - s\right) f_n(s) ds - \int_0^{t_1} \left(t_1 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_1 - s\right) f_n(s) ds \right\|_E =$$

$$= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \left(t_2 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_2 - s\right) f_n(s) ds \right\|_E +$$

$$+ \left\| \int_0^{t_1} \Big(\left(t_2 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_2 - s\right) - \left(t_1 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_1 - s\right) \Big) f_n(s) ds \right\|_E = Z_1 + Z_2,$$

где

$$Z_1 = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \left(t_2 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_2 - s\right) f_n(s) ds \right\|_E,$$

$$Z_2 = \left\| \int_0^{t_1} \Big(\left(t_2 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_2 - s\right) - \left(t_1 - s\right)^{q-1} \mathcal{T}\left(t_1 - s\right) \Big) f_n(s) ds \right\|_E,$$

Используя лемму 2.2 и условие $(F3)$, мы по любому $\varepsilon_1 > 0$ можем подобрать такое $\delta_1 > 0$, что при выполнении неравенства $|t_2 - t_1| < \delta_1$, имеет место следующая оценка:

$$Z_1 \leqslant \frac{qM \left\|\alpha\right\|_\infty \Big(1 + 2 \left\|x_n\right\|_{C([-h,a];E)}\Big)}{\Gamma\left(1 + q\right)} \frac{\left(t_2 - t_1\right)^q}{q} < \varepsilon_1.$$

Для оценки Z_2 возьмем произвольное $\varepsilon_2 > 0$ и выберем

$$d < d_1 = \left[\frac{\varepsilon_2 \Gamma(1+q)}{M \left\|\alpha\right\|_\infty \Big(1 + 2 \left\|x_n\right\|_{C([-h,a];E)}\Big)} (2^q + 1) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда, для $t_1 < d$ и $t_2 - t_1 < d$, мы имеем:

$$Z_2 \leqslant \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} \|\mathcal{T}(t_2 - s)\| \cdot \|f_n(s)\| ds + \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} \|\mathcal{T}(t_1 - s)\| \cdot \|f_n(s)\| ds$$

$$\leqslant \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \|\mathcal{T}(t_2 - s)\| \cdot \|f_n(s)\| ds + \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} \|\mathcal{T}(t_1 - s)\| \cdot \|f_n(s)\| ds$$

$$\leqslant \frac{M \left\|\alpha\right\|_\infty \Big(1 + 2 \left\|x_n\right\|_{C([-h,a];E)}\Big)}{\Gamma(1+q)} \left(2^q + 1\right) d^q < \varepsilon_2$$

Если $t_1 > d$,

$$Z_2 \leqslant \left\| \int\limits_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_1-s) \Big) f_n(s)ds \right\|_E +$$

$$+ \left\| \int\limits_{t_1-d}^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_1-s) \Big) f_n(s)ds \right\|_E = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \left\| \int\limits_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_1-s) \Big) f_n(s)ds \right\|_E ,$$

$$I_2 = \left\| \int\limits_{t_1-d}^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_1-s) \Big) f_n(s)ds \right\|_E .$$

Возьмем $d < d_1$ такое, что

$$I_2 \leqslant \frac{M \|\alpha\|_\infty \Big(1 + 2\|x_n\|_{C([-h,a];E)}\Big) d^q (2+2^q)}{\Gamma(1+q)} < \varepsilon_2$$

для данного $\varepsilon_2 > 0$. Поскольку $\chi(\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty) \equiv 0$, то по лемме 1.3 для любого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, и множество $m_\delta \subseteq [0,a]$, с Лебеговой мерой $mes(m_\delta) < \delta$ такие, что $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset K_\delta$ для $t \in [0,a] \backslash m_\delta$, и для I_1 справедлива следующая оценка

$$I_1 \leqslant \left\| \int\limits_{[0,t_1-d]\backslash m_\delta} \Big((t_2-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_1-s) \Big) f_n(s)ds \right\|_E +$$

$$+ \left\| \int\limits_{[0,t_1-d]\cap m_\delta} \Big((t_2-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_1-s) \Big) f_n(s)ds \right\|_E .$$

