УДК 517.929

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

М. А. Брызгалова[1,2], **В. В. Обуховский**[1,3]

[1] — *Воронежский государственный педагогический университет,*
[2] — *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"*
[3] — *Российский Университет Дружбы Народов*

Поступила в редакцию 04.03.2016 г.

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются задача управляемости для системы, описываемой вырожденным функционально-дифференциальным включением в сепарабельном банаховом пространстве с импульсным эффектом и бесконечным запаздыванием. Предполагается, что многозначная нелинейность, входящая в систему, удовлетворяет условию регулярности, выраженному в терминах хаусдорфовой меры некомпактности. Для рассматриваемой системы строится разрешающий многозначный оператор, неподвижные точки которого образуют решение задачи управляемости. Приведены конкретные признаки управляемости.

Ключевые слова: управляемость, импульсный эффект, бесконечное запаздывание, мера некомпактности, уплотняющий оператор, неподвижная точка, функционально-дифференциальное включение.

ON CONTROLLABILITY PROBLEM FOR DEGENERATE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS IN A BANACH SPACE

M. A. Bryzgalova, V. V. Obukhovskii

Abstract. In the present paper we consider the controllability problem for a system governed by a degenerate functional differential inclusion in a separable Banach space in the presence of the impulse effect and with the infinite delay. It is supposed that the multivalued nonlinearity of the system satisfies the regularity condition, expressed in terms of the Hausdorff measure of noncompactness. For the considered system, we construct the resolving multivalued operator whose fixed points form a solution of the controllability problem. Some particular conditions of controllability are presented.

Keywords: controllability, impulse effect, infinite delay, measure of noncompactness, condensing operator, fixed point, functional differential inclusion.

* Работа поддержана грантом РФФИ 14–01–00468. Результаты четвертого и пятого параграфов получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14–21–00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача управляемости является одной из основных в математической теории нелинейных управляемых систем. Она заключается в возможности достижения любой точки фазового пространства из произвольного начального состояния системы. Этой задаче посвящены многие работы (см., например, [1], [2], [3] и имеющуюся там библиографию). В настоящей статье, развивая методы работ [2], [3], мы рассматриваем задачу управляемости для системы, описываемой вырожденным функционально-дифференциальным включением в сепарабельном банаховом пространстве с импульсным эффектом и бесконечным запаздыванием.

Статья имеет следующую структуру. Во втором разделе приводятся необходимые предварительные сведения. В разделе 3 описывается постановка задачи и вводятся основные предположения. В разделе 4 строится разрешающий оператор, неподвижные точки которого образуют решения задачи и изучаются некоторые его свойства. В разделе 5 приводятся некоторые конкретные признаки управляемости.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 Многозначные отображения и меры некомпактности

Напомним некоторые понятия (подробности могут быть найдены в монографиях [4], [5]).

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство; $X \subseteq \mathcal{E}$ — замкнутое подмножество; $Kv(\mathcal{E})$ обозначает совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathcal{E}$.

Многозначное отображение (мультиотображение) $F : X \multimap \mathcal{E}$ называется:

- полунепрерывным сверху (п.н.с.), если $F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ - открытое подмножество X для любого открытого $V \subset \mathcal{E}$;
- замкнутым, если его график $G_F = \{(x,y) \in X \times \mathcal{E} : y \in F(x)\}$ -замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$.

Отображение β, заданное на совокупности всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$ со значениями в некотором частично упорядоченном множестве $(\mathcal{A}, \geqslant)$ называется мерой некомпактности (МНК) в $\mathcal{E}$, если $\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega)$ для любого непустого $\Omega \subset \mathcal{E}$, где $\overline{co}$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества. МНК β называется:

- монотонной, если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ влечет $\beta(\Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_2)$;
- несингулярной, если $\beta(\{c\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для любых $c \in \mathcal{E}$, $\Omega \subset \mathcal{E}$.

Мультиотображение $F : X \multimap \mathcal{E}$ называется уплотняющим относительно МНК β (или β-уплотняющим), если $\beta(F(\Omega)) \geqslant \beta(\Omega)$ влечет относительную компактность множества $\Omega \subset X$.

Мы будем использовать в дальнейшем следующие принципы неподвижной точки. Пусть β - монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$.

Теорема 2.1 (см. [5], следствие 3.3.1) Пусть Z — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $F : Z \to Kv(Z)$ — п.н.св. β-уплотняющее мультиотображение. Тогда множество неподвижных точек $FixF = \{x \in Z : x \in F(x)\}$ непусто и компактно.

Теорема 2.2 (см. [5], Теорема 3.3.4) Пусть $V \subset \mathcal{E}$ - непустое ограниченное относительно открытое подмножество замкнутого выпуклого множества $K \subset \mathcal{E}$, $a \in V$- внутренняя точка и $F : \bar{V} \to Kv(D)$- п.н.св. β-уплотняющее мультиотображение удовлетворяющее граничному условию

$$x - a \notin \lambda(F(x) - a)$$

для всех $x \in \partial V$ и $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда $FixF$ - непустое компактное множество.

2.2 Фазовое пространство

Мы будем применять понятие фазового пространства $\mathcal{B}$, введённое Дж.К. Хейлом и Дж. Като (см.[6]).

Пространство $\mathcal{B}$ будем рассматривать как линейное топологическое пространство функций, отображающих $(-\infty;0)$ в банахово пространство $\mathcal{E}$, наделённое полунормой $||\cdot||_{\mathcal{B}}$.

Для функции $y:(-\infty;T]\to\mathcal{E}$ и $t\in(-\infty;T]$ определим функцию $y_t:(-\infty;0]\to\mathcal{E}$ следующим образом $y_t(\theta)=y(t+\theta),\theta\in(-\infty;0]$.
Будем считать, что фазовое пространство $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

($\mathcal{B}$) Если функция $y:(-\infty;T]\to\mathcal{E}$ непрерывна на $[0;T]$ и $y_0\in\mathcal{B}$, то для каждого $t\in[0;T]$ выполняется:
(i) $y_t\in\mathcal{B}$;
(ii) функция $t\to y_t$ непрерывна;
(iii) $||y_t||_{\mathcal{B}}\leqslant K(t)\sup_{0\leqslant r\leqslant t}||y(r)||+N(t)||y_0||_{\mathcal{B}}$, где $K(\cdot),N(\cdot):[0;\infty)\to[0;\infty)$ не зависят от y, $K(\cdot)$- положительна и непрерывна, $N(\cdot)$- локально ограничена.

Примеры фазовых пространств, удовлетворяющих всем вышеуказанным свойствам, могут быть найдены, например, в [6].

2.3 Многозначные линейные операторы

Приведём некоторые необходимые определения из теории многозначных линейных операторов (см., например, [7], [8]).

Пусть $\mathcal{E}$ - банахово пространство.

