УДК 517

О КОММУТАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ПАРАМЕТРА, С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ*

Р. А. Ковалевский, А. Д. Баев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.03.2017 г.

Аннотация. В статье исследуются свойства коммутации некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных операторов. Рассмотрен новый класс таких операторов. Операторы построены по специальному интегральному преобразованию. Рассматривается случай переменных символов, которые зависят еще от комплексного параметра. Исследованы свойства коммутаторов этих операторов с операторами дифференцирования. Получены формулы представления этих коммутаторов, а также оценки норм коммутаторов в специальных весовых пространствах, номы в которых задаются с помощью специального интегрального преобразования.

Ключевые слова: преобразование Фурье, весовое преобразование, псевдодифференциальный оператор, вырождающийся псевдодифференциальный оператор, коммутатор.

ON THE COMMUTATION OF A SINGLE CLASS OF DIVERGENT PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS WITH AN ALTERNATING SYMBOL DEPENDING ON THE PARAMETER, WITH A DIFFERENTIATION OPERATOR

R. A. Kovalevsky, A. D. Baev

Abstract. The article investigates the commutation properties of certain classes of degenerate pseudodifferential operators. A new class of such operators is considered. The operators are constructed according to a special integral transformation. We consider the case of variable symbols that depend on the complex parameter as well. The properties of commutators of these operators with differentiation operators are investigated. Representation formulas for these commutators are obtained, as well as estimates of the norms of commutators in special weighted spaces, the nommas in which are given by means of a special integral transformation.

Keywords: Fourier transform, weight transformation, pseudodifferential operator, degenerate pseudodifferential operator, commutator.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037)

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для вырождающихся уравнений являются “неклассическими” задачами математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. Вслед за этим появился ряд работ, в которых методами, близкими к методу М. И. Вишика, изучались вырождающиеся уравнения второго порядка. Достаточно полную библиографию этих можно найти в книгах М. М. Смирнова [5], О. А. Олейник, Е. В. Радкевича [6]. Фундаментальные результаты по изучению асимптотических свойств решений линейных и нелинейных эллиптических и параболических уравнений и систем были получены В. А. Кондратьевым [7]. В. А. Кондратьевым, Е. М. Ландисом [8]. Метод “эллиптической регуляризации” был применен О. А. Олейник [9], а затем Дж. Коном и Л. Ниренбергом [10] для изучения эллиптико–параболических уравнений второго порядка. В работе В. П. Глушко [11] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [12]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [13].

Дальнейшее развитие теории вырождающихся уравнений потребовало исследования специальных классов вырождающихся псевдодифференциальных операторов. В настоящей работе исследуются вырождающиеся псевдодифференциальные операторы, построенные по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [14]. Вырождающиеся псевдодифференциальные операторы с постоянным по t символом были изучены в [14], некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом были исследованы в [15]–[18]. Формулировки основных теорем о коммутации вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящем от параметра, были приведены в [19]. С использованием теории вырождающихся псевдодифференциальных операторов были получены коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании и единственности решений некоторых краевых задач для вырождающихся дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений (см. [20]–[23]).

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1.1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Здесь $C_0^\infty(R_+^1)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R_+^1. Преобразование (1.1) и преобразование Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)\,d\tau, \quad \eta \in R^1$$

связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{1.2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = = \int\limits_t^d \dfrac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{L_2(R_+^1)}. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) даёт возможность расширить преобразование (1.1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\overline{R}_+^1)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \quad j = 1, 2, \ldots, \text{ где } D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\,\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R_+^n)$; $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} \left(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^s |F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]|^2\, d\xi\, d\eta, \tag{1.4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s \geqslant 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|\nu\|_{s,\alpha,q} = \left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{q}\right]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha \left[\left(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l \nu]\right]\right\|^2_{L_2(R_+^n)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $\left[\frac{s}{q}\right]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1 \leqslant l} \left\{ 2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2} \right\}, \; l = 1, 2, \ldots,$$

σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1.1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1} F_{x_2\to\xi_2} \ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\nu(x,t) = F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\nu(x,t)]]. \tag{1.6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \overline{R}^1_+$, $\sigma \in R^1$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,1,2,\ldots$, $l = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl} \left(|p|^2 + |\xi| + |\eta|\right)^{\sigma - l} \tag{1.7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{R}^1_+$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Пусть $\nu(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $\partial_t^l \nu(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $l = 1,2,\ldots$. Пусть выполнено условие 1 (с заменой σ на $s+\sigma$). Тогда для оператора*

$$M_{l,\sigma} = \partial_t^l K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) - K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\partial_t^l \tag{1.8}$$

справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}\nu\|_{s,\alpha} \leqslant \left(\sum_{j=0}^{l} \|\partial_t^l \nu\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1} |\partial_t^j \nu\|_{s+\sigma,\alpha} \right) \tag{1.9}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ν.

