УДК 517.988.6

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕРАВЕНСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

Б. Д. Гельман

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.01.2016 г.

Аннотация. Для изучения в банаховых пространствах неравенств вида $A(x) \geqslant f(x)$, где A замкнутый линейный сюръективный оператор, а f липшицево однозначное отображение, применяется локальная теорема о точке совпадения α-накрывающего и липшицева многозначных отображений. Доказанная в статье теорема применяется для получения новых теорем о разрешимости неравенств в конечномерном пространстве и дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: замкнутый сюръективный оператор, многозначное липшицево отображение, точка совпадения, конус, полуупорядоченное пространство.

ON THE LOCAL SOLVABILITY OF THE INEQUALITIES IN BANACH SPACES

B. D. Gelman

Abstract. To study in Banach spaces inequalities of the form $A(x) \geqslant f(x)$, where A is a closed linear surjective operator and f is a Lipschitz mapping, use local theorem existence of coincidence points α-covering a multivalued mapping and Lipschitz a multivalued mapping. The above theorem is used to obtain new theorems on the solvability of inequalities in a finite-dimensional space and differential inequalities.

Keywords: closed surjective operator, multivalued Lipschitz mapping, the point of coincidence, a cone, partially ordered spaces.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $K \subset E_2$ – выпуклый замкнутый конус, полуупорядоченность в E_2 с помощью конуса K вводится следующим образом:

$$y_1 \leqslant y_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 - y_1 \in K.$$

Подробнее о полуупорядоченных пространствах смотри, например, [1], [7].

Неравенства естественно возникакают в различных задачах математической экономики и других разделах современной математики. Некоторые результаты о существовании решений неравенств в банаховых пространствах были получены в работах [1]–[4] и др.

Нами рассматривается следующая задача. Пусть $A : D(A) \subset E_1 \to A_2$ замкнутый линейный сюръективный оператор, точка $x_0 \in D(A)$, $B_R(x_0) \subset E_1$ замкнутый шар радиуса R.

* Это исследование поддержено РФФИ: грант № 14–01–00468–а

Пусть $f : B_R(x_0) \to E_2$ липшицево отображение. Нас интересует разрешимость следующего неравенства:

$$f(x) \leqslant A(x).$$

Очевидно, что $f(x_*) \leqslant A(x_*)$ тогда и только тогда, когда точка

$$A(x_*) \in f(x_*) + K = F(x_*),$$

т.е. точка x_* является точкой совпадения многозначного отображения F и оператора A.

В 2009 году в работе [5] была доказана локальная теорема существования точек совпадения двух многозначных отображений метрических пространств. В настоящей работе эта теорема применяется для изучения проблемы существования решений таких неравенств.

В заключение статьи доказанная теорема применяется для получения новых теорем о разрешимости неравенств в конечномерном пространстве и одного класса дифференциальных неравенств.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть X метрическое пространство, A и B замкнутые подмножества в X. Расстоянием между этими множествами называется

$$h(A,B) = \max\{\, \rho_*(A,B), \rho_*(B,A)\, \},$$

где $\rho_*(A,B) = \sup\limits_{u\in A} \inf\limits_{v\in B} \rho(u,v)$. Очевидно, что $h(A,B)$ может быть числом или принимать бесконечное значение. Зазором между множествами A и B будем называть число

$$dist(A,B) = \inf\{\, \rho(u,v) \,|\, u \in A, v \in B\, \}.$$

Пусть X и Y метрические пространства, метрика в которых обозначается через ρ_X и ρ_Y соответственно. Через $B_X(r,x)$ обозначим в пространстве X замкнутый шар радиуса r с центром в точке x и аналогичное обозначение введем в пространстве Y. Для произвольного подмножества $M \subset Y$ положим $B_Y(r,M) = \bigcup\limits_{y\in M} B_Y(r,y)$ – r-окрестность множества M.

