УДК 517.9

О КОМПЬЮТЕРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ПРОТОЧНЫМИ И ЗАСТОЙНЫМИ ЗОНАМИ

М. В. Муковнин, С. Х. М. Аль-Кхазраджи, Д. А. Фахад

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 05.03.2016 г.

Аннотация. Исследуется некоторая нестационарная задача для дифференциального уравнения, описывающего процесс фильтрации в пористой среде с застойными зонами, который характеризуется двумя параметрами— долей проточных зон и кинетическим коэффициентом массообмена между проточными и застойными зонами. Решается задача нахождения этих параметров по экспериментальным данным наблюдаемого потока. Указывается алгоритм их вычисления. Результат применяется к установлению численной классификации исследуемых потоков, что позволяет также качественно классифицировать и соответствующие магистрали жидкости.

Ключевые слова: задачи фильтрации, пористые среды, обратная задача.

ABOUT THE COMPUTER IMPLEMENTATION OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF FLUID MOTION IN A POROUS MEDIUM WITH FLOWING AND STAGNANT ZONES

M. V. Mukovnin, S. H. M. Al-Khazraji, A. D. Fakhad

Abstract. Computer implementation of the inverse problem for motion control fluid in a porous medium with running and stagnant zones. Explores some transient problem differential equation, for describing the process of filtration in porous media with stagnant zones, which is characterized by two parameters-stakes flow zones and kinetic coefficient of mass transfer between the flowing and stagnant zones. The problem of finding these parameters from experimental data observed flux. It specifies the algorithm for calculating them. The result is used to establish the numerical classification investigated streams that can also be classified qualitatively and corresponding fluid line.

Keywords: filtration problem, porous media, the inverse problem.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В промышленном производстве используется жидкость проводящие магистрали, пропускающие жидкость с взвешенными мелкими твердыми частицами. Фрагмент продольного разреза такой магистрали изображен на рисунке 1.

Под действием команд управления, поданных по линии управления, размер камер может изменяться. Они могут расшириться и служить для накопления взвешенных твердых частиц или сужаться и содействовать вымыванию из накопленного осадка наиболее легких частиц. Управление операциями сжатия и расширения камер осуществляет автоматизированный агрегат, оснащенный вычислительной машиной со специальной программой, которая использует значения ряда параметров, присущих оболочке магистрали и определенных в процессе её тестирования на выходе производственной линии.

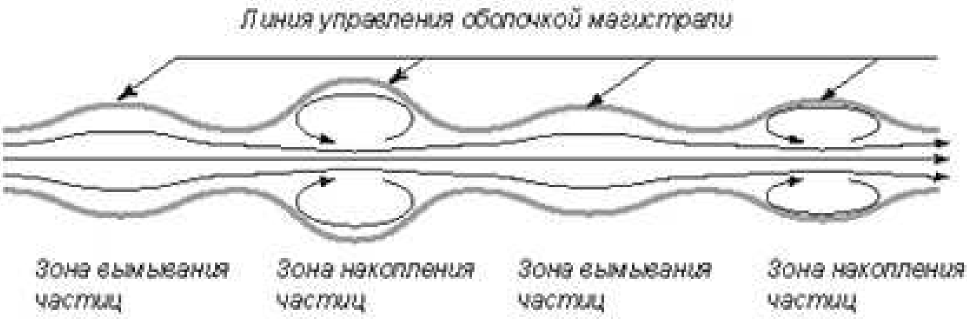

Рис. 1.

Оболочка жидкость проводящей магистрали является расходным материалом и заменяется через каждые две недели. Поэтому процесс производства этих изделий предполагает использование комплексов измерительной аппаратуры, позволяющих сопоставить каждой из них либо набор значений необходимых управляющей программе параметров либо определить изготовленную магистраль как бракованное изделие. Для каждой годной магистрали измерительная аппаратура определяет, в частности, значение параметров характеризующих течение жидкости в условиях отсутствия управляющих воздействий на её поверхность.

Здесь мы воспользуемся дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\gamma u(t,x) - (1-\nu)\gamma^2\int\limits_0^t e^{\gamma(s-t)}u(s,x)ds, \tag{1.1}$$

которое в соответствие с [1], [2] описывает процесс нестационарного течения вязкой сжимаемой жидкости в неограниченной справа магистрали, имеющей пористую структуру с равномерно распределенными проточными и застойными зонами, при известном на границе давлении

$$u(t,0) = q(t) \tag{1.2}$$

в области $0 \leqslant x \leqslant \infty, 0 \leqslant t \leqslant \infty$, с начально-краевыми условиями $u(0,x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(t,x) = 0$. Параметры, участвующие в уравнении имеют следующий физический смысл: $0 < \nu < 1$ — доля объема проточных зон, γ — константа, характеризующая обмен массами жидкости между проточными и застойными зонами.