Теорема 2. *Пусть $q > 1$, $s \geqslant 0$ — действительные числа, $\nu(x,t) \in H_{s+(l+1)q,\alpha,q}(R^n_+)$. Пусть символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^q_{\alpha,\delta}(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{R}^1_+$, $\delta \in [0,1)$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = s+q$. Тогда для оператора $M_{l,q}$, определенного в (1.8) при $\sigma = q$, справедлива оценка*

$$\|M_{l,q}\nu\|_{s,\alpha,q} \leqslant c\|\nu\|_{s+lq+\delta,\alpha,q} \tag{1.10}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ν, p.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Утверждения теорем 1 и 2 вытекают из ряда вспомогательных утверждений, которые мы приведем здесь без доказательства.

Лемма 2.1. Пусть функция $\beta(\tau)$ принадлежит пространству $C^N(R^1)$ $(N \geqslant \sigma,\ \sigma \in R^1)$. Пусть функция $\lambda(p,\tau,y)$ принадлежит $C^\infty(Q \times \Omega \times R^1)$, где $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$ — конус в комплексной плоскости, $\Omega \in R^1$ — произвольное открытое множество, $y \in R^1$, и при всех $j, l = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|\partial_\tau^j \partial_y^j \lambda(p,\tau,y)\right| \leqslant c_{jl}(|p|+|y|)^{\sigma-j} \tag{2.1}$$

с некоторыми константами $c_{jl} > 0$.

Тогда для любой функции $w(\tau) \in S(R^1)$ справедлива формула представления

$$\begin{aligned} &\beta(\tau)F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(p,\tau,y)F_{\tau\to y}[w]] - F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(p,\tau,y)F_{\tau\to y}[\beta(\tau)w]] = \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda_i(p,\tau,y)F_{\tau\to y}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w]] + \\ &\qquad\qquad + F^{-1}_{y\to\tau}[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_N(p,\tau,y-z,z)F_{\tau\to(y-z)}[D^N_\tau\beta(\tau)]F_{\tau\to z}[w]dz], \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\lambda_i(p,\tau,y) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_y^i\lambda(p,\tau,y), \tag{2.3}$$

$$g_N(p,\tau,y-z,z) = N\int\limits_0^1 \lambda_N(p,\tau,y-\theta(y-z))(1-\theta)^{N-1}d\theta. \tag{2.4}$$

Следствие 2.1. Пусть функция $\beta(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Пусть функция $\lambda(p,\tau,y)$ принадлежит $C^\infty(R^1)$ и $\left|\partial_y^j\lambda(p,\tau,y)\right| \leqslant c < +\infty$, $j = 0,1,2,\ldots$, где число $c > 0$ не зависит от p,τ,y. Тогда при всех $w \in S(R^1)$ справедливо равенство (2.2).

Лемма 2.2. Пусть выполнено условие 1 и функция $f(t)$ принадлежит $C^{s_1}[0,+\infty)$, где число s_1 определено в условии 1, пусть $\left|\partial_t^i f(t)\right| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$, $i = 0,1,\ldots,s_1$. Тогда при $s_1 \geqslant N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p\leqslant l}\{2p + \frac{l+\rho-p}{\nu}\}$ $(\rho > 0, l > 0$ — действительные числа) равномерно по $t \in [0,+\infty)$ ограничена величина

$$\left|\alpha^{-\rho}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N(f(t)\alpha^{-l}(t))\right| \leqslant c < +\infty. \tag{2.5}$$

Следствие 2.2. Пусть выполнено условие 1. Тогда при выполнении неравенства $s_1 - l \geqslant N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p\leqslant l}\{2p + \frac{l-p+\frac{1}{2}}{\nu}\}$ $(l = 1,2,\ldots,s_1,\ s_1$ — определено в условии 1) для всех $t \in [0,+\infty)$ справедлива оценка $\left|\alpha^{-\frac{1}{2}}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N(\theta_i^l(t)\alpha^{-l}(t))\right| \leqslant c < \infty$, $i = 0,1,\ldots,l$.