Возьмем δ настолько маое, что $mes(m_\delta) < 2\varepsilon_3 d^{1-q}$ для любого наперед заданного $\varepsilon_3 > 0$. Используя условие (S_2) из леммы 2.4 и замечая, что $F(s, x(s), x_s) \subset F([0,a] \times K_\delta \times C([-h,0];E)$ мы можем утверждать, что для любого $\varepsilon_4 > 0$, можно подобрать $\gamma > 0$, такое, что как только $|t_2 - t_1| < \gamma$, первое слагаемое из последнего окажется меньше ε_4.

Таким образом для любго $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta' = min\{\delta_1, \delta, \gamma\}$, такое, что:

$$\Big\| Sf_n(t_2) - Sf_n(t_1) \Big\|_E \leqslant Z_1 + Z_2 + Z_3 \leqslant Z_1 + I_1 + I_2 < \varepsilon$$

Так как множество $\{Sf_n\}_{n=1}^\infty$ равностепенно непрерывно, то $mod_C(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = 0$, а значит $\nu(\Omega) = (0,0)$. Тогда, мы заключаем, что Ω - относительно компактное множество, а мультиоператор G является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Оператор G является п.н.с.*

Доказательство. Из леммы 2.3 нам известно, что оператор j вполне непрерывный, поэтому лемму достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$.

Пусть $d > 0$ - константа такая, что $\frac{M\|\alpha\|_\infty\left(1+2\|x\|_{C([-h,a];E)}\right)d^q}{\Gamma(1+q)} < \varepsilon$. Тогда оператор S можно представить ввиде:

$$S(f)(t) = \int\limits_0^{t-d} (t-s)^{g-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds + \int\limits_{t-d}^{t} (t-s)^{g-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds.$$

Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0,a];E)$, такую, что $x_n \to x_0$. Тогда для каждой последовательности $f_n \in \mathcal{P}_F^\infty(x_n)$, $n \geqslant 1$ для п.в. $t \in [0,a]$, множество $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, по условию $(F4)$, относительно компактно в $L^1((0,a];E)$, поэтому $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ - L^1-полукомпактна. В силу критерия Дистеля (см. [21]) мы можем предположить, без ограничения общности, что $f_n \stackrel{L^1}{\rightharpoonup} f_0$. Учитывая, что $L^\infty \subset L^1$, по лемме Мазура существует двойная последовательность $\{\beta_{ik}\}_{i=1}^\infty{}_{k=1}^\infty$, такая что $\beta_{ik} \geqslant 0, \Sigma_{k=i}^\infty \beta_{ik} = 1$, $\beta_{ik} = 0$, для $k \geqslant k_0(i)$ и $\widetilde{f}_i = \Sigma_{k=i}^\infty \beta_{ik} f_k \stackrel{L^1}{\to} f_0$. По лемме 2.1 $f_0 \in \mathcal{S}^1_{\Phi_F}$, но последовательность f_n ограничена, поэтому $f_0 \in \mathcal{S}^\infty_{\Phi_F}$. Рассмотрим теперь последовательность $z_n = S\widetilde{f}_n$, $n \geqslant 1$:

$$z_n(t) = \int\limits_0^{t-d} (t-s)^{g-1}\mathcal{T}(t-s)\widetilde{f}_n(s)ds + \int\limits_{t-d}^{t} (t-s)^{g-1}\mathcal{T}(t-s)\widetilde{f}_n(s)ds$$

Так как $\widetilde{f}_n \in L^\infty$, то переходя к пределу в последнем, при $n \to \infty$, и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, в силу малости ε мы имеем:

$$z_0(t) = \int\limits_0^{t-d} (t-s)^{g-1}\mathcal{T}(t-s)f_0(s)ds + \int\limits_{t-d}^{t} (t-s)^{g-1}\mathcal{T}(t-s)f_0(s)ds,$$

