УДК 517.958

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ К РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ*

Н. И. Головко, Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.03.2016 г.

Аннотация. В работе изучается возможность применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели, которая возникает при описании малых свободных колебаний системы, состоящей из стержня и прикрепленной к нему растянутой струны, при этом система помещена во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решений. Для обхода возникающих трудностей мы используем поточечный подход Ю. В. Покорного к трактовке уравнения, связанный с привлечением производных по мере. Найдены достаточные условия сходимости полученных рядов.

Ключевые слова: метод Фурье; производная по мере; стержень; струна; свободные колебания.

ABOUT POSSIBILITY OF APPLICATION OF FOURIER METHOD TO VARIABLE MATHEMATICAL MODEL

N. I. Golovko, F. V. Golovanova, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov

Abstract. In this paper we study the possibility of the Fourier method applying to a mathematical model with equations of different orders, which arises when we describe small free oscillations of the system consisting of the rod and the stretched string, which is attached to the rod. We suppose that the system is placed into environment with localized singularities which lead to the loss of smoothness for solutions. To bypass the difficulties, we use a pointwise approach of Yu. V. Pokornii for the interpretation of the equation with the help of derivatives in measures. The sufficient conditions of convergence for considered series are obtained.

Keywords: Fourier method; Derivative in measure; Rod; String; Free oscillations.

В последнее время пристальное внимание уделяется построению и изучению математических моделей колебательных процессов струнных, стержневых и струнно-стержневых систем. Это вызвано их актуальностью во многих отраслях естествознания и техники. В то же время, наличие особенностей (как внутренних, так и внешних) у таких систем приводит к потере свойства гладкости решения соответствующих им математических моделей. Этот факт исключает возможность использования классических производных. Применение теории обобщенных функций к таким моделям не дает должного эффекта, так как возникает ряд трудноразрешимых проблем. Во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную; во-вторых, удается доказать только слабую разрешимость возникающих граничных задач, что не достаточно для приложений. В данной работе к изучаемому объекту мы применим поточечный подход, берущий начало в работе Стилтьеса о колебании нити

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

© Головко Н. И., Голованева Ф. В., Зверева М. Б., Шабров С. А., 2017

с бусинами и получивший дальнейшее развитие в работах М. Г. Крейна, Ф. Р. Гантмахера, О. Келлога. Данный подход был расширен Ю. В. Покорным и его учениками при изучении одномерных объектов [1]–[8]. Последнее позволило исследовать задачи о деформациях струны, стержня, помещенных во внешнюю среду с локализованными особенностями, наличие которых приводят к потере гладкости у решения.

В работе изучается возможность применения метода Фурье к математической модели, которая описывает малые свободные поперечные колебания системы, состоящей из стержня, один конец которого защемлен, а ко второму прикреплена натянутая струна, другой конец которой закреплен. Математическая модель этой системы имеет вид

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu''_{xx})'_x + (ru')'_\sigma - uQ'_\sigma, \\ u(0,t) = u'_x(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(x,t)$ — отклонение системы от положения равновесия в точке x в момент времени t.

Коэффициент $p(x)$ в (1) характеризует материал, из которого изготовлен стержень. Он положителен на полуинтервале $[0,\xi)$, где ξ — точка соединения стержня и струны. На $[\xi;l]$ продолжим его нулем. Полученную функцию мы по прежнему будем обозначать $p(x)$.

Функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x. Как и функцию $p(x)$, продолжим $r(x)$ на $[0,\xi)$ нулем, обозначив продолженную функцию через $r(x)$. Функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды, а $M(x)$ — массу участка $[0,x)$, σ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это все точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0,l]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0,l]$ функция, $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$ и $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$.

Функции $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ — начальное отклонение и начальная скорость системы соответственно.

Под решением (1) мы будем понимать всякую функцию $u(x,t)$, которая превращает уравнение в (1) в тождество, верное почти всюду относительно меры σ, и удовлетворяет начальным и граничным условиям.

Решение задачи (1) ищется в классе абсолютно непрерывных по совокупности переменных функций $u(x,t)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$ и σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,l]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0,\xi]$, имеет конечное изменение на $[0,\xi-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0,\xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$.

Следует отметить, что дифференциальное уравнение в модели (1) задано поточечно в соответствии с концепцией Ю. В. Покорного, то есть как локальное уравнение связи в точке. Это позволяет, в отличие от теории обобщенных функций, говорить о сильном решении изучаемой математической модели.