Определение 2.1 Многозначный оператор (мультиоператор) $A:\mathcal{E}\multimap\mathcal{E}$ называется многозначным линейным оператором (МЛО) в $\mathcal{E}$, если $D(A)=\{x\in\mathcal{E}:Ax\neq\varnothing\}$ — линейное подпространство в $\mathcal{E}$ и

$$\begin{cases}Ax+Ay\subset A(x+y), & \forall x,y\in D(A);\\ \lambda Ax\subseteq A(\lambda x), & \forall\lambda\in\mathbb{R},x\in D(A).\end{cases}$$

Определение 2.2 МЛО A называется замкнутым, если G_A есть замкнутое подпространство декартового произведения $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$.

Совокупность всех замкнутых МЛО в $\mathcal{E}$ будем обозначать символом $ML(\mathcal{E})$. Символом $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ мы будем обозначать пространство всех однозначных линейных ограниченных операторов на $\mathcal{E}$.

Пусть $U:\mathbb{R}_+=[0;+\infty)\to\mathcal{L}(\mathcal{E})$ - сильно непрерывное семейство операторов, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $U(t+s)=U(t)U(s)$ для любых $t,s\in\mathbb{R}_+$;

(ii) для каждого $x\in\mathcal{E}$, функция $t\to U(t)x$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$

Из (i) следует, что $U(0)=P\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ — оператор проектирования в $\mathcal{E}$. Семейство U называется обобщённой (или вырожденной) C_0 - полугруппой, если $P\neq I$, где I — тождественный оператор.

Пусть U - вырожденная C_0 — полугруппа, для каждого $\lambda\in\mathbb{C}_\gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:Re\mu>\gamma\}$ ограниченный линейный оператор $R(\lambda)$ может быть определён через преобразование Лапласа следующим образом:

$$R(\lambda)x=\int\limits_0^\infty U(r)xe^{-\lambda r}dr.$$

Функция $R:\mathbb{C}_\gamma\to\mathcal{L}(\mathcal{E})$ удовлетворяет равенству Гильберта и является резольвентой некоторого (единственного) $A\in ML(\mathcal{E})$. Говорят, что этот МЛО A порождает обобщённую полугруппу U.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $M : D(M) \subseteq \mathcal{E} \to \mathcal{E}$-ограниченный линейный оператор и $L : D(L) \subseteq \mathcal{E} \to \mathcal{E}$-замкнутый линейный оператор в вещественном сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{E}$,удовлетворяющие условиям:$(ML)D(L) \subseteq D(M); \overline{(M(D(L)))} \subseteq R(M)$.
Будем рассматривать нелинейные системы управления, описываемые вырожденными (типа Соболева) функционально-дифференциальными включениями в $\mathcal{E}$ следующего вида:

$$\frac{dMx(t)}{dt} \in Lx(t) + F(t,Mx_t) + Bu(t), t \in [0,T] := I, \tag{3.1}$$

где для функции $x : (-\infty; T] \to \mathcal{E}$ выполняется начальное условие

$$Mx_0 = \widetilde{\psi} \in \mathcal{B} \tag{3.2}$$

Функция управления $u(\cdot)$ выбирается в пространстве $L^2(I; \mathcal{V})$, где $\mathcal{V}$ банахово пространство управлений, $B : \mathcal{V} \to \mathcal{E}$- ограниченный линейный оператор, $F : I \times \mathcal{B} \to Kv(\mathcal{E})$-некоторое мультиотображение.
Вводя замену $y(t) = Mx(t)$, перепишем управляемую систему следующим образом:

$$y^{'}(t) \in Ay(t) + F(t,y_t) + Bu(t),t \in I \tag{3.1$'$}$$

$$y_0 = \widetilde{\psi} \in \mathcal{B}, \tag{3.2$'$}$$

где $A = LM^{-1}$. Очевидно, $A \in ML(\mathcal{E})$,если M-необратим и $D(A) = M(D(L))$. Будем предполагать, что
(A) оператор A порождает обобщённую C_0–полугруппу U(о достаточных условиях этого см., например,[7]).
Пусть константа $\mathcal{M}$ такова, что

$$\| U(t) \| \leqslant \mathcal{M}, \tag{$\mathcal{M}$}$$

для всех $t \in [0; T]$.

Положим, что многозначная нелинейность $F : I \times \mathcal{B} \to Kv(\mathcal{E})$ удовлетворяет условиям:
$(F1)$ для каждого $\psi \in \mathcal{B}$, мультифункция $F(\cdot; \psi) : I \to Kv(\mathcal{E})$ допускает измеримое сечение;
$(F2)$ мультиотображение $F(t,\cdot) : B \to Kv(\mathcal{E})$ является п.н.св. для п.в. $t \in I$;
$(F3)$ для всякого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{B}$ существует такая функция $\alpha_\Omega \in L^1_+(I)$, что $||F(t; \psi)||_\mathcal{E} := sup(||z||_\mathcal{E} : z \in F(t,\psi)) \leqslant \alpha_\Omega(t)$ для п.в. $t \in I, \psi \in \Omega$;
$(F4)$ существует такая функция $k \in L^1_+(I)$, что для каждого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{B}$: $\chi(F(t,\Omega)) \leqslant k(t)\varphi(\Omega)$ для п.в. $t \in I$, где χ- хаусдорфова мера некомпактности в $\mathcal{E}$ и $\varphi(\Omega)$- модуль послойной некомпактности множества Ω.

Замечание 3.1 Известно (см. например, [4]), что условие $(F1)$ выполняется, если мультифункция $F(\cdot; \psi)$ измерима для каждого $\psi \in \mathcal{B}$.

Замечание 3.2 При условиях $(F1) - (F3)$ для каждой непрерывной функции $v : I \to \mathcal{B}$ мультифункция $F(t; v(t))$ интегрируема (см. [4], [5]).

В дальнейшем мы будем рассматривать фазовое пространство $\mathcal{B}$ функций $\psi : (-\infty; 0) \to \mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_0 = \overline{D(A)} = \overline{M(D(L))}$, удовлетворяющее всем аксиомам пункта 2.2

Будем предполагать, что функция $y(\cdot)$ удовлетворяет в заданных точках $0 < t_1 < ... < t_n < T$ импульсным условиям

$$y(t_k^-) = y(t_k), k = 1,...,N, \tag{3.3}$$

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \Xi_k(y(t_k)), k = 1,...,N, \tag{3.4}$$

где $\Xi_k : \mathcal{B} \to \mathcal{E}_0, k = 1,2,...,N$ — вполне непрерывные импульсные функции.

В дальнейшем символом $\mathcal{PC}([0,W];\mathcal{E}_0)$ мы будем обозначать пространство функций $z : [0,b] \to \mathcal{E}_0$, которые непрерывны на $[0,T]\backslash\{t_1,\ldots,t_N\}$ и таковы, что их левые и правые пределы $z(t_k^-)$ и $z(t_k^+)$, $k = 1,\ldots,N$ существуют и $z(t_k^-) = z(t_k)$. Нетрудно видеть, что это пространство, снабженное нормой равномерной сходимости, будет банаховым и что пространство непрерывных функций $C([0,T];\mathcal{E}_0)$ является его замкнутым подпространством. Для $z \in \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$ мы обозначаем $\widetilde{z}_i$ для $i = 0,1,\ldots,N$ функцию $\widetilde{z}_i \in C([t_i,t_{i+1}];\mathcal{E}_0)$ заданную как $\widetilde{z}_i(t) = z_i(t)$ для $t \in (t_i,t_{i+1}]$ и $\widetilde{z}_i(t_i) = z(t_i^+)$. Далее, для множества $D \subset \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$, мы обозначаем $\widetilde{D}_i, i = 0,1,\ldots,N$ множество $\widetilde{D}_i = \{\widetilde{z}_i : z \in D\}$. Нетрудно проверить следующее утверждение.