следовательно $z_0 \in S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$, кроме того, так как $\left\{\widetilde{f}_n\right\}_{n=1}^\infty$ полукомпактная последовательность, то $\left\{S\widetilde{f}_n\right\}_{n=1}^\infty \subset C([0,a];E)$ относительно компактное множество. Таким образом мы молучаем, что мультиоператор $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является замкнутым с компактными значениями, а так же квазикомпактным, поэтому, в силу леммы 1.1, $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ п.н.с. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *При выполнении условий* $(A), (F1), (F2), (F3), (F4), (g1)-(g2)$, *множество решений задачи* (1)-(2) *на* $[-h,a]$ *непусто и компактно.*

Доказательство. Ведем эквивалентную норму в пространстве $C([-h,a];E)$:

$$\|x\|_* = \max_{t\in[-h,a]} e^{-pt}\|x(t)\|_E,$$

где константа $p > 0$ выбрана так, что для $d > 0$ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{2qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\left(\frac{1}{pd^{1-q}} + \frac{d^q}{q}\right) \leqslant N < 1$$

В пространстве $C([-h,a];E)$ с нормой $\|\cdot\|_*$, рассмотрим шар

$$\overline{B}_r(0) = \{x \in C([-h,a];E) |\, \|x\|_* \leqslant r\},$$

где $r > 0$ выбрано таким, что

$$r \geqslant \max\left\{e^{ph}\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)} + K\right); \left(M\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)} + K\right) + \frac{M\|\alpha\|_\infty a^q}{\Gamma(1+q)}\right)(1-N)^{-1}\right\},$$

где K - константа из уловия $(g2)$.

Заметим, что из последнего неравенства, вытекает следующая оценка:

$$M\left\|x_0\right\|_E+\frac{M\|\alpha\|_{\infty} a^q}{\Gamma(1+q)}+N r \leqslant r .$$

Докажем, что мультиоператор G преобразует шар $\overline{B}_r(0)$ в себя. Пусть $x \in \overline{B}_r(0)$ и $y \in G(x)$.

Докажем сначала для $t \in[-h, 0]$. В этом случае, используя условие $(g2)$, мы имеем следующую оценку:

$$e^{-p t}\|y(t)\|_E \leqslant e^{-p t}\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+\|g(x)\|_{C([-h, 0] ; E)}\right) \leqslant e^{p h}\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+K\right),$$

таким образом $\|y\|_* \leqslant r$, для $t \in[-h, 0]$.

Теперь пусть $t \in[0, a]$. Воспользовавшись леммой 2.2 и условием $(F3)$, мы для всех $f \in \mathcal{P}_F^{\infty}(x)$ имеем:

$$e^{-p t}\|y(t)\|_E \leqslant e^{-p t}\|\mathcal{G}(t)(\vartheta(0)-g(x)(0))\|_E+e^{-p t} \int_0^t(t-s)^{q-1}\|\mathcal{T}(t-s)\|_{L(E)}\|f(s)\|_E d s \leqslant$$

$$\leqslant M\|\vartheta(0)-g(x)(0)\|_E+e^{-p t} \frac{M q}{\Gamma(1+q)} \int_0^t(t-s)^{q-1} \alpha(t)(1+\|x(s)\|_E+\|x_s\|_{C([-h, 0] ; E)}) d s \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+K\right)+e^{-p t} \frac{M q\|\alpha\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)} \times$$

$$\times\left(\int_0^t(t-s)^{q-1} d s+\int_0^t(t-s)^{q-1} e^{p s} e^{-p s}\left(\|x(s)\|_E+\max _{-h \leqslant \theta \leqslant 0}\|x(s+\theta)\|_E\right) d s\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+K\right)+e^{-p t} \frac{M q\|\alpha\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)} \times$$