Применение классической схемы разделения переменных, то есть поиск решения в виде произведения, приводит нас к спектральной задаче:

$$\begin{cases} LX \equiv (-pX''_{xx})''_{x\sigma} + (rX'_x)'_\sigma - Q'_\sigma X(x) = -\lambda X(x)M'_\sigma(x), \\ X(0) = X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, что каждое собственное значение последней задачи положительно и имеет алгебраическую кратность, равную единице (обоснования можно привести аналогично рассуждениями работы [7]).

Как следует из работы [6], спектральная задача (2) эквивалентна интегральному уравнению:

$$X(x) = \lambda \int\limits_0^l K(x,s)X(s)M'_\sigma(s)\,d\sigma, \tag{3}$$

где $K(x;s)$ — функция влияния граничной задачи $LX = F'_\sigma, X(0) = X'(0) = X(l) = 0$. А поскольку $K(x,s)$, очевидно, является невырожденным ядром, и интегральный оператор $(Au)(x) = \int\limits_0^l K(x,s)u(s)M'_\sigma(s)\,d\sigma$ компактно действует из $C[0;l]$ (пространство непрерывных на $[0;l]$ функций) в $C[0;l]$, то спектр состоит из счетного числа собственных значений.

Напомним, что под решением граничной задачи $LX = F'_\sigma, X(0) = X'(0) = X(l) = 0$ мы будем понимать функцию, которая удовлетворяет граничным условиям $X(0) = X'(0) = X(l) = 0$, и после подстановки которого в уравнение $LX = F'_\sigma$, получаем тождество почти всюду по мере σ.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — собственные значения спектральной задачи (2). Причем, если геометрическая кратность не равна единице, то собственное значение будет встречаться столько раз, какова его кратность. Здесь мы не будем останавливаться на этом вопросе более подробно, чтобы не затенять сути дела.

Обозначим через $\varphi_n(x)$ собственную функцию, отвечающую собственному значению λ_n; более того, мы можем считать её нормированной: $\int\limits_0^l \varphi_n^2(x)M'_\sigma(s)\,d\sigma = 1$. В противном случае разделим $\varphi_n(x)$ на $\sqrt{\int\limits_0^l \varphi_n^2(x)M'_\sigma(s)\,d\sigma}$. Применяя адаптированную классическую схему для нашего случая, легко убеждаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty c_k^2\lambda_k$, где $c_k = \int\limits_0^l f(x)\varphi_n(x)M'_\sigma(x)\,d\sigma$, сходится. Отсюда следует, что ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n\varphi_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно на $[0;l]$.

Заметим, что $\varphi_k(x)$ ортогональны с весом $M'_\sigma(x)$ (при этом интегрирование осуществляется по мере σ), и для всех N справедливо неравенство

$$\int\limits_0^l M'_\sigma(x)f^2(x)d\sigma \geqslant \sum_{k=1}^N c_k^2,$$

из которого следует аналог неравенства Бесселя

$$\int\limits_0^l M'_\sigma(x)f^2(x)d\sigma \geqslant \sum_{k=1}^\infty c_k^2. \tag{4}$$

Так как каждое собственное значение имеет алгебраическую кратность 1 (см., например, [7]), то неравенство (4) превращается в равенство, т. е. система собственных функций полна.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится лемма.

Лемма 1. *Пусть $\varphi_k(x)$ — амплитудная функция, нормированная $\left(\int\limits_0^l \varphi_k^2\,dM = 1\right)$ и отвечающая собственной частоте λ_k. Тогда найдется такая постоянная C^*, что для всех k и*

x справедлива оценка

$$\max\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant l}|{\varphi_k}'_x(x)|, \max_{0\leqslant x\leqslant \xi}|{\varphi_k}''_{xx}(x)|, \sup_{0\leqslant x<\xi}|p({\varphi_k}''_{xx})'_x|\right\}\leqslant C^*\lambda_k. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $\varphi_k(x)$ — амплитудная функция, то, как отмечалось равнее, справедливо тождество

$$\varphi_k(x)\equiv\lambda_k\int\limits_0^l K(x,s)\varphi_k(s)dM(s), \tag{6}$$

где $K(x,s)$ — функция влияния граничной задачи $LX=F'_\sigma, X(0)=0, X'(0)=0, X(l)=0$, $F(x)$ — произвольная σ-абсолютно непрерывная на $[0,l]$ функция и из (6) находим

$$|\varphi'_k(x)|=\lambda_k\Big|\int\limits_0^l K'_x(x,s)\varphi'_k(s)\,dM(s)\Big|\leqslant\sup_{x,s}|K'_x(x,s)|\cdot C_1^*\cdot\lambda_k(M(l)-M(0)).$$