Следствие 2.3. Пусть выполнено условие 1. Тогда при $s_1 \geqslant N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}}\left\{2p + \dfrac{\frac{3}{2}-p}{\nu}\right\} = \max\left\{\dfrac{3}{2\nu},\ 1+\dfrac{1}{\nu}\right\}$ выполняется оценка

$$\left|\alpha^{-1}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N(\alpha^{-\frac{1}{2}}(t))\right| \leqslant c < +\infty$$

при всех $t \in [0, +\infty)$, где число s_1 определено в условии 1.

Следствие 2.4. Пусть выполнено условие 1. Тогда при $s_1 \geqslant N \geqslant \max\limits_{0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}} \left\{ 2p + \dfrac{\frac{1}{2} - p}{\nu} \right\} =$
$= \max \left\{ \dfrac{1}{2\nu}, 1 \right\}$ и при всех $t \in [0, +\infty)$ выполняется оценка $\left| (\alpha(t)\partial_t)^N \alpha^{-\frac{1}{2}}(t) \right| \leqslant c < +\infty$.

Лемма 2.3. Пусть выполнено условие 1 и $s_1 \geqslant l + i$; $i, l = 1,2,\ldots$. Предположим, что функция $u(t)$ принадлежит $C^{l+i}[0, +\infty)$. Тогда для функции

$$G_i u(t) = \sum_{j=0}^{l} \alpha^{-l}(t)(\alpha(t)\partial_t)^i (\theta_j^l(t)) \partial_{\alpha,t}^j u(t), \tag{2.6}$$

где функции $\theta_i^l(t)$ строятся по рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} \theta_i^{l+1}(t) = \theta_{i-1}^l(t) + \partial_{\alpha,t}\theta_i^l(t) - (l + \frac{1}{2})\alpha'(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant l \\ \theta_0^{l+1}(t) = \partial_{\alpha,t}\theta_0^l(t) - (l + \frac{1}{2})\alpha'(t), \ \theta_l^l \equiv 1, \quad \theta_0^l = -\frac{\alpha'(t)}{2}, \end{cases} \tag{2.7}$$

справедлива формула представления

$$G_i u(t) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{i_1=0}^{i-1} b_{i_1,j}^i(t) \partial_{\alpha,t}^{i_1} \partial_t^j u(t), \tag{2.8}$$

где ограниченные при $t \in [0; +\infty)$ функции $b_{i_1,j}^i(t)$ принадлежат $C^{s_1-l-i}[0, +\infty)$ и зависят лишь от функции $\alpha(t)$ и её производных до порядка $l + i$.

Лемма 2.4. Пусть выполнено условие 1, $s_1 \geqslant l + i$; $l, i = 1, 2, \ldots, s_1$, предположим, что функция $u\,(t)$ принадлежит $C^{l+i}[0, +\infty)$. Тогда справедлива формула представления

$$\sum_{j=0}^{l} (\alpha\partial_t)^i (\theta_j^l(t)\alpha^{-l}(t)) \partial_{\alpha,t}^j u(t) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{i_1=0}^{i-1} b_{i_1,j}^i(t) \partial_{\alpha,t}^{i_1} \partial_t^j u(t), \tag{2.9}$$

функции $\theta_j^l(t)$, $j = 0, 1, \ldots, l$ определены в (2.7), а функции $b_{i_1,j}^i(t)$ принадлежат $C^{s_1-l-1}[0, +\infty)$.

Следствие 2.5. Пусть выполнены условия леммы 2.4 при $l = 1$. Тогда справедливо равенство

$$J = \sum_{j=0}^{1} (\alpha(t)\partial_t)^i (\theta_j^1(t)\alpha^{-1}(t)) \cdot \partial_{\alpha,t}^j u(t) = P_{i,1}(t)\partial_t^u(t) - \sum_{i_1=1}^{i} c_{i,i_1} \partial_t (\alpha\partial_t)^{i_1-1} (\frac{\alpha'(t)}{2}) P_{i-i_1,1}(t) u(t), \tag{2.10}$$

где функции $P_{N,l} \in C^{s_1-N}[0, +\infty)$ строятся по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} P_{N,l}(t) = P'_{N-1,l}(t)\alpha(t) - lP_{N-1,l}(t)\alpha'(t) \\ P_{1,l}(t) = f'(t)\alpha(t) - l\alpha'(t)f(t). \end{cases} \tag{2.11}$$