Предложение 3.1 Множество $D \in \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$ тогда и только тогда, когда каждое множество $\widetilde{D}_i, i = 0,1,\ldots,N$ относительно компактно в $C([t_i,t_{i+1}];\mathcal{E}_0)$.

Теперь рассмотрим выпуклое замкнутое множество $\mathcal{D} \in \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$, определенное как

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0), z(0) = \widetilde{\psi}(0)\},$$

где $\widetilde{\psi} \in \mathcal{B}$ — функция из начального условия (3.2).

Далее для любого $y \in \mathcal{D}$ мы определим функцию $y[\widetilde{\psi}] : (\infty;T] \to \mathcal{E}_0$ следующим образом:

$$y[\widetilde{\psi}](t) = \begin{cases} \widetilde{\psi}(t), & t \in (-\infty,0); \\ y(t), & t \in [0,T], \end{cases}$$

Тогда для $t \in I$:

$$y[\widetilde{\psi}]_t(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\psi}(t+\theta), & \theta \in (-\infty,-t); \\ y(t+\theta), & \theta \in [-t,0], \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $\pi : I \times \mathcal{D} \to \mathcal{B}$, пределённое как

$$\pi(t,y) = y[\widetilde{\psi}]_t.$$

Отметим, что $\pi(\cdot,y)$ непрерывно по аксиоме $(\mathcal{B})$(ii). Более того, $\pi(t,\cdot)$ является липшицевым относительно полунормы $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ равномерно по $t \in I$.

Действительно, обозначая

$$K = max_{t\in I}K(t)$$

для функции $K(\cdot)$, из аксиомы $(\mathcal{B})(iii)$, мы получаем для любых $y,y' \in \mathcal{D}$:

$$||\pi(t,y) - \pi(t,y')||_{\mathcal{B}} = ||y[\widetilde{\psi}]_t - y'[\widetilde{\psi}]_t||_{\mathcal{B}} \leqslant K||y-y'||_C + N(t)||y[\widetilde{\psi}]_0 - y'[\widetilde{\psi}]_0||_{\mathcal{B}} = K||y-y'||_C$$

Теперь рассмотрим мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F : \mathcal{D} \multimap L^1(I,\mathcal{E}_0)$,
$\mathcal{P}_F(y) = S_{F(\cdot,\pi(\cdot,y))} = \{f \in L^1(I;\mathcal{E}) : f(t) \in F(t,\pi(t,y)) = F(t,y[\widetilde{\psi}]_t)\text{п.в.}t \in I\}$
Применяя лемму 5.1.1 из [5] можно сделать следующий вывод о слабой замкнутости $\mathcal{P}_F$.

Лемма 3.1 Пусть $\{y_n\}$ последовательность в $\mathcal{D}$, сходящаяся к $y_0 \in \mathcal{D}$ и пусть последовательность $\{f_n\} \subset L^1([0;T];\mathcal{E}_0), f_n \in \mathcal{P}_F(y_n), n \geqslant 1$ слабо сходится к функции f_0. Тогда $f_0 \in \mathcal{P}_F(y_0)$.

Определение 3.1 Кусочно-непрерывная функция $x : (-\infty;T] \to E$ называется интегральным решением задачи (3.1)-(3.4), если функция $y(t) = Mx(t)$ удовлетворяет начальному условию (3.2$'$) и в интервале I она принимает вид:

$$y(t) = U(t)y(0) + \sum_{0<t_k<t} U(t-t_k)\Xi_k(y[\psi]_{t_k}) + \int_0^t U(t-s)f(s)ds + \int_0^t U(t-s)Bu(s)ds,$$

где $f \in \mathcal{P}_F(y)$ и $u \in L^2(I;\mathcal{V})$

Мы будем рассматривать задачу управляемости для вышеприведённой системы, т.е. предполагая, что начальная функция $\widetilde{\psi} \in \mathcal{B}$ и точка $x_1 \in \mathcal{E}_0$ заданы, изучим условия, которые гарантируют существование интегрального решения задачи (3.1)-(3.4), удовлетворяющего соотношению

$$Mx(T) = x_1. \tag{3.5}$$

Определение 3.2 Пара (x,u), удовлетворяющая (3.1)-(3.5), называется решением задачи управляемости (3.1)-(3.5).

Будем использовать стандартное предположение об управляемости соответствующей линейной задачи без импульсов, то есть при $F \equiv 0, \Xi_k = 0, k = 1,...,N$.
Точнее, полагаем, что линейный оператор управляемости $W : L^2(I;\mathcal{V}) \to \mathcal{E}_0$, заданный как $Wu = \int_0^T U(T-s)Bu(s)ds$ имеет ограниченный обратный оператор

$$W^{-1} : \mathcal{E}_0 \to L^2(I;U)/KerW.$$

Будем считать, без ограничения общности, что $W^{-1} : \mathcal{E}_0 \to L^2(I;U)$ (см. [1]).
Пусть $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ положительные постоянные, такие что

$$||B|| \leqslant \mathcal{M}_1 \tag{3.6}$$

и

$$||W^{-1}|| \leqslant \mathcal{M}_2. \tag{3.7}$$

Для абстрактного оператора $S : L^1([0,T];\mathcal{E}) \to \mathcal{PC}([0,T],\mathcal{E}_0)$ рассмотрим следующие условия

$(S1)$ $\|Sf - Sg\|_C \leqslant M\|f-g\|_{L^1([0,T];\mathcal{E}_0)}$ для каждых $f,g \in L^1([0,b];E)$, где $\|\cdot\|_C$ обозначает норму равномерной сходимости;

$(S2)$ для любого компакта $K \subset \mathcal{E}$ и последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in L^1([0,T];\mathcal{E})$, таких, что $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ для п.в. $t \in [0,T]$, слабая сходимость $f_n \rightharpoonup f_0$ влечет сходимость $Sf_n \to Sf_0$.

Применяя следствие 5.1.2 из [5], мы получаем следующее утверждение

Предложение 3.2 Пусть $F : [0,T] \times \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(E)$ удовлетворяет условиям (F1)-(F4) и $S : L^1([0,T];\mathcal{E}) \to \mathcal{PC}([0,T],\mathcal{E}_0)$ удовлетворяет (S1), (S2). Тогда композиция $S\mathcal{P}_F : \mathcal{D} \multimap \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$ – п.н.с. мультиотображение с компактными значениями.
Рассмотрим теперь обобщенный оператор Коши $G : L^1([0,T];\mathcal{E}_0) \to C([0,T];\mathcal{E}_0)$ вида

$$Gf(t) = \int\limits_0^t U(t-s)f(s)\,ds \quad , t \in [0,T]. \tag{3.8}$$

Для этого оператора справедливо следующее утверждение (см. [7]).