Пусть $F : X \multimap Y$ многозначное отображение. Если это отображение имеет замкнутые образы, то будем это записывать так: $F : X \to C(Y)$. Многозначное отображение F называется липшицевым, если существует положительное число $\mathbf{c}$ такое, что

$$h_Y(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \mathbf{c}\, \rho_X(x_1,x_2) \ \text{ для любых } x_1, x_2 \in U.$$

Подробнее о многозначных отображениях смотри, например, [6].

Нам будут необходимыми некоторые факты из теории α-накрывающих отображений.

Определение 1. *Пусть задано число $\alpha > 0$. Многозначное отображение $\Psi : X \multimap Y$ называется α-накрывающим относительно множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$, если*

$$B_X(r,x) \subset U \ \Rightarrow\ \Psi(B_X(r,x)) \supseteq B_Y(\alpha r, \Psi(x)) \cap V,$$

где

$$\Psi(B_X(r,x)) = \bigcup_{x' \in B_X(r,x)} \Psi(x').$$

Многозначное отображение называется α-накрывающим, если оно является накрывающим относительно множеств X и Y.

Пусть отображение $\Psi : X \to Y$ является α-накрывающим.

Определение 2. *Число*

$$h = \sup\{\alpha \mid \Psi \text{ является } \alpha - \text{накрывающим}\}$$

будем называть модулем накрываемости и обозначать $h(\Psi)$.

Пусть E_1, E_2 - два банаховых пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - линейный замкнутый сюръективный оператор. Рассмотрим многозначное отображение $A^{-1} : E_2 \multimap E_1$ где

$$A^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid A(x) = y\}.$$

Число

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2,\, y \neq 0} \left(\frac{\inf\{||x|| \mid x \in E_1, A(x) = y\}}{||y||}\right)$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}. В работе [8] рассмотрены некоторые примеры вычисления нормы многозначных обратных отображений.

Пример 1. Пусть $C_{[a,b]}$ – пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a,b]$ со значениями в банаховом пространстве E. Пусть $D(A) \subset C_{[a,b]}$ – множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций, $A : D(A) \to C_{[a,b]}$, оператор дифференцирования. В этом случае $||A^{-1}|| = \frac{b-a}{2}$.

Пример 2. Пусть $L^1_{[a,b]}$ - пространство суммируемых вектор-функций, определенных на отрезке $[a,b]$ со значениями в банаховом пространстве E. Пусть $D(A) \subset C_{[a,b]}$ - множество абсолютно непрерывных вектор-функций $A : D(A) \to L^1_{[a,b]}$ оператор дифференцирования. В этом случае $||A^{-1}|| = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Если $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, то в множестве $D(A)$ можно рассмотреть норму графика $||x||_{1,2} = ||x||_1 + ||A(x)||_2$. Множество $D(A)$ снабженное нормой $||x||_{1,2}$ является банаховым пространством. Обозначим его E. Тогда определен непрерывный линейный оператор $\widetilde{A} : E \to E_2$, $\widetilde{A}(x) = A(x)$. Нетрудно видеть, что числа $||A^{-1}||$ и $||\widetilde{A}^{-1}||$ связаны следующим соотношением: $||\widetilde{A}^{-1}|| = ||A^{-1}|| + 1$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ *- замкнутый линейный сюръективный оператор, тогда для любого* $\alpha \in (0, ||A^{-1}||^{-1})$ *оператор* A *является* α*-накрывающим отображением пространства* $D(A)$ *в* E_2 *и* $h(A) = ||A^{-1}||^{-1}$.

Доказательство. Так как шар $B_{D(A)}(r,x) = x + B_{D(A)}(r,0)$, то в силу линейности оператора A имеем:

$$A(B_{D(A)}(r,x)) = A(x) + A(B_{D(A)}(r,0)).$$

Поэтому достаточно доказать утверждение только для шара с центром в нуле.