Введем функцию $\beta(\tau)$ такую, что

$$\beta(\tau) = \alpha^{-\frac{1}{2}}\,(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \tag{2.12}$$

где $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Лемма 2.5. Пусть выполнено условие 1 и $1+\frac{1}{\nu} \leqslant N \leqslant s_1$. Если функция $u(t)$ принадлежит $C_0^N[0,+\infty)$, то функция $\beta(\tau)w(\tau)$ принадлежит $L_1(R^1)$, где $\beta(\tau)$ определена в (2.12),

$$w(\tau) = \sqrt{\alpha(t)} D_{\alpha,t}^N\, u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\,,\ D_{\alpha,t} = -\sqrt{-\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}. \tag{2.13}$$

Следствие 2.6. Пусть выполнены условия леммы 2.5. Тогда справедливо включение

$$D_\tau^j \beta(\tau)\cdot w(\tau) \in L_1(R^1), \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{2.14}$$

где функции $\beta(\tau)$ и $w(\tau)$ определены соответственно в (2.12), (2.13).

Следствие 2.7. Пусть выполнены условия леммы 2.5. Тогда $w(\tau)$ принадлежит $L_1(R^1)$, где функция $w(\tau)$ определена в (2.13).

Лемма 2.6. Пусть $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, s — действительное число, $b(t) \in C^{[|s|]+1}[0,+\infty)$ и $\left|\partial_t^i b(t)\right| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty]$, $i = 0,1,\ldots,[|s|]+1$. Тогда выполняется оценка $\|b(t)v(x,t)\|_{s,\alpha} \leqslant c\,\|v\|_{s,\alpha}$ с константой $c > 0$, не зависящей от v.

Здесь и в дальнейшем $\|\cdot\|_{s,\alpha}$ — норма в пространстве $H_{s,\alpha}(R_+^n)$.

Обозначим

$$\lambda_i(p,t,\xi,\eta) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_\eta^i \lambda(p,t,\xi,\eta),\ i = 1,2,\ldots,N, \tag{2.15}$$

$$g_N(p,t,\xi,\eta-y,y) = \frac{(-1)^N}{N!}\int_0^1 \lambda_N(p,t,\xi,\eta - z(\eta-y))(1-z)^{N-1}dz. \tag{2.16}$$

Рассмотрим операторы $Q_{i,\sigma}$, $i = 1,2,\ldots,N-1$; $R_{N,l,\sigma}$

$$Q_{i,\sigma}[v(x,t)] = F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[\lambda_i(p,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]], \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} R_{N,l,\sigma}v(x,t) = \sum_{j=0}^{l}\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\xi\to x}^{-1}F_{\eta\to\tau}^{-1}[\int_{R^1} F_{\tau\to(\eta-y)}[D_\tau^N\beta_{i,l}(\tau)]\cdot \\ \cdot F_{x\to\xi}F_{\tau\to y}[(\partial_{\alpha,t}^j v)_\alpha(x,\tau)]g_N(p,t,\xi,\eta-y,y)\,dy]_{\tau=\varphi(t)}\,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь

$$\beta_{j,l}(\tau) = \left.\frac{\theta_j^l(t)}{\alpha^l(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(\tau)},\ j = 0,1,\ldots,l, \tag{2.19}$$

а функции $\theta_j^l(t)$ определены в (2.7).

Здесь и в дальнейшем

$$\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{ds}{\alpha(s)}. \tag{2.20}$$

Заметим, что для любой функции $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\partial_{\alpha,t}^l K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v = \sum_{p_1=0}^{l} c_{p_1 l}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)\cdot \\ &\cdot F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{l-p_1}v(x,t)]], \end{aligned} \tag{2.21}$$

где $c_{p_1 l}$ — биномиальные коэффициенты.

Таким образом, получим равенство

$$\partial_t^l K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v = \sum_{i=0}^{l} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} \partial_{\alpha,t}^i K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} \sum_{p_1=0}^{i} c_{p_1 i} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1} \lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1} v(x,t)]] =$$

$$= \frac{\theta_0^l(t)}{\alpha^l(t)} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[v]] + \sum_{i=1}^{l} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^i v]] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{i} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} c_{p_1 i} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1} \lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1} v(x,t)]] =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta)] F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^i v]] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{i} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} c_{p_1 i} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1} \lambda(p,t,\xi,\eta)] F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1} v]]. \quad (2.22)$$