Предложение 3.3 Обобщенный оператор Коши G удовлетворяет свойствам (S1) и (S2).
Наконец, отметим следующее свойство, которое может быть выведено из теоремы 5.1.1 [5].

Предложение 3.4 Пусть $S : L^1([0,E];\mathcal{E}) \to \mathcal{PC}([0,T],\mathcal{E}_0)$ — оператор, удовлетворяющий свойствам (S1) и (S2). Тогда для любой интегрально ограниченной последовательности $\{f_n\} \subset L^1([0,T];\mathcal{E})$ такой, что $\{f_n(t)\}$ относительно компактно для п.в. $t \in [0,T]$, последовательность $\{Sf_n\}$ относительно компактна в $\mathcal{PC}([0,T],\mathcal{E}_0)$.

4. РАЗРЕШАЮЩИЙ МУЛЬТИОПЕРАТОР

Для решения задачи управляемости рассмотрим интегральный мультиоператор $\Gamma : \mathcal{D} \multimap \mathcal{D}$ определенный следующим образом:

$$\Gamma(z) =$$

$$= \Big\{ y \in \mathcal{D} : y(t) = U(t)\widetilde{\psi}(0) + \sum_{0<t_k<t} U(t-t_k)\Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) + \int\limits_0^t U(t-s)(f(s)+Bu_z(s))\,ds,\ f \in \mathcal{P}_F(z) \Big\} \tag{4.1}$$

где $u_z(\cdot) \in L^2([0,T];\mathcal{V})$,

$$u_z(t) = W^{-1}\Big(x_1 - U(T)\widetilde{\psi}(0) - \sum_{k=1}^{N} U(T-t_k)\Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) - \int\limits_0^T U(T-\eta)f(\eta)d\eta \Big)(t).$$

Нетрудно видеть, что, если $y \in Fix\Gamma$, то функция $(y[\widetilde{\psi}],u_y)$ определяет решение задачи управляемости (3.1)–(3.5).

Таким образом, нашей целью является найти неподвижную точку $y \in Fix\Gamma$. Для этого опишем некоторые свойства мультиоператора Γ. Прежде всего, отметим следующую оценку.

Лемма 4.1 Пусть $z \in \mathcal{D}$ и $y \in \lambda\Gamma(z)$ для некоторого $0 < \lambda \leqslant 1$, тогда для каждого $t \in [0,T]$ имеем

$$\| y(t) \| \leqslant \mathcal{M} \| \widetilde{\psi}(0) \| + \mathcal{M} \textstyle\sum_{0<t_k<t} \| \Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) \| + \mathcal{M} \int_0^t \| f(s) \| ds +$$
$$\mathcal{M}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T} \Big(\| x_1 \| + \mathcal{M} \| \widetilde{\psi}(0) \| + \mathcal{M} \textstyle\sum_{k=1}^N \| Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) \| + \mathcal{M} \int_0^T \| f(\eta) \| d\eta \Big)$$

где $f \in \mathcal{P}_F(z)$ и $\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — константы из оценок $(\mathcal{M})$, (3.6), (3.7).

Доказательство.

Пусть $y \in \lambda\Gamma(z)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, тогда имеем:

$$\| y(t) \| \leqslant \| U(t)\widetilde{\psi}(0) + \sum_{0<t_k<t} U(t-t_k)\Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) + \int\limits_0^t U(t-s)(f(s)+Bu_z(s))ds \|$$

Отсюда очевидно следует:

$$\| y(t) \| \leqslant \mathcal{M} \| \widetilde{\psi}(0) \| + \mathcal{M} \textstyle\sum_{0<t_k<t} \| \Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) \| + \mathcal{M} \int_0^t \| f(s) \| ds +$$
$$+\mathcal{M}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T} \Big(\| x_1 \| + \mathcal{M} \| \widetilde{\psi}(0) \| + \mathcal{M} \textstyle\sum_{k=1}^N \| \Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) \| + \mathcal{M} \int_0^T \| f(\eta) \| d\eta \Big).$$

Предложение 4.1 Мультиоператор Γ, определенный в (4.1) является п.н.с. с выпуклыми и компактными значениями.

Доказательство.

Разобьем Γ на сумму мультиоператора $\Gamma_1 : \mathcal{D} \multimap \mathcal{D}$ и двух однозначных операторов $\Gamma_2, \Gamma_3 : \mathcal{PC}([0,E];\mathcal{E}_0) \to \mathcal{PC}([0,E];\mathcal{E}_0)$, заданных следующим образом:

$$\Gamma_1(z) = \left\{ y_1 \in \mathcal{D} \ :\ y_1(t) = \begin{array}{l} U(t)\widetilde{\psi}(0) + \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds + \\ \int_0^t U(t-s)BW^{-1}\Big(x_1 - U(T)\widetilde{\psi}(0) - \int_0^T U(t-\eta)f(\eta)d\eta \Big)(s)ds, \\ f \in \mathcal{P}_F(z) \end{array} \right\}$$

$$\Gamma_2(z)(t) = -\int\limits_0^t U(t-s)BW^{-1}\left(\sum_{k=1}^N U(T-t_k)\Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) \right)(s)ds$$

$$\Gamma_3(z)(t) = \sum_{0<t_k<t} U(t-t_k)\Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}).$$

Прежде всего отметим, что из непрерывности операторов B, W^{-1}, и импульсных функций $\Xi_k : \mathcal{B} \to \mathcal{E}, k = 1, \ldots, N$ мы получаем, что Γ_2 и Γ_3 - непрерывные операторы.
Далее, рассмотрим мультиоператор Γ_1 как композицию суперпозиционного мультиоператора $\mathcal{P}_F$ с оператором $S = S_1 + S_2 : L^1([0,T];\mathcal{E}) \to C([0,T];\mathcal{E}_0)$, где:

$$S_1 f(t) = U(t)\widetilde{\psi}(0) + \int_0^t U(t-s)f(s)ds$$

и

$$S_2 f(t) = \int_0^t U(t-s)BW^{-1}\left(x_1 - U(T)\widetilde{\psi}(0) - \int_0^T U(t-r)f(\eta)d\eta\right)(s)ds$$

Нетрудно видеть, что оператор S удовлетворяет свойствам (S1) и (S2).
В заключение отметим, что сумма полунепрерывного сверху компактно-значного мультиотображения Γ_1 с двумя непрерывными однозначными отображениями Γ_2 и Γ_3 является полунепрерывным сверху мультиотображением с компактными значениями (см., например, [4], [5]). Выпуклость значений Γ прямо вытекает из выпуклости значений мультиотображения F.
Теперь мы покажем, что мультиоператор $\Gamma : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{D})$ является уплотняющим. Для этого нам понадобятся некоторые дополнительные предположения.
Пусть константы $R, N_1 > 0$ таковы, что

$$\|U(t)\|^{(\chi)} \leqslant R \leqslant \mathcal{M}, \text{ и } \|B\|^{(\chi)} \leqslant N_1 \leqslant \mathcal{M}_1. \tag{4.2}$$