Пусть $y \in B_{E_2}(\alpha r, 0)$, где $\alpha \in (0, ||A^{-1}||^{-1})$. Тогда

$$\frac{\inf\{||x|| \mid x \in E_1, A(x) = y\}}{||y||} \leqslant ||A^{-1}||.$$

Следовательно существует точка x такая, что

$$||x|| < ||A^{-1}||\, ||y|| + \varepsilon \leqslant ||A^{-1}||\, \alpha\, r + \varepsilon$$

и $A(x) = y$. Здесь ε произвольное положительное число. Если выбрать

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{1 - \alpha\, ||A^{-1}||}\right],$$

то $||x|| \leqslant r$. Тогда в шаре $B_{D(A)}(r,0)$ существует точка x такая, что $A(x) = y$. Это доказывает, что отображение A является α-накрывающим.

Покажем теперь, что $h(A) = ||A^{-1}||^{-1}$. Рассмотрим произвольное число $\beta > ||A^{-1}||^{-1}$ и замкнутый шар $B_{E_2}(1{,}0)$. Предположим противное, т.е. что A является β-накрывающим. Тогда

$$A(B_{D(A)}(\frac{1}{\beta},0)) \supset B_{E_2}(1{,}0).$$

Из этого вытекает, что для любого $y \in E_2$ имеем:

$$\inf\{||x|| \mid x \in D(A), A(x) = y\} \leqslant \frac{1}{\beta}||y|| < ||A^{-1}||\,||y||,$$

что противоречит условию. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Заметим также, что замкнутый сюръективный линейный оператор A является α-накрывающим для $\alpha \in (0,||A^{-1}||^{-1})$ относительно множеств $U = B_{D(A)}(R,x_0)$ и $V = E_2$.

Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) метрические пространства, U подмножество в X, $F : U \multimap Y$ многозначное отображение. Пусть задана точка $x_0 \in X$, замкнутое множество $D_0 \subset \Psi(x_0)$ и $\mathbf{c}, R_1, R_2 > 0$ (здесь R_1 и R_2 могут принимать бесконечные значения). Положим $U = B_X(R_1, x_0)$ и $V = B_Y(\alpha R_2, D_0)$.

В работе [5] была доказана следующая теорема о существовании точки совпадения многозначных отображений.

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение $\Psi : X \to C(Y)$ является α-накрывающим относительно множеств U и V и имеет замкнутый график, многозначное отображение $F : U \to C(Y)$ является липшицевым с константой Липшица $\mathbf{c}$, хотя бы один из графиков $gph(\Psi)$ или $gph(F)$ является полным пространством. Если имеет место неравенство*

$$dist(D_0,F(x_0)) < (\alpha - \mathbf{c})\ \min\{R_1, R_2\},$$

тогда множество точек совпадения

$$\Xi = \{\, x \in U \mid \Psi(x) \cap F(x) \neq \varnothing \,\}$$

непусто и, более того справедлива оценка

$$dist(x_0,\Xi) \leqslant \frac{dist(\,\Psi(x_0), F(x_0) \cap B_Y(D_0, (\alpha - \mathbf{c})R_2))}{\alpha - \mathbf{c}}.$$

Из этой теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть E_1, E_2 банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ замкнутый линейный сюръективный оператор, точка $x_0 \in D(A)$, $B_R(x_0) \subset E_1$ замкнутый шар радиуса R. Пусть $F : B_R(x_0) \to C(E_2)$ липшицево многозначное отображение с константой Липшица $\mathbf{c}$. Пусть выполнены следующие условия:*
1) число $\mathbf{c}\,||A^{-1}|| < 1$;
2) $\rho\biggl(A(x_0),F(x_0)\biggr) < \biggl(||A^{-1}||^{-1} - \mathbf{c}\biggr) R$.
Тогда множество Ξ решений включения $A(x) \in F(x)$ непусто и

$$\rho(x_0, \Xi) \leqslant \frac{||A||\,\rho(A(x_0), F(x_0))}{1 - \mathbf{c}\,||A^{-1}||}. \tag{1}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим число α которое удовлетворяет следующим неравенствам:

$$||A^{-1}||^{-1} > \alpha > \mathbf{c}, \text{ и } \rho(A(x_0),F(x_0)) < \biggl(\alpha - \mathbf{c}\biggr) R. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что такое α всегда можно выбрать в силу сделанных предположений. Тогда отображение A является α-накрывающим отображением относительно множеств $U = B_R(x_0)$ и $V = Y$, и выполнены все условия теоремы 1. Применяя теперь эту теорему получим непустоту множества Ξ, причем

$$\rho(x_0, \Xi) \leqslant \frac{\rho(A(x_0), F(x_0))}{\alpha - \mathbf{c}}. \tag{3}$$

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяющую неравенствам (2) и сходящуюся к $||A^{-1}||^{-1}$. Тогда переходя к пределу в неравенстве (3), получим неравенство (1). Утверждение доказано.

2. НЕРАВЕНСТВА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть E_1 и E_2 – банаховы пространства, $K \subset E_2$ – выпуклый замкнутый конус, $A : D(A) \subset E_1 \to A_2$ замкнутый линейный сюръективный оператор, точка $x_0 \in D(A)$, $B_R(x_0) \subset E_1$ замкнутый шар радиуса R. Пусть $f : B_R(x_0) \to E_2$ липшицево отображение. Рассмотрим неравенство:

$$f(x) \leqslant A(x). \tag{4}$$

Очевидно, что $f(x_*) \leqslant A(x_*)$ тогда и только тогда, когда точка

$$A(x_*) \in f(x_*) + K = F(x_*), \tag{5}$$

т.е. точка x_* является точкой совпадения многозначного отображения F и оператора A.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) число $||A^{-1}||\, \mathbf{c} < 1$*;*

2) существует такая точка $y_0 \in K$, *что*

$$||A(x_0) - f(x_0) - y_0|| < \Big(||A^{-1}||^{-1} - \mathbf{c}\Big) R.$$

Тогда множество Ξ *решений неравенства (4) непусто и*

$$\rho(x_0,\Xi) \leqslant \frac{||A^{-1}||\, ||A(x_0) - f(x_0) - y_0||}{1 - ||A^{-1}||\, \mathbf{c}}.$$

Доказательство этой теоремы получается из следствия 1 так как многозначное отображение $F(x) = f(x) + K$ является липшицевым многозначным отображением с той же константой Липшица $\mathbf{c}$.

Конус K называется миниэдральным, если каждая пара элементов $y_1, y_2 \in E_2$ имеет supremum (точную верхнюю грань). В этом случае для любого $x \in E$ единственным образом определяются точка $x_+ = \sup\{x,0\} \in K$. Пусть $\mathfrak{P}$ отображение из E_2 в конус K такое что $\mathfrak{P}(x) = x_+$. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4. В пространстве R^n рассмотрим конус положительных векторов K. Нетрудно видеть, что этот конус является миниэдральным. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, тогда $\mathfrak{P}(x) = (a(x_1), a(x_2),...,a(x_n))$, где функция

$$a(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Пример 5. В пространстве $C_[a,b]$ рассмотрим конус положительных функций

$$K = \left\{ x \in C_[a,b] \,\middle|\, x(t) \geqslant 0 \text{ для любого } t \in [a,b] \right\}.$$

Этот конус также является миниэдральным и отображение $\mathfrak{P}$ определяется условием:

$$y(t) = \mathfrak{P}(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } x(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x(t) < 0, \end{cases}$$

Аналогично определяются отображения $\mathfrak{P}$ в пространствах $L^p_{[a,b]}$, $p \geqslant 1$.