Выражения $|{\varphi_k}''_{xx}|$ и $|(p{\varphi_k}''_{xx})'_x|$ оцениваются аналогично. □

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) *функции* $p(x),r(x),Q(x)$ *и* $M(x)$ — *σ-абсолютно непрерывны;* 2) $M'_\sigma\geqslant m_0>0$*;* 3) $\psi_i(x)$ *(*$i=1,2$*) — абсолютно непрерывны на* $[0,l]$*, производные* $\psi'_i(x)$ *имеют конечное на* $[0,l]$ *изменение и* $\psi'_i(x)$ *— абсолютно непрерывны на* $[0,\xi]$*,* $\psi''_i(x)$ *также абсолютно непрерывны на* $[0,\xi]$*;* 4) *квазипроизводная* $(p\psi''_i)'_x(x)$ *— σ-абсолютно непрерывна на* $[0,\xi]$*,* $(r\psi_i)'$ *— σ-абсолютно непрерывна на* $[\xi,l]$*;* 5) *функции* $\dfrac{(L\psi_0)(x)}{M'_\sigma(x)}$ *и* $\dfrac{(L\psi_1)(x)}{M'_\sigma(x)}$ *непрерывны на* $[0,l]$*;* 6) *функция* $\dfrac{(L\psi_0)(x)}{M'_\sigma(x)}$ *и ее производная абсолютно непрерывны на* $[0;l]$*;* 7) $\psi_0(0)=\psi'_0(0)=\psi(l)=(L\psi_0)(0)=(L\psi'_0)(0)=(L\psi_0)(l)=\psi_1(0)==\psi'_1(0)=\psi_1(l)=0$*. Тогда функция*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+\frac{B_k}{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t\right), \tag{7}$$

где $\varphi_k(x)$ — нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k,

$$A_k=\int\limits_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)\,d\sigma,\quad B_k=\int\limits_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)\,d\sigma,$$

является решением математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu''_{xx})'_x+(ru')'_\sigma-uQ'_\sigma,\\ u(0,t)=u'_x(0,t)=u(l,t)=0,\\ u(x,0)=\psi_0(x);\\ u'_t(x,0)=\psi_1(x),\end{cases}$$

причем ряд (7) *можно дифференцировать по t дважды и на $[0;\xi]$ четырежды (сначала трижды по x, потом по σ); на $[\xi;l]$ дважды (по x и по σ). Полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $[0;l]\times[0;T]$.*

Доказательство. Оценим коэффициенты ряда Фурье функции $\psi_0(x)$. Имеем

$$A_k=\int\limits_0^l\psi_0(x)M'_\sigma(x)\varphi_k(x)d\sigma=\int\limits_0^l\psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}\left((p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma}-(r{\varphi_k}'_x)'_\sigma+Q'_\sigma\varphi_k\right)d\sigma=$$

$$= \int\limits_0^l \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}(p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma}d\sigma - \int\limits_0^l \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}(r{\varphi_k}'_x)'_\sigma d\sigma + \int\limits_0^l \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}(p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma}Q'_\sigma\varphi_k d\sigma.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям четырежды, второй — дважды, а также воспользуемся свойствами функции $\varphi_k(x)$. Получим:

$$A_k = \frac{1}{\lambda_k}\left[\psi_0(p{\varphi_k}''_{xx})'_x\Big|_0^l - \psi_0 p{\varphi_k}''_{xx}\Big|_0^l + {\varphi_k}'_x p\varphi''_{0xx}\Big|_0^l - \varphi_k(p{\varphi_0}''_{xx})'_x\Big|_0^l + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^l \varphi_k(x)(p{\psi_0}''_{xx})''_{x\sigma}d\sigma - r{\varphi_k}'_x\psi_0\Big|_0^l + r{\psi_0}'_x\varphi_k\Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi_k(x)(r{\psi_0}'_x)'_\sigma d\sigma - \int\limits_0^l \varphi_k(x)Q'_\sigma(x)\psi_0(x)d\sigma)\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \varphi_k(x)L\psi_0 d\sigma = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \varphi_k(x)M'_\sigma(x)\left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma}\right)(x)d\sigma.$$

Последнее равенство означает, что числа $\lambda_k A_k$ есть коэффициенты ряда Фурье функции $\left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma}\right)(x)$, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^3 A_k^2|$ сходится.