Далее, обозначая $\chi_{\mathcal{V}}$ хаусдорфову МНК в пространстве $\mathcal{V}$, будем предполагать, что найдется функция $\delta \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+)$ такая, что для любого ограниченного множества $\Pi \subset \mathcal{E}$ имеем

$$\chi_{\mathcal{V}}(W^{-1}(\Pi)(t)) \leqslant \delta(t)\chi_{\mathcal{E}}(\Pi) \text{ п.в. } t \in [0;T] \tag{4.3}$$

Пусть выполнено следующее условие:

$$\left(R + R^2 N_1 \int_0^b \delta(s)\,ds\right)\int_0^b m(\eta)\,d\eta < 1, \tag{4.4}$$

где $m(\cdot)$ - функция из условия (F4).
Теперь рассмотрим МНК ν, заданную на ограниченных множествах $\Omega \subset \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$ со значениями в $(\mathbb{R}^2_+, \geqslant)$ следующим образом:

$$\nu(\Omega) = \left(\varphi(\Omega), \max_{0\leqslant i\leqslant N} \mathrm{mod}_C(\widetilde{\Omega}_i)\right),$$

где φ и mod_C — модуль послойной некомпактности и модуль равностепенной непрерывности, соответственно. Заметим, что модуль послойной некомпактности корректно определен на пространстве $\mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$. Нетрудно видеть, что ν -монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и регулярная мера некомпактности.

Предложение 4.2 При условиях (4.3) и (4.4) мультиоператор $\Gamma : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{D})$, заданный в (4.1), является ν-уплотняющим.
Доказательство.

Разложим мультиоператор Γ таким же образом, как и в предложении 4.1, т.е. мы представим Γ как сумму мультиоператора $\Gamma_1 : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{D})$ и двух однозначных операторов $\Gamma_2, \Gamma_3 : \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0) \to \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}_0)$. Сначала покажем, что оператор Γ_1 является ν-уплотняющим. Действительно, если $\Omega \subset \mathcal{D}$ — ограниченное подмножество такое, что

$$\nu(\Gamma_1(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega) \tag{4.5}$$

в смысле полуупорядоченности, порождаемой конусом $\mathbb{R}^2_+$. Покажем, что Ω относительно компактно.

Оценим значение $\varphi(\Omega)$. Для любого $t \in [0,T]$ имеем

$$\Gamma_1(\Omega)(t) \subset U(t)\widetilde{\psi}(0) + G \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t) + S_2 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t).$$

Тогда в соответствии с (F4) и (4.2) имеем

$$\chi_{\mathcal{E}}\left(\{U(t-s)f(s) \,:\, f \in \mathcal{P}_F(\Omega)\}\right) \leqslant Rm(s)\varphi(\Omega[\widetilde{\psi}]_s) \leqslant Rm(s)\varphi(\Omega),$$

где $\Omega[\widetilde{\psi}]_s = \{z[\widetilde{\psi}]_s : z \in \Omega\}$.

По теореме 4.2.3 из [5] мы имеем $\chi_{\mathcal{E}}(G \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)) \leqslant R\varphi(\Omega)\int\limits_0^t m(s)\,ds \leqslant R\varphi(\Omega)\int\limits_0^T m(s)\,ds.$

Из последнего неравенства и оценок (4.2) и (4.3) мы получаем

$$\begin{aligned}&\chi_{\mathcal{E}}\left(\left\{U(t-s)BW^{-1}\left(x_1 - U(T)\widetilde{\psi}(0) - \textstyle\int_0^T U(t-\eta)f(\eta)d\eta\right)(s),\ f \in \mathcal{P}_F(\Omega)\right\}\right) \leqslant \\ &\leqslant RN_1\delta(s)\chi_{\mathcal{E}}\left(\left\{\textstyle\int_0^T U(t-\eta)f(\eta)d\eta \,:\, f \in \mathcal{P}_F(\Omega)\right\}\right) \leqslant R^2N_1\varphi(\Omega)\left(\int\limits_0^T m(s)ds\right)\delta(s).\end{aligned}$$

Снова, применяя теорему 4.2.3 из [5], имеем

$$\begin{aligned}&\chi_E(S_2 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)) \leqslant R^2N_1\varphi(\Omega)\left(\textstyle\int_0^T m(s)\,ds\right)\left(\textstyle\int_0^t \delta(s)ds\right) \leqslant \\ &\leqslant R^2N_1\varphi(\Omega)\left(\textstyle\int_0^T m(s)\,ds\right)\left(\textstyle\int_0^T \delta(s)\,ds\right).\end{aligned}$$

Следовательно, для каждого $t \in [0,T]$ имеем

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{E}}(\Gamma_1(\Omega)(t)) &\leqslant \chi_{\mathcal{E}}(G \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)) + \chi_{\mathcal{E}}(S_2 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)) \leqslant \\ &\leqslant \left(R + R^2N_1\int\limits_0^T \delta(s)\,ds\right)\left(\int\limits_0^T m(s)ds\right)\varphi(\Omega).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(\Gamma_1(\Omega)) \leqslant q\,\varphi(\Omega) \tag{4.6}$$

где, согласно (4.4)

$$q = \left(R + R^2N_1\int\limits_0^T \delta(s)\,ds\right)\int\limits_0^T m(s)\,ds < 1.$$

Наконец, неравенства (4.5) и (4.6) дают

$$\varphi(\Omega) = 0. \tag{4.7}$$

Теперь покажем, что $\mathrm{mod}_C(\widetilde{\Omega}_i) = 0$ для всех $0 \leqslant i \leqslant N$, т.е. каждое множество $\widetilde{\Omega}_i$ равностепенно непрерывно. Отметим, что из (4.5) вытекает $\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{mod}_C(\Gamma_1(\widetilde{\Omega}_j)) \geqslant \mathrm{mod}_C(\widetilde{\Omega}_i)$,

для всех $0 \leqslant i \leqslant N$, поэтому достаточно показать, что каждое множество $\Gamma_1(\widetilde{\Omega}_i), 0 \leqslant i \leqslant N$ равностепенно непрерывно. Это равносильно тому, чтобы показать это для любой последовательности $\{y_n\} \subset \Gamma_1(\widetilde{\Omega}_i)$. Если такая последовательность задана, то найдется последовательность $\{z_n\} \subset \Omega$ и последовательность сечений $\{f_n\}, f_n \in \mathcal{P}_F(z_n)$ такие, что

$$y_n = U(t)\widetilde{\psi}(0) + (Gf_n)(t) + (S_2 f_n)(t), \, t \in [t_j, t_{j+1}].$$

По условию (F3) мы получаем, что последовательность $\{f_n\}$ интегрально ограничена и из (4.7) и условия (F4) следует, что $\chi_{\mathcal{E}}(\{f_n(t)\}) = 0$ п.в. $t \in [0,T]$, т.е. последовательность $\{f_n(t)\}$ относительно компактна для п.в. $t \in [0,T]$. Следовательно, из предложений 3.3, 3.4 и того факта, что оператор S_2 удовлетворяет свойствам (S1) и (S2), мы получаем, что последовательность $\{y_n\}$ относительно компактна, откуда $\mathrm{mod}_C(\{y_n\}) = \mathrm{mod}_C(\Gamma_1(\widetilde{\Omega}_i)) = 0$. Значит, $\mathrm{mod}_C(\widetilde{\Omega}_i) = 0$, для каждого $0 \leqslant i \leqslant N$, откуда, учитывая (4.7), по теореме Арцела-Асколи получаем, что каждое $\widetilde{\Omega}_i$ относительно компактно. Используя предложение 3.1, мы заключаем, что Ω - относительно компактно.