Тогда из теоремы 3 вытекает следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть K является миниэдральным конусом и выполнены следующие условия:*
1) число $||A^{-1}||\,\mathbf{c} < 1$;
2) $||A(x_0) - f(x_0) - \mathfrak{P}\Big(A(x_0) - f(x_0)\Big)|| < \Big(||A^{-1}||^{-1} - \mathbf{c}\Big)R$.
Тогда множество Ξ решений неравенства (4) непусто и

$$\rho(x_0,\Xi) \leqslant \frac{||A^{-1}||\;||A(x_0) - f(x_0) - \mathfrak{P}\Big(A(x_0) - f(x_0)\Big)||}{1 - ||A^{-1}||\,\mathbf{c}}.$$

Рассмотрим некоторые теоремы о существовании решений у конкретных классов неравенств.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1. О неравенствах в конечномерном пространстве

Пусть $\mathbb{R}^n$ евклидово пространство, рассмотрим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2 \leqslant f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k \leqslant f_k(x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{6}$$

где $k \leqslant n$. Пусть вектор $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, пусть

$$f = (f_1, f_2, .., f_k) : B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

липшицево отображение с константой Липшица $\mathbf{c}$. В этом случае оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ определяется формулой $A(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1,x_2,...,x_k)$ и легко видеть, что $||A^{-1}|| = 1$. Пусть вектор

$$y_0 = \Big(x_1^0 - f_1(x_0), x_2^0 - f_2(x_0), ..., x_k^0 - f_k(x_0)\Big).$$

Тогда вектор (см. пример 4)

$$z_0 = y_0 - \mathfrak{P}(y_0) == \Big(b(x_1^0 - f_1(x_0)), b(x_2^0 - f_2(x_0)),...,b(x_k^0 - f_k(x_0))\Big),$$

где функция

$$b(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Применяя теперь следствие 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) число $\mathbf{c} < 1$;

2) $||z_0|| < (1-\mathbf{c})\,R.$
Тогда множество Ξ *решений системы неравенств (6) непусто и*

$$\rho(x_0,\Xi) \leqslant \frac{||z_0||}{1-\mathbf{c}}.$$

3.2. Об одном классе дифференциальных неравенств

Пусть x_0 произвольная точка из пространства $\mathbb{R}^n$, $T(R,x_0) \subset \mathbb{R}^n$ замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0. Пусть $g : [a,b] \times T(R,x_0) \to \mathbb{R}^n$ непрерывное отображение, липшицево по второму аргументу, т.е. существует такое число $\mathbf{c} > 0$ что для любого $t \in [a,b]$ и любых $x_1, x_2 \in T(R,x_0)$ справедливо неравенство: $||g(t,x_1) - g(t,x_2)|| \leqslant \mathbf{c}\,||x_1 - x_2||$.

Нас будет интересовать следующая задача: *при каких условиях существует такая непрерывно дифференцируемая функция* x*, что*

$$x'(t) \geqslant g(t,x(t)) \ \ \textit{для любого}\, t \in [a,b]. \qquad (7)$$

Введем такие обозначения: функция $y_0 \in C_{[a,b]}$ определена условием $y_0(t) = -g(t,x_0)$, а функция

$$z_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ y_0(t) \geqslant 0, \\ y_0(t), & \text{если } \ y_0(t) < 0, \end{cases}$$

Пусть $\bar{x}_0 \in C_{[a,b]}$ такая постоянная функция, что $\bar{x}_0(t) = x_0$ для любого $t \in [a,b]$.

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*
1) $(b-a)\mathbf{c} < 2$*;*
2) $||z_0|| \leqslant \left(2 - (b-a)\mathbf{c}\right) R\,(b-a)^{-1}.$
Тогда множество $\Xi \subset C_{[a,b]}$ *решений неравенства (7) непусто и*

$$\rho(\bar{x}_0,\Xi) \leqslant \frac{(b-a)\,||z_0||}{2-\mathbf{c}\,(b-a)}.$$

Доказательство. Переформулируем неравенство (7) в виде неравенства (5). Пусть $C_{[a,b]}$ пространство непрерывных функций определенных на отрезке $[a,b]$ со значениями в R^n, множество $D(A) \subset C_{[a,b]}$ это множество непрерывно дифференцируемых функций, $A : D(A) \subset C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ оператор дифференцирования (см. пример 1).