В процессе проектирования программного обеспечения для микропроцессоров измерительного комплекса был поставлен вопрос об оценке времени выхода решения уравнения $u(t,x)$ при краевом условии $u(t,0) = \sin(t)$ на периодический режим при значении переменной $x = 1$. При этом были наложены ограничения на параметры модели: $0,05 < \nu < 0,45$, $0,1 < \gamma < 0,8$. Для расчетов была использована разностная схема, приведенная в статье [11].

В результате численных экспериментов было установлено, что в худшем случае периодический режим с удовлетворительной точностью устанавливается время равное 22π.

2. АЛГОРИТМ РАБОТЫ УСТРОЙСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ОТКЛИКА

Учитывая, что точное решение уравнения с краевым условием:

$$u(t,0) = A\cos(\omega t) \qquad -\infty < t < \infty;$$

имеем вид:

$$u(t,x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}x}\cos(\omega t - \sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}x), \tag{2.1}$$

где

$$\alpha = \frac{\omega^2(1-\nu)\gamma}{(\gamma^2+\omega^2)}, \tag{2.2}$$

$$\rho = \sqrt{(\frac{\omega^2(1-\nu)\gamma}{(\gamma^2+\omega^2)})^2 + (\frac{\omega(\gamma^2+\nu\omega^2)}{(\gamma^2+\omega^2)})^2}, \tag{2.3}$$

γ — коэффициент модели, ν — коэффициент модели, ω — частота граничной функции, A — амплитуда граничной функции.

Для каждого измерительного эксперимента с целью вычисления значений параметров модели течение жидкости краевое условие, формируемое на входе магистрали, описывается функцией

$$u(t,0) = \cos(t).$$

В качестве точки наблюдения выбирается значение $x = l$.

Точное решение модельной краевой задачи в точке наблюдения записывается выражением:

$$u(t,1) = e^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}}\cos\Big(t - \sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}\Big),$$

из которого возникает пара соотношений для определения значений параметров γ и ν.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЫ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ γ И ν

Пусть шаг измерения значений функции равен d. Пусть в процессе измерения значений функции на отрезке $[0, 2\pi]$ получена последовательность значений $\{f_1 \dots f_n\}$. На основе этих данных вычислим коэффициенты Фурье:

$$F = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{j=n}\cos(jd)d \quad \text{и} \quad G = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{j=n}\sin(jd)d.$$

Таким образом, для функции наблюдений получим приближенное представление в форме:

$$F\cos(t) + G\sin(t).$$

Преобразуем его к виду, заданному формулой (1) и в результате получим:

$$\sqrt{F^2+G^2}\cos\Big(t + \arccos\Big(\frac{F}{\sqrt{F^2+G^2}}\Big)\Big).$$

Обозначим

$$\sqrt{F^2+G^2} = V, \quad \arccos\Big(\frac{F}{\sqrt{F^2+G^2}}\Big) = S.$$

Тогда из представления решений в форме (2.1) получим пару соотношений:

$$V = e^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}}, \quad S = -\sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}, \quad \frac{\rho+\alpha}{2} = \ln^2(V), \quad \frac{\rho-\alpha}{2} = S^2.$$

Отсюда получаем систему двух уравнений для определения параметров уравнения: $\rho = \ln^2(V) + S^2$, $\alpha = \ln^2(V) - S^2$. Или, подставив выражения для ρ и α,

$$\sqrt{(\frac{(1-\nu)\gamma}{(\gamma^2+1)})^2 + (\frac{(\gamma^2+\nu)}{(\gamma^2+1)})^2} = \ln^2(V) + S^2, \quad \frac{(1-\nu)\gamma}{\gamma^2+1} = \ln^2(V) - S^2.$$

В правой части уравнения записаны постоянные значения, для которых используем обозначения:

$$\ln^2(V) + S^2 = w, \quad \ln^2(V) - S^2 = s.$$

В этих обозначениях, первое уравнение можно записать в виде:

$$\sqrt{s^2 + (\frac{(\gamma^2+\nu)}{(\gamma^2+1)})^2} = w \text{ или } \frac{(\gamma^2+\nu)}{(\gamma+1)} = \sqrt{w^2 - s^2} = 2\ln^2(V)S^2.$$

Отсюда

$$\nu = \left(\sqrt{w^2-s^2} - 1\right)\gamma^2 + \sqrt{w^2-s^2}, \quad \nu = (2\ln^2(V)S^2 - 1)\gamma^2 + 2\ln^2(V)S^2.$$