С другой стороны, получим, что

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\partial_t^l v = K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})[\sum_{i=0}^{l} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} \partial_{\alpha,t}^i v]. \quad (2.23)$$

Почленно вычитая, из (2.22) равенство (2.23), получим равенство

$$M_{l,\sigma} v = \sum_{i=0}^{l} [\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})[\partial_{\alpha,t}^i v] - K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})[\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} \partial_{\alpha,t}^i v]] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{i} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} c_{p_1 i} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1} \lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1} v]]. \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что для того чтобы прокоммутировать весовой псевдодифференциальный оператор $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ и оператор ∂_t^l, достаточно изучить коммутатор оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ с функциями $\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+, \sigma \in R^1$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Пусть выполнено условие 1. Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (1.8) при всех $v(x,t) \in C_0^\infty(R^n_+)$ справедлива формула представления

$$M_{l,\sigma} v(x,t) = \sum_{i=1}^{N-1} Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l} \sum_{i_1=0}^{i-1} b^i_{i_1,j}(t) D^{i_1}_{\alpha,t} \partial_t^j v(x,t)] + R_{N,l,\sigma} v(x,t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{i} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} c_{p_1 l} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1} \lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1} v]], \quad (2.25)$$

где функции $Q_{i,\sigma}$, $R_{N,l,\sigma}$ определены в (2.17), (2.18), $c_{p_1 l}$ — биномиальные коэффициенты, $b^i_{i_1,j}(t) \in C^{s_1-l-i}[0;+\infty)$ — ограниченные функции, функции $\theta_i^l(t)$ определены в (2.7).

Доказательство. Из следствия 2.1. вытекает, что функция $\beta_{j,l}(\tau)$ (см. (2.19)) удовлетворяет условиям леммы 2.1. Следовательно, учитывая (1.2) и равенство $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, справедливое при $t>0$ для $w(\eta)\in L_2(R^1)$, получим из леммы 2.1 следующее равенство

$$M_{l,\sigma}v = \sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_{\xi\to x}F_\alpha^{-1}[\lambda_i(p,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[\sum_{j=0}^{l}\{(\alpha\partial_t)^i(\frac{\theta_j^l(t)}{\alpha^l(t)})\partial^j_{\alpha,t}v]] + R_{N,l,\sigma}v(x,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 l}F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p_1}_{\alpha,t}v]].$$

Из этого равенства выводим формулу (2.25).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$ справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{L_2(R^n_+)} \leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{\sigma-1,\alpha} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1}v\right\|_{\sigma,\alpha}) \qquad (2.26)$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Доказательство. Из (2.15)–(2.18) с помощью получим оценку

$$\left\|\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i}b^i_{i_1,j}(t)D^{i_1}_{\alpha,t}\partial_t^l v]\right\|_{L_2(R^n_+)} \leqslant c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{\sigma-1,\alpha}. \qquad (2.27)$$

Аналогично, получим оценку

$$\|R_{N,l,\sigma}v(x,t)\|_{L_2(R^n_+)} \leqslant c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{\sigma-N+\varepsilon}, \qquad (2.28)$$

где $\varepsilon > \frac{1}{2}$ — некоторое действительное число.

Так как $(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(t,\xi,\eta)\in S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, то справедлива оценка

$$\left\|\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p_1}_{\alpha,t}v]]\right\|_{L_2(R^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\left\|\partial^{i-p_1}_{\alpha,t}v\right\|_{\sigma,\alpha}. \qquad (2.29)$$

Выбирая $N\geqslant 1+\varepsilon$, получим из (2.25) и (2.27)–(2.29)

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{L_2(R^n_+)} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b^i_{i_1,j}(t)D^{i_1}_{\alpha,t}\partial_t^j v(x,t)]\right\|_{L_2(R^n_+)} + \|R_{N,l,\sigma}v(x,t)\|_{L_2(R^n_+)} +$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p_1}_{\alpha,t}v]]\right\|_{L_2(R^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{\sigma-1,\alpha}+\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{\sigma-N+\delta,\alpha}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1} v\right\|_{\sigma,\alpha})\leqslant$$

$$\leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{\sigma-1,\alpha}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1} v\right\|_{\sigma,\alpha}).$$

Следствие 2.8. Пусть $s\in R^1$, $\sigma\in R^1$ и выполнено условие 1 с заменой в нем σ на $s+\sigma$. Пусть $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $p\in Q=\{p\in C,|\arg p|<\frac{\pi}{2},|p|>0\}$. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$ и $l=1,2,\ldots$ справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha}\leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1} v\right\|_{s+\sigma,\alpha}) \tag{2.30}$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Доказательство. Используя лемму 2.1, получим оценку

$$\|R_{N,l,\sigma}v\|_{s,l}\leqslant c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_{\alpha,t}^j v\right\|_{s+\sigma-N+\varepsilon,\alpha},$$

где $\varepsilon>\frac{1}{2}$ — произвольное число.