Пусть $B(R,\bar{x}_0) \subset C_{[a,b]}$ замкнутый шар радиуса R с центром в точке $\bar{x}_0$. Рассмотрим отображение $f : B(R,\bar{x}_0) \to C_{[a,b]}$, заданное условием $f(x)(t) = g(t,x(t)$ (т.е. f оператор суперпозиции). Тогда неравенство (7) можно переписать в виде $A(x) \geqslant f(x)$. Так как $A(\bar{x}_0) = 0$ и $||A^{-1}|| = \frac{b-a}{2}$, то применяя следствие 1 получим теорему 4.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что аналогичную теорему можно получить для неравенств вида

$$x'(t) \geqslant g(t,x(t)) \ \ \text{для почти всех}\, t \in [a,b].$$

В этом случае надо использовать результат из примера 2.

Замечание 2. Пример 3 показывает, что переход к непрерывному оператору A (путем введения нормы графика на $D(A)$) вряд ли является оправданным, т.к. это ухудшает требуемые оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматлит, 1962. — 394 с.

2. Обен, Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. — Москва : Мир, 1988. — 512 с.

3. Опойцев, В. И. Нелинейная системостатика / В. И. Опойцев. — М. : Наука, 1986. — 246 с.

4. Гельман, А. Б. Неподвижные точки h-вполне непрерывных многозначных отображений и неравенства в пространствах с конусом / А. Б. Гельман // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2009. — № 4. — С. 5–13.

5. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points / A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man et. al. // J. Fixed Point Theory and its Applications. — 2009. — V. 5, № 1. — P. 105–127.

6. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : Либроком (УРСС), 2011. — 226 с.

7. Вулих, Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств / Б. З. Вулих. — М. : Физматлит, 1961. — 407 с.

8. Гельман, Б. Д. Многозначные сжимающие отображения и их приложения / Б. Д. Гельман // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 74–86.

REFERENCES

1. Krasnosel'skii M. A. Positive solutions of operator equations. [Krasnosel'skij M.A. Polozhitel'nye resheniya operatornyx uravnenij]. Moscow, 1962, 394 p.

2. Aubin J.-P., Ekland I., Applied nonlinear analysis. [Oben Zh.-P., E'kland I. Prikladnoj nelinejnyj analiz]. Moscow: Mir, 1988, 512 p.

3. Opoitsev V. I. Nonlinear sistemistica. [Opojcev V.I. Nelinejnaya sistemostatika]. Moscow: Nauka, 1986, 246 p.

4. Gelman A.B. Fixed points of h is a completely continuous multivalued mappings and inequalities in spaces with a cone. [Gel'man A.B. Nepodvizhnye tochki h-vpolne nepreryvnyx mnogoznachnyx otobrazhenij i neravenstva v prostranstvax s konusom]. *Vestnik RUDN. Series: Mathematics. Informatics. Physics — Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika*, 2009, no. 4, pp. 5–13.

5. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. J. Fixed Point Theory and its Applications, 2009, vol. 5, no. 1, pp. 105–127.

6. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhov V.V. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij i differencial'nyx vklyuchenij]. Moscow, 2011, 226 p.

7. Vulikh B.Z. Introduction to the theory of partially ordered spaces. [Vulix B.Z. Vvedenie v teoriyu poluuporyadochennyx prostranstv]. Moscow, 1961, 407 p.

8. Gelman B.D. Multivalued contractive mappings and their applications. [Gel'man B.D. Mnogoznachnye szhimayushhie otobrazheniya i ix prilozheniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 1, pp. 74–86.

Гельман Борис Данилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и геометрии Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: gelman@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)223–56–92

Gel'man Boris Danilovich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theory of Functions and Geometry Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: gelman@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)223–56–92