Тогда из второго уравнения получим $(1-\nu)\gamma = s(\gamma^2+1)$, или

$$(1 - \big(\sqrt{w^2-s^2} - 1\big)\gamma^2 - \sqrt{w^2-s^2})\gamma = s(\gamma^2+1),$$

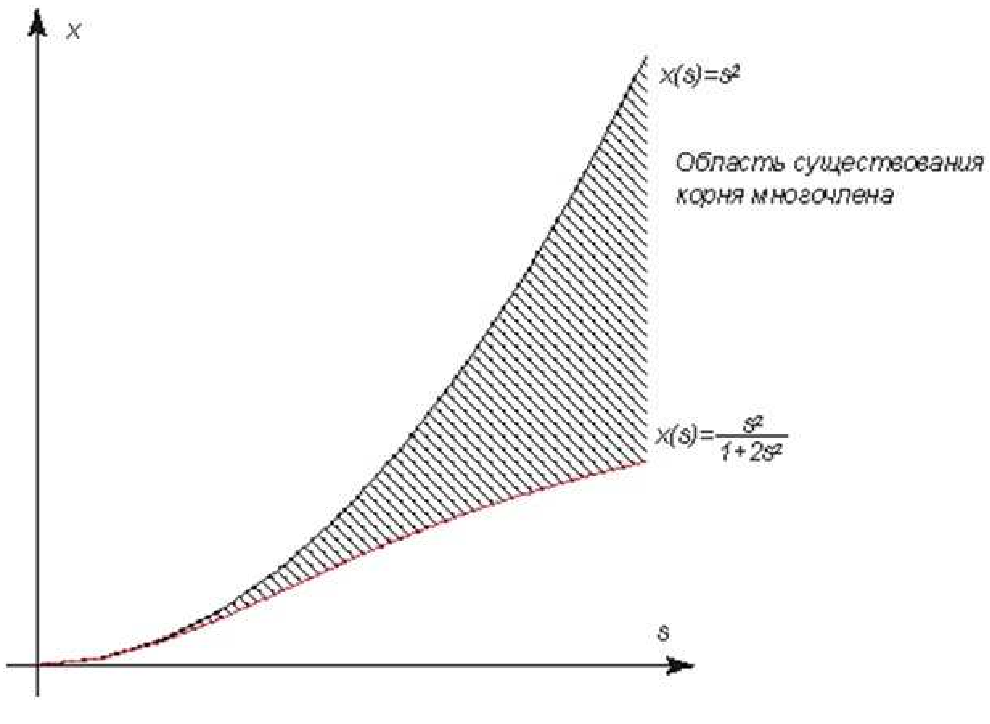

Рис. 2.

$$\gamma - (2\ln^2(V)S^2 - 1)\gamma^3 - 2\ln^2(V)S^2\gamma = (\ln^2(V) - S^2)(\gamma^2 + 1),$$
$$(2\ln^2(V)S^2 - 1)\gamma^3 + (\ln^2(V) - S^2)\gamma^2 + (2\ln^2(V)S^2 - 1)\gamma + (\ln^2(V) - S^2) = 0.$$

В результате приходим к многочлену третьего порядка для определения значения параметра γ

$$\left(\sqrt{w^2 - s^2} - 1\right)\gamma^3 + s\gamma^2 + \left(\sqrt{w^2 - s^2} - 1\right)\gamma + s = 0.$$

При $\gamma = 0$ значение многочлена равно s, или $\ln^2(V) - S^2$, а при $\gamma = 1$ его значение равно $2(s + \sqrt{w^2 - s^2} - 1)$ или $2(\ln^2(V)(1 + S^2) + S^2(\ln^2(V) - 1))$. Обозначим $\ln^2(V) = x$. Тогда в этих обозначениях значения многочлена при $\gamma = 0$ равно $x - S^2$, а при $\gamma = 1$ равно $2(x(1 + S^2) + S^2(x - 1))$.

Многочлен будет иметь значения противоположных знаков на концах интервала $0 < \gamma < 1$, если соответствующие значения x и S будут лежать в заштрихованной области на рисунке 2.

В тех случаях, при которых многочлен не имеет корня на интервале $(0, 1)$ или имеет более одного корня, то жидкость проводящая магистраль заносится в разряд бракованных изделий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко, Ю. И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю. И. Бабенко. — Л. : Химия, 1986. — 144 с.

2. Бабенко, Ю. И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена / Ю. И. Бабенко. — СПб : НПО "Профессионал", 2009. — 584 с.

3. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. — М. : Наука, 1973. — 631 с.

4. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

5. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

6. Костин, В. А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В. А. Костин, М. Н. Небольсина // Доклады Академии Наук. — 2009. — Т. 428, № 1. — С. 20–22.

7. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. П. Шабат. — М. : Наука, 1973. — 736 с.

8. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1986. — 288 с.

9. Баев А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

10. Орлов, В. П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / В. П. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 190–197.

11. Аль Кхазраджи Сундус Х.М. Об автоматическом регулировании течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде / Аль-Кхазраджи Сундус Х.М., В. А. Костин, В. Г. Фирсов // «Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика» : сб. науч. тр. по мат. межд. заочной науч.-практич. конф. «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения». — г. Воронеж, 18–19 ноября 2014 г. — 2014. — № 5, Ч. 2 (10–2). — С. 8–19.

12. Дифференциал Стилтьеса в моделировании колебаний струны с локализованными особенностями / А. Д. Баев, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 73–83.

13. Баев, А. Д. Теоремы о “следах” для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

14. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

15. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

REFERENCES

1. Babenko Yu.I. Heat and Mass Transfer. The Method of Calculation of Heat and Diffusion Currents. [Babenko Yu.I. Teplomassoobmen, metody rascheta teplovyx i diffuzionnyx potokov]. Leningrad, Chemistry, 1986, 144 p.

2. Babenko Yu.I. Methods of a fractional integrodifferentsirovaniye in applied of the theory of a Heat and Mass Transfer. [Babenko Yu.I. Metody drobnogo integrodifferencirovaniya v prikladnyh zadachah teorii teplomassoobmena]. SPB: NPO "Proffesional", 2009, 584 p.

3. Bahvalov N.S. Numerical methods. [Bahvalov N.S. Chislennye metody]. Moscow: Nauka, 1973, 631 p.

4. Iosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

5. Krejn S.G. Linear Differential Equations in Banach Spaces. [Krejn, S. G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

6. Kostin V.A., Nebol'sina M.N. Well-Posedness of Boundary Value Problems for a Second-Order Equation. [Kostin V.A., Nebol'sina M.N. O korrektnoj razreshimosti kraevyx zadach dlya uravneniya vtorogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2009, vol. 428, no. 1, pp. 20–22.

7. Lavrent'ev M.A, Shabat B.V. Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. [Lavrent'ev M.A, Shabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo]. Moscow, Nauka, 1973. 736 p.

8. Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods of the solution of incorrect problems. [Tixonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnyx zadach]. Moscow: Nauka, 1986, 288 p.

9. Baev A.D., Buneev S.S. Apriori estimates of solutions one of boundary-value problem in the band for degenerate elliptic equation of high order are obtained. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka reshenij odnoj kraevoj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

10. Orlov V.P. Strong apriori estimates of solutions inhomogeneous initial boundary value problem one model of viscoelastic medium. [Orlov V.P. Sil'nye apriornye ocenki reshenij neodnorodnoj nachal'no-kraevoj zadachi odnoj modeli vyazkouprugoj sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 190–197.

11. Al–Khazraji S.H.M. Kostin V.A., Firsov V.G. About automatic regulation of the flow of viscous compressible fluid in a porous medium. [Al–Khazraji S.H.M. Kostin V.A., Firsov V.G. Ob avtomaticheskom regulirovanii techeniya vyazkoj szhimaemoj zhidkosti v poristoj srede]. *«Aktual'nye napravleniya nauchnyx issledovanij XXI veka : teoriya i praktika» : sb. nauch. tr. po mat. mezhd. zaochnoj nauch.-praktich. konf. «Sovremennye problemy matematiki. Metody, modeli, prilozheniya» — Current lines of research Studies of the XXI century: Theory and Practice, "Modern problems mathematics. Methods, models, applications"*, Voronezh: 2014, no. 5, part 2 (10–2), pp. 8–19.

12. Baev A.D., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. The Stieltjes differential in

modeling oscillations of a string with localized singularities. [Baev A.D., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Differencial Stilt'esa v modelirovanii kolebanij struny s lokalizovannymi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 73–83.

13. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Davidova M.B. Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy. [Baev A.D., Kovalevskij R.A., Davydova M.B. Teoremy o "sledax" dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 63–75.

14. Baev A.D., Kobylinskii P.A., Davidova M.B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A.D., Kobylinskij P.A., Davydova M.B. O svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

15. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

Муковнин М. В., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская федерация
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com

Mukovnin M. V., graduate student, Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com

Аль-Кхазраджи С.Х.М., прикрепленная для завершения работы над диссертацией на кафедре математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: saohhatem@yahoo.com
Тел.: +7(473)220–83–64

Al-Khazraji S.H.M., attached to complete the work for a dissertation, of chair of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: saohhatem@yahoo.com
Tel.: +7(473)220–83–64

Фахад А.Д., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская федерация
E-mail: jameel@inbox.ru

Fakhad A.D., graduate student, Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation,
E-mail: jameel@inbox.ru