Кроме того, из (2.15)–(2.16) и (1.7) с помощью равенства (1.3) и леммы 2.6 выводим оценку $\left\|Q_{i,\sigma}[\sum\limits_{j=0}^{l}\sum\limits_{i_1=0}^{i-1}b^i_{i_1,j}(t)D^{i_1}_{\alpha,t}\partial_t^j v\right\|_{s,\alpha}\leqslant c\sum\limits_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha}$.

Аналогично оценке (2.29) выводим неравенство

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{j}\frac{\theta^l_j(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{j-p_1}v]]\right\|_{s,\alpha}\leqslant c\sum_{j=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{j}\left\|\partial_{\alpha,t}^{j-p_1}v\right\|_{s+\sigma,\alpha}.$$

Следовательно, при $N\geqslant 1+\varepsilon$ получим

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b^i_{i_1,j}(t)D^{i_1}_{\alpha,t}\partial_t^j v(x,t)]\right\|_{s,\alpha}+\|R_{N,l,\sigma}v(x,t)\|_{s,\alpha}+$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v]]\right\|_{s,\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha}+\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-N+\delta,\alpha}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1} v\right\|_{s+\sigma,\alpha})\leqslant$$

$$\leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1} v\right\|_{s+\sigma,\alpha}).$$

Доказательство теоремы 1. Докажем оценку (1.9) вначале для функций $v(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$. Из следствия 2.8 получим оценку

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha}\leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1} v\right\|_{s+\sigma,\alpha}). \tag{2.31}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части этого неравенства. Сделав замену $i - p_1 = j$, получим

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1}v\right\|_{s+\sigma,\alpha} \leqslant c\sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{s+\sigma,\alpha}.$$

Применяя это неравенство в правой части неравенства (2.31), получим неравенство

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leqslant c_1(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{s+\sigma,\alpha}).$$

Таким образом, справедливость теоремы 1 для функций $v(x,t) \in C_0^{\infty}(R_+^n)$ установлена. В общем случае справедливость теоремы 1 следует из того, что множество функций $C_0^{\infty}(R_+^n)$ плотно в пространстве $H_{s,\alpha}(R_+^n)$.

Следствие 2.8. При выполнении условий теоремы 1 справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^{l}K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v\right\|_{s,\alpha} \leqslant c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{s+\sigma,\alpha}.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $\partial_t^{l}K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t}) = K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})\partial_t^{l} + M_{l,\sigma}$ и повторить доказательство теоремы 1.

Следствие 2.9. При выполнении условий теоремы 3 для любого $\varepsilon > 0$, существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leqslant \varepsilon\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{s+\sigma,\alpha} + c(\varepsilon)\sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{L_2(R_+^n)}. \qquad (2.32)$$

Здесь $c > 0$ — некоторая константа не зависящая от ν, ε; константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от v.

Для доказательства достаточно воспользоваться в правой части оценки (1.9) неравенством

$$(\varepsilon\widetilde{\eta})^{j} \leqslant (\varepsilon\widetilde{\eta})^{j_2} + c$$

где $0 < j_1 \leqslant j_2$, $\widetilde{\eta} \in R^1$, $\varepsilon > 0$ — любое число, $c > 0$ — некоторая константа.

Из этого неравенства, равенства (1.3) и оценки (1.9) получаем оценку (2.32).

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся равенством

$$\Lambda^{k}\partial_t^{l_1}M_{l,q} = \Lambda^{k}(M_{l+l_1,q} - M_{l_1,q}\partial_t^{l}), \qquad (2.33)$$

где $M_{j,q}$ — коммутатор операторов $K^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ и ∂_t^{j},

$$\Lambda^{k}(p,D_x,D_{\alpha,t})v = F_{\xi\to x}^{-1}F_{\alpha}^{-1}[(|p| + |\xi| + |\eta|)^{k}F_{\alpha}F_{x\to\xi}[v(x,t)]]. \qquad (2.34)$$