$$\times\left(\int_0^t(t-s)^{q-1} d s+\int_0^t(t-s)^{q-1} e^{p s} e^{-p s}\left(\|x(s)\|_E+\max _{-h \leqslant s \leqslant a}\|x(s)\|_E\right) d s\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+K\right)+e^{-p t} \frac{M q\|\alpha\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)} \frac{a^q}{q}+\|x\|_* \frac{2 q M\|\alpha\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)} e^{-p t} \int_0^t(t-s)^{q-1} e^{p s} d s \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+K\right)+\frac{M\|\alpha\|_{\infty} a^q}{\Gamma(1+q)}+$$

$$+\|x\|_* \frac{2 q M\|\alpha\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)} e^{-p t}\left(\int_0^{t-d}(t-s)^{q-1} e^{p s} d s+\int_{t-d}^t(t-s)^{q-1} e^{p s} d s\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+K\right)+\frac{M\|\alpha\|_{\infty} a^q}{\Gamma(1+q)}+\|x\|_* \frac{2 q M\|\alpha\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\left(e^{-p t} \frac{1}{d^{1-q}} \frac{e^{p(t-d)}-1}{p}+\frac{d^q}{q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h, 0] ; E)}+K\right)+\frac{M\|\alpha\|_{\infty} a^q}{\Gamma(1+q)}+\|x\|_* \frac{2 q M\|\alpha\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\left(\frac{1}{p d^{1-q}}+\frac{d^q}{q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)}+K\right)+\frac{M\,\|\alpha\|_{\infty}\,a^q}{\Gamma(1+q)}+\|x\|_*\,N\leqslant r.$$

Следовательно и для $t\in[0,a]$, $\|y\|_*\leqslant r$.

Из лемм 2.5 и 2.6 нам известно, что мультиоператор G п.н.с. и ν-уплотняющй. Тогда, благодаря теореме 1.1, мы получаем, что множество Σ - решений задачи (1)-(2) непусто.

Теперь, мы можем показать, что множество Σ априори ограничено. Действительно, из превиденных выше оценок следует, что для $x\in\Sigma$ и $f\in\mathcal{P}_F^{\infty}(x)$, мы имеем:

для $t\in[-h,0]:\|x\|_*\leqslant e^{ph}\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)}+K\right)$;

для $t\in[0,a]$:

$$\|x\|_*\leqslant M\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)}+K\right)+\frac{M\,\|\alpha\|_{\infty}\,a^q}{\Gamma(1+q)}+\|x\|_*\,N,$$

в свою очередь, из последнего получается оценка:

$$\|x\|_*\leqslant\left(M\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)}+K\right)+\frac{M\,\|\alpha\|_{\infty}\,a^q}{\Gamma(1+q)}\right)(1-N)^{-1}.$$

Таким образом для всех $t\in[-h,a]$, справедлива следующая оценка

$$\|x\|_*\leqslant\max\left\{e^{ph}\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)}+K\right);\left(M\left(\|\vartheta\|_{C([-h,0];E)}+K\right)+\frac{M\,\|\alpha\|_{\infty}\,a^q}{\Gamma(1+q)}\right)(1-N)^{-1}\right\}.$$

Воспользовавшись теоремой 1.2 мы получаем, что множество Σ компактно. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fractional Calculus Models and Numerical Methods / D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo. — New York : World Scientific Publishing, 2012. — 400 p.

2. Benchohra, M. Impulsive Differential Equations and Inclusions / M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas. — New York : Hindawi Publishing Corporation, 2006. — 370 p.

3. Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm. — Berlin : Springer-Verlag, 2010. — 252 p.

4. Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer. — Singapore : World Scientific, 2000. — 429 p.

5. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

6. Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam : North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., 2006. — 540 p.

7. Lakshmikantham, V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. — Teaneck : World Scientific Publishing, 1989. — 237 p.

8. Miller, K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K. S. Miller, B. Ross. — New York : John Wiley, 1993. — 384 p.

9. Differential Equations with Impulse Effects. Multivalued Right-Hand Sides With Discontinuities / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. A. Skripnik. — Berlin : de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, 2011. — 307 p.

10. Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999. — 340 p.

11. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays / T. D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong, J.-C. Yao // Applicable Analysis. — 2013. — V. 92, № 1. — P. 115–137.