Теперь, из предположений на Ξ_k, $(k = 1, \dots N)$, B, W^{-1} и U, мы получаем, что Γ_2 и Γ_3 - компактные операторы.

Действительно, пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ - ограниченное множество. Из компактности функций Ξ_k, $(k = 1, \dots N)$ и непрерывности операторов $U(T - t_k) : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0$ $(k = 1, \dots N)$ мы получаем, что образ

$$C = \sum_{k=1}^{N} U(T - t_k) \Xi_k(\Omega[\widetilde{\psi}]_{t_k})$$

— компактное множество, где $\Omega[\widetilde{\psi}]_{t_k} = \{z[\widetilde{\psi}]_{t_k} \; : \; z \in \Omega\}$. Далее, из непрерывности оператора $W^{-1} : \mathcal{E}_0 \to L^2([0,E]; \mathcal{V})$ мы получаем, что множество $\mathcal{K} = W^{-1}(C)$ — компактно в пространстве $L^2([0,T]; \mathcal{V})$. Тогда, рассматривая линейный непрерывный оператор $\mathcal{B} : L^2([0,T]; \mathcal{V}) \to L^2([0,T]; \mathcal{E}_0)$, определенный как $(\mathcal{B}u)(t) = Bu(t)$, $t \in [0,T]$, мы получаем, что множество $Q = \mathcal{B}(\mathcal{K})$ компактно в $L^2([0,T]; \mathcal{E}_0)$. Наконец, вводя оператор $\mathcal{T} : L^2([0,T]; \mathcal{E}_0) \to C([0,T]; \mathcal{E}_0)$ заданный как

$$(\mathcal{T}q)(t) = -\int\limits_0^t U(t - s) q(s) \, ds,$$

мы получаем, что $\Gamma_2(\Omega) = \mathcal{T}(Q)$. Ясно, что оператор $\mathcal{T}$ непрерывен и тогда мы получаем, что множество $\Gamma_2(\Omega)$ компактно, следовательно, оператор Γ_2 компактен.

Применяя теорему Арцела-Асколи, нетрудно видеть, что для каждого k семейство функций

$$\{U(t - t_k) \Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k}) \; : \; z \in \Omega\},$$

относительно компактно, откуда следует, что Γ_3 - компактный оператор.

Наконец, оператор Γ является ν-уплотняющим мультиоператором как сумма ν-уплотняющего оператора Γ_1 и двух компактных операторов Γ_2 и Γ_3. в самом деле, применяя свойства монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности МНК ν, мы имеем для данного ограниченного подмножества $\Omega \subset \mathcal{D}$:

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \leqslant \nu\left(\Gamma_1(\Omega) + \Gamma_2(\Omega) + \Gamma_3(\Omega)\right) \leqslant \nu(\Gamma_1(\Omega)) + \nu(\Gamma_2(\Omega)) + \nu(\Gamma_3(\Omega)) = \nu(\Gamma_1(\Omega))$$

и, следовательно, соотношение $\nu(\Gamma(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega)$ влечет $\nu(\Gamma_1(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega)$, откуда и вытекает относительная компактность Ω.

5. ПРИЗНАКИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Результаты предыдущего параграфа показывают, что топологическая степень, описанная в параграфе 2, применима к мультиоператору Γ, определенному в (4.1). Мы можем сформулировать следующее общее утверждение.

Теорема 5.1 Пусть $V \subset \mathcal{D}$ - ограниченное (относительно) открытое множество такое, что $z \notin \Gamma(z)$ для всех $z \in \partial V$. Если $\deg_{\mathcal{D}}(i - \Gamma, \overline{V}) \neq 0$, то задача управляемости (3.1)-(3.5) имеет решение $(y[\widetilde{\psi}], u)$ такое, что $y \in V$.

Мы можем представить теперь некоторые конкретные реализации этого принципа. Для этого будем предполагать, выполненными условия (A), (F1), (F2), (F4),(4.3), и (4.4). В то же время нам нужно усилить условие (F3) и наложить некоторые дополнительные предположения на импульсные функции Ξ_k, $k = 1, \ldots, N$.

Теорема 5.2 Пусть

$(F3')$ найдется последовательность функций $\{\omega_n\} \subset L^1([0,T]; \mathbb{R}_+)$, $n = 1,2\ldots$ такая, что $\sup_{\|c\|_{\mathcal{B}} \leqslant n} \|F(t,c)\| \leqslant \omega_n(t)$ для п.в. $t \in [0,T], n = 1,2,\ldots$ и существует последовательность $\{H_n\}$, $n = 1,2\ldots$ неотрицательных чисел такая, что:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \left(\sup_{\|c\|_{\mathcal{B}} \leqslant n} \|\Xi_k(c)\| \right) < H_n. \tag{5.1}$$

Если

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^T \omega_n(s)\, ds = 0 \tag{5.2}$$

и

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_n = 0, \tag{5.3}$$

то задача управляемости имеет решение.

Доказательство.

Покажем, что найдется число $\mathcal{R} \geqslant \|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}$ такое, что для непустого замкнутого выпуклого множества $B_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathcal{D} : \|z\| \leqslant \mathcal{R}\}$ мы будем иметь $\Gamma(B_{\mathcal{R}}) \subseteq B_{\mathcal{R}}$. В предположении противного, найдутся последовательности $\{y_n\}, \{z_n\} \subset \mathcal{D}$ такие, что $y_n \in \Gamma(z_n), \|z_n\| \leqslant \frac{n}{2}, \|y_n\| > \frac{n}{2}$ для всех $n \geqslant 2\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}$. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \in \mathcal{P}_F(z_n)$, $n \geqslant 2\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}$ такая, что

$$y_n(t) = U(t)\widetilde{\psi}(0) + \textstyle\sum_{0<t_k<t} U(t-t_k)\Xi_k(z_n[\widetilde{\psi}]_{t_k}) + \int_0^t U(t-s)(f_n(s) + Bu_{z_n}(s))\, ds$$

где

$$u_{z_n}(t) = W^{-1}\Big(x_1 - U(T)\widetilde{\psi}(0) - \textstyle\sum_{k=1}^N U(T-t_k)\Xi_k(z_n[\widetilde{\psi}]_{t_k}) - \int_0^T U(T-\eta) f_n(\eta)\, d\eta\Big)(t).$$

Заметим теперь, что для каждого $t \in [0,T]$ и $n \geqslant 2\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}$ мы имеем оценку $\|z_n[\widetilde{\psi}]_t\|_{\mathcal{B}} \leqslant \|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}} + \sup_{0 \leqslant \sigma \leqslant t} \|z_n(\sigma)\| \leqslant \|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}} + \|z_n\| \leqslant n$ откуда $\|\Xi_k(z_n[\psi]_{t_k})\| \leqslant H_n$ для всех $n \geqslant 2\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}$ и $k = 1,...,N$ и $\|f_n(t)\| \leqslant \omega_n(t)$ п.в. $t \in [0,T]$, $n \geqslant 2\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}$.

Применяя лемму 4.1, имеем

$$\|y_n\| \leqslant C_1 + C_2 \left(NH_n + \int\limits_0^T \|f_n(\eta)\|\, d\eta \right) \leqslant C_1 + C_2 \left(NH_n + \int\limits_0^T \omega_n(\eta)\, d\eta \right),$$

где

$$C_1 = \mathcal{M}\|\widetilde{\psi}(0)\| + \mathcal{M}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\left(\|x_1\| + \mathcal{M}\|\widetilde{\psi}(0)\|\right) \tag{5.4}$$

$$C_2 = \mathcal{M}\left(1 + \mathcal{M}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\right) \tag{5.5}$$

Но тогда

$$\frac{1}{2} < \frac{\|y_n\|}{n} \leqslant \frac{C_1}{n} + \frac{C_2 N H_n}{n} + \frac{C_2}{n}\int\limits_0^T \omega_n(\eta)\,d\eta, \quad n \geqslant 2\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}},$$

в противоречие с (5.2) и (5.3).

Таким образом, мы можем применить теорему 2.1 к сужению $\Gamma : B_{\mathcal{R}} \multimap B_{\mathcal{R}}$ и получить существование неподвижной точки $y \in Fix\Gamma$ и, следовательно, решение задачи управляемости.

Теорема 5.3 Пусть

$(F3^{''})$ найдутся функция $p(\cdot) \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+)$ и неубывающая функция $\xi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что для каждого $c \in \mathcal{B}$ имеем $\|F(t,c)\| \leqslant p(t)\xi(\|c\|_{\mathcal{B}})$ п.в. $t \in [0,T]$ и $\|\Xi_k(c)\| \leqslant \xi(\|c\|_{\mathcal{B}})$ $\forall k = 1,\ldots,N$. Далее, пусть найдется константа $L > 0$ такая, что

$$\frac{L}{C_1 + C_2\xi(L + \|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}})\left(N + \int_0^T p(\eta)\,d\eta\right) + \|\widetilde{\psi}(0)\|} > 1, \tag{5.6}$$

где константы C_1 и C_2 заданы соотношениями (5.4), (5.5).

Тогда задача управляемости имеет решение.

Доказательство.

Обозначим $a \in \mathcal{D}$ функцию, тождественно равную $\widetilde{\psi}(0)$. Покажем, что найдется открытая ограниченная окрестность V точки a в $\mathcal{D}$ такая, что

$$z - a \notin \lambda(\Gamma(z) - a) \tag{5.7}$$

для всех $z \in \partial V$ и $0 < \lambda \leqslant 1$.

Предположим, что $z - a \in \lambda(\Gamma(z) - a)$ для некоторого $z \in \mathcal{D}$ and $0 < \lambda \leqslant 1$, тогда $z \in \lambda\Gamma(z) + (1-\lambda)a$. Применяя те же рассуждения, как в лемме 4.1 и в предыдущей теореме, мы получаем следующую оценку:

$$\|z(t)\| \leqslant C_1 + C_2\left(\sum_{k=1}^N \|\Xi_k(z[\widetilde{\psi}]_{t_k})\| + \int\limits_0^T \|f(\eta)\|\,d\eta\right) + \|\widetilde{\psi}(0)\|,$$

где $f \in \mathcal{P}_F(z)$.

Применяя условие $(F3'')$ и используя тот факт, что функция ξ не убывает, получаем оценку

$$\|z\| \leqslant C_1 + C_2\left(N\xi\left(\|z\| + \|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}\right) + \int\limits_0^T p(\eta)\xi\left(\|z[\widetilde{\psi}]_\eta\|_{\mathcal{B}}\right)d\eta\right) + \|\widetilde{\psi}(0)\|$$

$$\leqslant C_1 + C_2\xi\left(\|z\| + \|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}\right)\left(N + \int\limits_0^T p(\eta)d\eta\right) + \|\widetilde{\psi}(0)\|$$

или

$$\frac{\|z\|}{C_1 + C_2\xi\left(\|z\| + \|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}\right)\left(N + \int_0^T p(\eta)d\eta\right) + \|\widetilde{\psi}(0)\|} \leqslant 1.$$

Таким образом, $\|z\|$ не равно константе L, появляющейся в условии (5.6). Тогда возьмем относительно открытое множество $V = \{z \in \mathcal{D} : \|z\| < L\}$.

Отметим, что условие (5.6) влечет $a \in V$. Мы видим, что условие (5.7) выполнено и нам остается применить теорему 2.2.

Теорема 5.4 Пусть

$(F3^{'''})$ найдется функция $\alpha \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+)$ такая, что $\|F(t,c)\| \leqslant \alpha(t)(1+\|c\|_{\mathcal{B}})$ для п.в. $t \in [0,T]$ для всех $c \in \mathcal{B}$ и предположим, что существует константа $H > 0$ такая, что $\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|\Xi_k(c)\| < H$ для всех $c \in \mathcal{B}$. Более того, пусть

$$\mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\cdot e^{\mathcal{M}\int_0^T \alpha(s)\,ds}\int\limits_0^T \alpha(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}\,dt < 1. \tag{5.8}$$

Тогда задача управляемости имеет решение.

Доказательство.

Покажем, что множество всех $z \in \mathcal{D}$ таких, что $z - a \in \lambda(\Gamma(z) - a)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, где $a \in \mathcal{D}$, $a(t) \equiv \widetilde{\psi}(0)$, априори ограничено.

Действительно, пусть $z - a \in \lambda(\Gamma(z) - a)$ для некоторого $\lambda \in (0,1]$, тогда $z \in \Gamma(z) + (1-\lambda)a$. Применяя лемму 4.1 и условие $(F3^{'''})$, имеем для каждого $t \in [0,b]$ оценку

$$\|z(t)\| \leqslant C_1 + C_2NH + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\int\limits_0^T \alpha(s)(1+\|z[\widetilde{\psi}]_s\|_{\mathcal{B}})\,ds +$$

$$\mathcal{M}\int\limits_0^t \alpha(s)(1+\|z[\widetilde{\psi}]_s\|_{\mathcal{B}})\,ds + \|\widetilde{\psi}(0)\|,$$

где C_1 и C_2 заданы (5.4), (5.5). Далее,

$$\begin{aligned}
&\|z(t)\| \leqslant C_1 + C_2NH + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\|\alpha\|_{L^1}\\
&+\mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\textstyle\int_0^T \alpha(s)\left(\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}} + \sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\right)ds\\
&+\mathcal{M}\|\alpha\|_{L^1} + \mathcal{M}\textstyle\int_0^t \alpha(s)\left(\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}} + \sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\right)ds + \|\widetilde{\psi}(0)\|\\
&\leqslant C_1 + C_2NH + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\|\alpha\|_{L^1} + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\|\alpha\|_{L^1}\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}\\
&+\mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\textstyle\int_0^T \alpha(s)\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\,ds + \mathcal{M}\|\alpha\|_{L^1} + \mathcal{M}\|\alpha\|_{L^1}\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}\\
&+\mathcal{M}\textstyle\int_0^t \alpha(s)\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\,ds + \|\widetilde{\psi}(0)\|\\
&\leqslant C_1 + C_2NH + C_2\|\alpha\|_{L^1}(1+\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}) + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\textstyle\int_0^T \alpha(s)\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\,ds\\
&+\mathcal{M}\textstyle\int_0^t \alpha(s)\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\,ds + \|\widetilde{\psi}(0)\|.
\end{aligned}$$

Последнее выражение является неубывающей функцией от t, поэтому получаем следующую оценку:

$$\sup_{0\leqslant\eta\leqslant t}\|z(\eta)\| \leqslant K + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\int\limits_0^T \alpha(s)\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\,ds + \mathcal{M}\int\limits_0^t \alpha(s)\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\|z(\sigma)\|\,ds, \tag{5.9}$$

где

$$\mathcal{K} = C_1 + C_2NH + C_2\|\alpha\|_{L^1}(1+\|\widetilde{\psi}\|_{\mathcal{B}}) + \|\widetilde{\psi}(0)\|.$$

Отметим, что функция $\omega(t) = \sup_{0\leqslant\eta\leqslant t}\|z(\eta)\|$ кусочно непрерывна,

поэтому функция $v(t) = \int_0^t \alpha(s)\omega(s)\,ds$ корректно определена и не убывает, $v(0) = 0$ и мы имеем $v'(t) = \alpha(t)\omega(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Далее, применяя (5.9), получаем $v'(t) \leqslant \alpha(t)(\mathcal{K} + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\cdot v(b) + \mathcal{M}v(t))$.

Умножая обе части этого неравенства на $e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}$, получаем

$$v'(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds} \leqslant \alpha(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}(\mathcal{K} + \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\cdot v(T) + \mathcal{M}v(t)),$$

откуда
$$\left(v(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}\right)' \leqslant \alpha(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}(\mathcal{K}+\mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\cdot v(b)).$$
Интегрирование обеих частей этого неравенства от 0 до T дает
$$v(b)e^{-\mathcal{M}\int_0^T \alpha(s)\,ds} \leqslant (\mathcal{K}+\mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\cdot v(T))\int\limits_0^T \alpha(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}\,dt$$
или
$$lv(T) \leqslant \mathcal{K}\int\limits_0^T \alpha(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}\,dt,$$
где
$$l = e^{-\mathcal{M}\int_0^T \alpha(s)\,ds} - \mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\int\limits_0^T \alpha(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)\,ds}\,dt.$$
Из условия (5.8) вытекает, что $l > 0$ и, следовательно,
$$v(T) \leqslant \frac{\mathcal{K}\int_0^T \alpha(t)e^{-\mathcal{M}\int_0^t \alpha(s)ds}dt}{l} = \mathcal{K}_1 = \mathrm{const}.$$
Поскольку функция v не убывает, имеем
$$v(t) \leqslant \mathcal{K}_1 \ \text{ для всех } \ t \in [0,T].$$
Получаем
$$\|z(t)\| \leqslant \mathcal{K}+\mathcal{M}^2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\sqrt{T}\cdot v(T)+\mathcal{M}v(t) \leqslant \mathcal{K}+C_2\mathcal{K}_1,$$
обеспечивая доказываемую априорную ограниченность.

Возьмем теперь произвольное $\mathcal{R} > \mathcal{K}+C_2\mathcal{K}_1$ и относительно открытое множество $V = \{z \in \mathcal{D} : \|z\| < \mathcal{R}\}$. Отметим, что $\|\widetilde{\psi}(0)\| \leqslant \mathcal{K}$ влечет $a \in V$. Доказательство завершается применением теоремы 2.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balachandran, K. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces : a survey / K. Balachandran, J. P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — V. 115, №. 1. — P. 7–28.

2. Obukhovskii V. Controllability of systems governed by semilinear differential inclusions in a Banach space with a non-compact semigroup / V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Anal. — 2009, V. 70, № 9. — P. 3424–3436.

3. Benedetti I. Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator / I. Benedetti, V. Obukhovskii, P. Zecca // Discuss. Math. Differential Incl., Control and Optim. — 2011. — V. 31. — P. 39–69.

4. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : Либроком, 2011.

5. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, de Gruyter series in nonlinear analysis and applications, 7. Walter de Gruyter / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin-New York, 2001.

6. Hale, J. K. Phase space for retarded equations with infinite delay / J. K. Hale, J. P. Kato // Funktional. Ekvac. — 1978. — V. 21 (1). — P. 11–41.

7. Baskakov, A. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces / A. Baskakov, V. Obukhovskii, P. Zecca // Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. — 2003. — V. 23. — P. 53–74.

8. Favini A. Degenerate differential inclusions in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi, Marcel Dekker. — New York, 1999.

REFERENCES

1. Balachandran K., Dauer J.P. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey. J. Optim. Theory Appl., 2002, vol. 115, no. 1, pp. 7–28.

2. Obukhovskii V., Zecca P., Controllability of systems governed by semilinear differential inclusions in a Banach space with a non-compact semigroup. Nonlinear Anal., 2009, vol. 70, no. 9, pp. 3424–3436.

3. Benedetti I., Obukhovskii V., Zecca P. Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator, Discuss. Math. Differential Incl., Control and Optim., 2001, vol. 31, pp. 39–69.

4. Borisovich Y.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multi-valued mappings and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij i differencial'nyx vklyuchenij]. M., Librkom, 2010.

5. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, de Gruyter series in nonlinear analysis and applications, 7. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

6. Hale J.K, Kato J.P., Phase space for retarded equations with infinite delay, Funktional. Ekvac., 1978, vol. 21 (1), p. 11–41.

7. Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim., 2003, vol. 23, pp. 53–74.

8. Favini A., Yagi A. Degenerate differential inclusions in Banach spaces, Marcel Dekker, New York, 1999.

Брызгалова Мария Анатольевна, преподаватель Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"; аспирант на кафедре высшей математики Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж, Россия
E-mail: mari.brizgalova1@mail.ru
Тел.: +7–952–547–16–72

Bryzgalova Maria Anatolevna, lecturer of the Military Educational Research Centre of Air Force "Air Force Academy named after professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin"; a graduate student at the Department of Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: mari.brizgalova1@mail.ru
Tel.: +7–952–547–16–72

Обуховский Валерий Владимирович, профессор Воронежского госуниверситета, доктор физико-математических наук,профессор; заведующий кафедрой высшей математики Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж, Россия
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Obukhovskii Valeri Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Head of Chair of Higher Mathematics of the Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Tel.: +7(473)255–36–63