Отсюда и из теоремы 1 получим

$$\left\|\Lambda^{k}\partial_t^{l_1}M_{l,q}v\right\|_{L_2(R_+^n)} \leqslant \|M_{l+l_1,q}v\|_{k,\alpha} + \left\|M_{l_1,q}\partial_t^{l}v\right\|_{k,\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{k+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{k+q,\alpha}) + c_2(\sum_{j=0}^{l_1}\left\|\partial_t^{l+j}v\right\|_{k+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j}v\right\|_{k+q,\alpha}) \leqslant$$

$$\leqslant c_3(\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{k+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^{j}v\right\|_{k+q,\alpha} + \sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j}v\right\|_{k+q,\alpha}).$$

Возьмем $k = s - ql_1$, получим

$$\left\|\Lambda^{s-ql_1}\partial_t^{l_1}M_{l,q}v\right\|_{L_2(R_+^n)} \leqslant c(\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s-ql_1+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} + \sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v\right\|_{s-ql_1+q,\alpha}).$$

Просуммируем последние неравенства по l_1 от 0 до $\left[\frac{s}{q}\right]$, получим

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\Lambda^{s-ql_1}\partial_t^{l_1}M_{l,q}v\right\|_{L_2(R_+^n)} \leqslant$$

$$\leqslant c(\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s-ql_1+q-1,\alpha} + \sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} + \sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v\right\|_{s-ql_1+q,\alpha}). \quad (2.35)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (2.35).

Заметим, что для первого слагаемого $s-ql_1+q-1+qj \leqslant s-ql_1+q-1+q(l+l_1) = s+ql+q-1$. Отсюда и из определения нормы в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, получим

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s-ql_1+q-1,\alpha} \leqslant c_1\left\|v\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}. \quad (2.36)$$

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} \leqslant c_2\left\|v\right\|_{s+ql,\alpha,q}.$$

Заметив, что $s + ql \leqslant s + ql + q - 1$, получим, что

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} \leqslant c_2\left\|v\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}. \quad (2.37)$$

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} \leqslant c_4\left\|v\right\|_{s+ql,\alpha,q} \leqslant c_4\left\|v\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}. \quad (2.38)$$

Применяя неравенства (2.36)-(2.38) в правой части неравенства (2.35), получим

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\Lambda^{s-ql_1}\partial_t^{l_1}M_{l,q}v\right\|_{L_2(R_+^n)} \leqslant c\left\|v\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}.$$

Учитывая определение нормы в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, получим из последнего неравенства оценку

$$\left\|M_{l,q}v\right\|_{s,\alpha,q} \leqslant c\left\|v\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}.$$

Что и доказывает теорему 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

3. Михлин, С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун–та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

4. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

5. Смирнов, М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.

6. Олейник, О. А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник, Е. В. Радкевич // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. — М., 1971. — Вып. Математический анализ. — С. 5–93.

7. Кондратьев, В. А. Об асимптотических свойствах решений нелинейного уравнения теплопроводности / В. А. Кондратьев // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 2. — С. 246–255.

8. Кондратьев, В. А. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка / В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Математический сб. — 1988. — Т. 135 (177), № 3. — С. 346–360.

9. Олейник, О. А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник // Математический сб. — 1966. — Т. 69 (111), вып. 1. — С. 111–140.

10. Кон, Д. Некоэрцитивные краевые задачи / Д. Кон, Л. Ниренберг // Пседодифференциальные операторы : сб. науч. тр. — М., 1967. — С. 88–165.

11. Глушко, В. П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В. П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, вып. 3. — С. 87–88.

12. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

13. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — № 2. — С. 49–68.

14. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

15. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

16. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Докл. Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

17. Баев, А. Д. О композиции и ограниченности одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 59–70.

18. Баев, А. Д. Теоремы о “следах” для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

19. Баев, А. Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Доклады академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 7–10.

20. Баев, А. Д. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады академии наук. —

2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

21. Баев, А. Д. Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 461, № 1. — С. 7–9.

22. Баев, А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. Математика. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

23. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных уравнениях с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. On certain cases of degeneracy of equations of elliptic type on the boundary of a domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravnenij e'llipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Oleinik O.A. On equations of elliptic type that degenerate on the boundary of a domain. [Olejnik O.A. Ob uravneniyax e'llipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

3. Mikhlin S.G. Degenerating elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya]. *Vestn. Leningradskogo gos. un–ta — Vestn. Leningrad State University*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

4. Vishik M.I. Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain. [Vishik M.I. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1954, vol. 35 (77), iss. 33, pp. 513–568.