Аналогично мы получим, что $\lambda_k B_k$ являются коэффициентами ряда Фурье непрерывной на $[0,l]$ функции $\left(L\psi_1 M'_\sigma\right)(x)$. Получаем неравенство, вытекающее из аналога неравенства Бесселя (4):

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2 \leqslant \int\limits_0^l M'_\sigma(x)\left(\frac{L\psi_1(x)}{M'_\sigma(x)}\right)d\sigma,$$

из которого следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2$ сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием (7), имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty}{\varphi_k}'_x(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}p{\varphi_k}''_{xx}(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(p{\varphi_k}''_{xx})'_x\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\right),$$

при $x \leqslant \xi$;

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial\sigma}\left(p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma}\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left((r{\varphi_k}'_x)'_\sigma - \varphi_k Q'_\sigma + \lambda_k M'_\sigma\varphi_k\right)$$

при $x \leqslant \xi$;

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(r\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(r{\varphi_k}'_x)'_\sigma\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(Q'_\sigma(x)\varphi_k(x) - \lambda_k M'_\sigma \varphi_k(x)\right) \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \cos\sqrt{\lambda_k}t\right)$$

при $x \geqslant \xi$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k\sqrt{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k}t + B_k \cos\sqrt{\lambda_k}t\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k\lambda_k \cos\sqrt{\lambda_k}t - B_k\sqrt{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k}t\right),$$

каждый из которых оценивается числовым рядом $K\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|A_k| + \sqrt{\lambda_k}|B_k|)$, где K — постоянная. Остается показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|A_k| + \sqrt{\lambda_k}|B_k|)$$

сходится. В работе [7] была показана сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_k^{2/3+\delta}}$ для любого $\delta > 0$, значит, и при $\delta = 1/3$. Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для любых натуральных $n \geqslant N$ и m выполнено неравенство $\sum\limits_{k=n}^{n+m}\dfrac{1}{\lambda_k} < \varepsilon$. Для этих n и m последовательно находим (применяя неравенство Коши)

$$\sum_{k=n}^{n+m}(\lambda_k|A_k| + \sqrt{\lambda_k}|B_k|) = \sum_{k=n}^{n+m}|A_k|\lambda_k^{3/2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} + \sum_{k=n}^{n+m}|B_k|\lambda_k\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}A_k^2\lambda_k^3}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{\lambda_k}} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}B_k^2\lambda_k^2}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{\lambda_k}} < (\sqrt{\widehat{A}} + \sqrt{\widehat{B}})\sqrt{\varepsilon},$$

где через $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ обозначены соответственно суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3 A_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|A_k| + \sqrt{\lambda_k}|B_k|)$ сходится по признаку Коши. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 262–265.

3. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

4. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

5. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями : качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен : Lap Lambert Academic Publishing, 2012. — 112 с.

6. Иванникова, Т. А. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интергралом Стильтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Вып. 2, Ч. 1. — С. 3–8.

7. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

8. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Derivatives in a Generalized Sturm-Liouville Problem. [Pokornyj Yu.V. O differencialax Stilt'esa v obobshhennoj zadache Shturma-Liuvillya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2002, vol. 383, no. 5, pp. 262–265.

3. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Problem for Impulsive Problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

4. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

5. Zvereva M.B. Differential Equations with Discontinuous Solutions: Qualitative Theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

6. Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. On the necessary content of the minimum of a quadratic functional With intergral It is used in the case of production on a part of the interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s intergralom Stil't'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, iss. 2, part 1, pp. 3–8.

7. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennyx znachenij odnoj raznoporyadkovoj spektral'noj zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 186–195.

8. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

Головко Надежда Игоревна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: golovko_ nadezhda46@mail.ru

Golovko Nadezhda Igorevna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: golovko_ nadezhda46@mail.ru

Голованёва Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, г. Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, Russi
E-mail: gfainav@mail.ru

Зверева Маргарита Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: (473)220–86–90

Zvereva Margarira Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: (473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_ s_ a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_ s_ a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90