12. Lakshmikantham, V. Theory of Fractional Functional Differential Equations / V. Lakshmikantham // Nonlinear Analysis. — 2008. — V. 69, № 10. — P. 3337–3343.

13. Lakshmikantham, V. Basic Theory of Fractional Differential Equations / V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala // Nonlinear Analysis. — 2008. — V. 69, № 8. — P. 2677–2682.

14. Obukhovskii, V. Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations / V. Obukhovskii, J.-C. Yao // Fixed Point Theory. — 2010. — V. 11, № 1. — P. 85–96.

15. Обуховский, В. В. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве / В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 192–209.

16. Zhang, Z. Existence of mild solutions for fractional evolution equations / Z. Zhang, B. Liu // Fixet Point Theory. — 2014. — V. 15, № 1. — P. 325–334.

17. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin— New-York : de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

18. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др. — Новосибирск : Наука, 1986. — 266 с.

19. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : Книжный дом «Либроком», 2011. — 224 с.

20. Петросян, Г. Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора / Г. Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия : Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, вып. 5. — С. 1355–1358.

21. Diestel, J. Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$ / J. Diestel, W.M. Ruess, W. Schachermayer // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 118. — P. 447–453.

REFERENCES

1. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J. Fractional Calculus Models and Numerical Methods. New York: World Scientific Publishing, 2012, 400 p.

2. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. Impulsive Differential Equations and Inclusions. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006, 370 p.

3. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 2010, 252 p.

4. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific, 2000, 429 p.

5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ix prilozheniya]. Minsk: Nauka i Technika, 1987, 688 p.

6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., 2006, 540 p.

7. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations. Teaneck: World Scientific Publishing, 1989, 237 p.

8. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley, 1993, 384 p.

9. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.A. Differential Equations with Impulse Effects. Multivalued Right-Hand Sides With Discontinuities. Berlin: de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, 2011, 307 p.

10. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999, 340 p.

11. Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays. Applicable Analysis, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115–137.

12. Lakshmikantham V. Theory of Fractional Functional Differential Equations. Nonlinear Analysis, 2008, vol. 69, no. 10, pp. 3337–3343.

13. Lakshmikantham V., Vatsala A.S. Basic Theory of Fractional Differential Equations. Nonlinear Analysis, 2008, vol. 69, no. 8, pp. 2677–2682.

14. Obukhovskii V., Yao J.-C. Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations. Fixed Point Theory, 2010, vol. 11, no. 1, pp. 85–96.

15. Obukhovskii V., Petrosyan G. On the Cauchy Problem for a Functional Differential Inclusion of the Fractional Order with Impulse Responses in Banach Space. [Obuxovskij V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funkcional'no-differencial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s impul'snymi xarakteristikami v banaxovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192–209.

16. Zhang Z., Liu B. Existence of mild solutions for fractional evolution equations. Fixet Point Theory, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 325–334.

17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin–New-York: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, 2001, 231 p.

18. Ahmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S. et. al. Measures of Non-Compactness and Condensing Operators. [Axmerov R.R., Kamenskij M.I., Potapov A.S. i dr.]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 266 p.

19. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the Theory of Multi-Valued Maps and Differential Inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij i differencial'nyx vklyuchenij]. Moscow: Moscow Book House "Librokom", 2011, 224 p.

20. Petrosyan G.A theorem on the weak closure of superposition multioperators. [Petrosyan G.G. Ob odnoj teoreme o slaboj zamknutosti superpozicionnogo mul'tioperatora]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya : Estestvennye i texnicheskie nauki — Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, iss. 5, pp. 1355–1358.

21. Diestel J., Ruess W.M., Schachermayer W. Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, vol. 118, pp. 447–453.

Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Petrosyan Garik, Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
Tel.: +7(473)255–36–63

Афанасова Мария Сергеевна, магистрант кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Afanasova Maria, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia, Faculty of Physics and Mathematics
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru
Tel.: +7(473)255–36–63