5. Smirnov M.M. Degenerate elliptic and hyperbolic equations. [Smirnov M.M. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie i giperbolicheskie uravneniya]. Moscow: Science, 1966, 292 p.

6. Oleinik O.A., Radkevich E.V. Second order equations with nonnegative characteristic form. [Olejnik O.A., Radkevich E.V. Uravneniya vtorogo poryadka s neotricatel'noj xarakteristicheskoj formoj]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Vyp. Matematicheskij analiz — The results of science and technolog, VINITI. M., 1971. Issue. Mathematical analysis, pp. 5–93.*

7. Kondrat'ev V.A. Asymptotic properties of solutions of the nonlinear heat equation. [Kondrat'ev V.A. Ob asimptoticheskix svojstvax reshenij nelinejnogo uravneniya teploprovodnosti]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 2, pp. 246–255.

8. Kondrat'ev V.A., Landis E.M. On the qualitative properties of solutions of a second-order nonlinear equation. [Kondrat'ev V.A., Landis E.M. O kachestvennyx svojstvax reshenij odnogo nelinejnogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1988, vol. 135 (177), no. 3, pp. 346–360.

9. Oleinik O.A. On linear second-order equations with a nonnegative characteristic form. [Olejnik O.A. O linejnyx uravneniyax vtorogo poryadka s neotricatel'noj xarakteristicheskoj formoj]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1966, vol. 69 (111), iss. 1, pp. 111–140.

10. Kon D., Nirenberg L. Non-assertive boundary-value problems. [Kon D., Nirenberg L. Nekoe'rcitivnye kraevye zadachi]. *Psedodifferencial'nye operatory : sb. nauch. tr. — Pseudodifferential operators: Sat. Sci. Tr*, Moscow, 1967, pp. 88–165.

11. Glushko V.P. Coercivity in general boundary value problems for a degenerate second-order elliptic equation. [Glushko V.P. Koe'rcitivnost' v L_2 obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Funkcional'nyj analiz i ego*

prilozheniya — Functional analysis and its applications, 1968, vol. 2, iss. 3, pp. 87–88.

12. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

13. Glushko V.P. Solvability theorems for boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi : tr. seminara akad. S. L. Soboleva — Partial differential equations, Trudy Mat. Workshop acad. S. L. Sobolev*, Novosibirsk, 1978, no. 2, pp. 49–68.

14. Baev A.D. Degenerating elliptic equations of high order and pseudodifferential operators associated with them. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

15. Baev A.D. On general boundary-value problems in a half-space for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

16. Baev A.D., Kobylinsky P.A. On some properties of a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Kobylinskij P.A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2015, vol. 460, no. 2, pp. 133–135.

17. Baev A.D., Rabotinskaya N.I. On the composition and the boundedness of a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O kompozicii i ogranichennosti odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 59–70.

18. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Davidova M.B. Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy. [Baev A.D., Kovalevskij R.A., Davydova M.B. Teoremy o "sledax" dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 63–75.

19. Baev A.D., Kovalevsky R.A. On a class of pseudodifferential operators with degeneracy. [Baev A.D., Kovalevskij R.A. Ob odnom klasse psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 7–10.

20. Baev A.D., Buneev S.S. On a class of boundary-value problems in a strip for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D., Buneev S.S. Ob odnom klasse kraevyx zadach v polose dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 448, no. 1, pp. 7–8.

21. Baev A.D., Kovalevsky R.A. Boundary value problems for a class of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Kovalevskij R.A. Kraevye zadachi dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravnenij]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2015, vol. 461, no. 1, pp. 7–9.

22. Baev A.D., Kobylinsky P.A. On some boundary-value problems for pseudodifferential equations with degeneracy. [Baev A.D., Kobylinskij P.A. O nekotoryx kraevyx zadachax dlya psevdodifferencial'nyx uravnenij s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 466, no. 4, pp. 385–388.

23. Baev A.D.,Kovalevsky R.A., Kobylinsky P.A. On degenerate elliptic equations of high order and pseudodifferential equations with degeneracy. [Baev A.D., Kovalevskij R.A., Kobylinskij P.A.

O vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravneniyax vysokogo poryadka i psevdodifferencial'nyx uravneniyax s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 471, no. 4, pp. 387–390.

Ковалевский Ростислав Александрович, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Kovalevsky Rostislav A., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru