

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ПРИ МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОМ ОБНАРУЖЕНИИ ФМ СИГНАЛОВ

Ю. С. Радченко, М. С. Кондаков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.12.2016 г.

Аннотация. В работе исследовано байесовское правило принятия решений при различении M сигналов и наличии гипотезы об отсутствии сигналов. Введен расширенный набор характеристик для описания вероятностей правильных и неправильных решений. Решена задача совместного обнаружения-различения сигналов с двух и четырехпозиционной фазовой модуляцией (ФМ-2, ФМ-4). Для систем с ФМ-2-и ФМ-4 предложена геометрическая трактовка решающих правил, получены точные аналитические характеристики многоальтернативного обнаружения сигналов. Приведено сравнение полученных характеристик с аналогичными характеристиками при отдельном обнаружении и различении сигналов. Представлены результаты статистического моделирования решающих правил.

Ключевые слова: совместное обнаружение-различение сигналов, байесовский алгоритм принятия решений, характеристики решающих правил, ошибки обнаружения — различения для ФМ2 и ФМ4, статистическое моделирование алгоритмов.

GEOMETRICAL AND PROBABILISTIC ANALYSIS OF DECISIONS AT MULTIALTERNATIVE DETECTION OF PSK SIGNALS

Yu. S. Radchenko, M. S. Kondakov

Abstract. A Bayesian decision rule for recognition of M signals in presence of no signal hypothesis is investigated. An extended set of characteristics of correct and incorrect decisions is used. The problem of joint detection-recognition of signals with 2- and 4-positional phase modulation (2PSK, 4PSK) is solved. For systems with 2PSK and 4PSK geometrical description of decision rules is proposed and precise analytical characteristics of joint detection-recognition of signals are obtained. A comparison of the obtained characteristics with similar ones for separate detection and recognition is presented. The results of statistical modeling of decision rules are presented.

Keywords: joint detection-recognition of signals, Bayesian decision approach, decision rule characteristics, detection-recognition errors for 2- and 4-positional phase modulation, statistical modeling of algorithms.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ помехоустойчивости обработки сигналов с многопозиционной амплитудно-фазовой модуляцией представляет собой классическую задачу. Обычно рассматривают отдельно обнаружение сигналов и различение ортогональных сигналов из некоторого созвездия. Однако,

на практике их решают совместно. В работе [1] синтезирован байесовский алгоритм многоальтернативного обнаружения (совместного обнаружения-различения) совокупности известных сигналов. В [2] найдены характеристики многоальтернативной обработки ортогональных сигналов на выходе канала с общими замираниями. Между тем в работе [3] показано, что корреляционная матрица созвездия сигналов, а, следовательно, и корреляционная матрица статистик на выходе приемника является во многих случаях вырожденной. Это делает неприменимой обычную методику расчета помехоустойчивости приема сигналов. Невозможность разложить с помощью метода Холецкого вырожденную корреляционную матрицу и сформировать выборку с заданной статистикой делает неприменимыми обычные алгоритмы статистического моделирования [4]. В [3] предложена методика расчета вероятностей ошибок различения известных сигналов, когда совместное распределение статистик вырождено и имеет δ -образные условные плотности вероятностей.

В данной работе в развитие [2,3] предложена геометрическая интерпретация областей принятия решений при многоальтернативном обнаружении сигналов с ФМ-2 и ФМ-4. Для этих видов сигналов получены характеристики обнаружения-различения, не требующие работы с многомерным вырожденным распределением. Реализован подход к статистическому моделированию решающих правил, обеспечивающий формирование невырожденных статистик. Полученные результаты обобщают известные характеристики раздельного обнаружения и различения для таких созвездий сигналов [5,6,7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. БАЙЕСОВСКИЙ АЛГОРИТМ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1.1. Постановка задачи

Пусть имеется $M+1$ гипотеза $H_0, \dots, H_i, i = 1..M$. Гипотеза H_0 соответствует случаю отсутствия полезного сигнала, H_i соответствует случаю наличия сигнала $s_i(t)$, известного для каждой гипотезы. Гипотеза H_0 реализуется с априорной вероятностью p_0 , H_i - с вероятностью $p_i, i = 1..M$. Очевидно, что $p_0 + \sum_{i=1}^M p_i = 1$. Если $p_i \equiv p$, то $p_0 + Mp = 1$.

Пусть наблюдаемая реализация имеет вид

$$\xi(t) = \begin{cases} s_i(t) + \eta(t), & i = 1..M, \text{ при гипотезе } H_i \\ \eta(t), & \text{при гипотезе } H_0 \end{cases}.$$

Здесь $s_i(t) = a_i \cos(\omega_0 t + \psi_i)$, $\psi_i = (i - 1)\pi/M$ — сигналы с известными параметрами, $\eta(t)$ — белый гауссовский шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Логарифм функционала отношения правдоподобия для каждой гипотезы H_i , формируемый на выходе i -го канала приемника, имеет вид

$$L_i = (1/N_0) \left[2 \int_0^T \xi(t) s_i(t) dt - E_i \right], \quad (1)$$

где $E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$ — энергия i -го сигнала. Статистика L_i (1) может быть представлена в следующем виде: при наличии на входе i -го канала приемного устройства сигнала $s_j(t)$

$$L_i^{(j)} = (2/N_0) \int_0^T (s_j(t) + \eta(t)) s_i(t) dt - E_i/N_0 = q_i q_j R_{ji} + q_i n_i - 0.5 q_i^2. \quad (2)$$

В (2) $q_i^2 = 2E_i/N_0$ — энергетическое отношение сигнал/шум для сигнала $s_i(t)$, $R_{j,i} = \left(\int_0^T s_j(t)s_i(t)dt \right) / \sqrt{E_i E_j}$ — элементы нормированной корреляционной матрицы системы сигналов, $R_{ii} = 1$, $n_i = \sqrt{2/E_i N_0} \int_0^T \eta(t)s_i(t)dt$ — гауссовская случайная величина с нулевым средним, единичной дисперсией $D(n_i) = 1$. Гауссовский вектор $N_i = q_i n_i$, $i = 1..M$ имеет элементы корреляционной матрицы $\langle N_j N_i \rangle = q_j q_i R_{ji}$. В дальнейшем будем оперировать со случайными величинами

$$L_i^{(j)}(\xi(t)) = q_i q_j R_{ji} - 0.5q_i^2 + N_i = m_i^{(j)} + N_i.$$

Здесь нижний индекс соответствует номеру канала приемника, верхний индекс — номеру поступающего сигнала. Требуется синтезировать алгоритм принятия решений относительно вида сигнала и найти характеристики решающего правила.

1.2. Правило многоальтернативного обнаружения- различения

Рассмотрим алгоритм принятия решений, следуя методике работ [1], [5]. Пусть γ_i решение в пользу сигнала $s_i(t)$ в то время как в смеси присутствует сигнал $s_j(t)$. Тогда можно ввести элементы матрицы потерь $C_i^{(j)} = C(s_j(t), \gamma_i)$, $i, j = 1..M$ — потери из-за перепутывания сигналов (при $i \neq j$) или правильного решения ($i = j$). $C_i^{(0)} = C(H_0, \gamma_i)$, $i = 0..M$ — потери из-за принятия решения γ_i при отсутствии i -го сигнала. При синтезе байесовского правила принятия решения возникают разности

$$\lambda_i^{(0)} = C_i^{(0)} - C_0^{(0)}, \quad i = 1..M \quad \lambda_i^{(j)} = C_i^{(j)} - C_0^{(j)}, \quad i = 1..M, \quad \lambda_i^{(i)} = C_i^{(i)} - C_0^{(i)}$$

Полагая, что стоимости правильных решений меньше неправильных, получаем неравенства $\lambda_i^{(i)} < 0$, $\lambda_i^{(0)} > 0$. Если ввести обозначения

$$T_i(\xi(t)) = \lambda_i^{(0)} + \sum_{j=1}^M \lambda_i^{(j)} \Lambda_j(\xi(t)),$$

где $\Lambda_j(\xi(t)) = \frac{p_j}{p_0} \frac{W[\xi(t)|s_j]}{W[\xi(t)|H_0]}$ — функционал отношения правдоподобия для сигнала $s_j(t)$ (гипотезы H_j). Тогда решающее правило выглядит следующим образом. Выносятся решение γ_k в пользу сигнала $s_k(t)$, если

$$\begin{aligned} T_k(\xi(t)) &\leq T_j(\xi(t)), & j = 1..M, j \neq k \\ T_k(\xi(t)) &\leq 0, & k = 1..M \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения γ_0 должно выполняться условие

$$T_k(\xi(t)) > 0, \quad \text{для всех } k = 1..M. \quad (4)$$

Соотношения (3), (4) определяют общее решающее правило. Если положить потери всех неправильных решений одинаковыми, а правильных решений нулевыми, то получается следующее правило вынесения решения γ_k :

$$\begin{aligned} \Lambda_k(\xi(t)) &\geq \Lambda_i(\xi(t)), & i = 1..M, i \neq k \\ \Lambda_k(\xi(t)) &> 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Для вынесения решения γ_0 должно выполняться для всех $k = 1..M$

$$\Lambda_k(\xi(t)) \leq 1. \quad (6)$$

Введем обозначение $L_k(\xi(t)) + \ln(p_k/p_0) = \ln(\Lambda_k(\xi(t)))$. Логарифмируя выражения (5), (6), получаем решающие правила в виде

$$L_k(\xi(t)) - L_i(\xi(t)) \geq h_{ki}, \quad L_k(\xi(t)) \geq h_{k0}. \quad (7)$$

Для вынесения решения γ_0 должно выполняться неравенство

$$L_k(\xi(t)) \leq h_{k0}. \quad (8)$$

Здесь $h_{ki} = \ln(p_i/p_k)$, $h_{k0} = \ln(p_0/p_k)$. При равенстве априорных вероятностей $p_i = p_k = p$ порог $h_{ki} = 0$, порог $h_{k0} \equiv h = \ln(p_0/p)$. Порог h_{k0} может выбираться также по критерию Неймана – Пирсона.

1.3. Вероятности принятия решений

Итак, при совместном обнаружении - различении анализируются $M + 1$ гипотеза H_j о полезных сигналах, и выносятся $M + 1$ решение γ_i , $i, j = 0..M$. Совокупность условных вероятностей $P_i^{(j)} = P(\gamma_i|H_j)$ можно представить в виде матрицы или таблицы 1.

Таблица 1.

$H_j \setminus \gamma_i$	γ_0	γ_1	γ_i	γ_M
$s = 0 H_0 \{p_0\}$	$P_0^{(0)}$	$P_1^{(0)}$	$P_i^{(0)}$	$P_M^{(0)}$
$s_1(t) H_1 \{p_1\}$	$P_0^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_i^{(1)}$	$P_M^{(1)}$
$s_j(t) H_j \{p_j\}$	$P_0^{(j)}$	$P_1^{(j)}$	$P_i^{(j)}$	$P_M^{(j)}$
$s_M(t) H_M \{p_M\}$	$P_0^{(M)}$	$P_1^{(M)}$	$P_i^{(M)}$	$P_M^{(M)}$

В этой матрице столбец соответствует решению γ_i , строка — гипотезе H_j . Очевидно, что сумма условных вероятностей в строке удовлетворяет условию нормировки $\sum_{i=0}^M P(\gamma_i|H_j) = \sum_{i=0}^M P_i^{(j)} = 1$. Из (8) видно, что $P_0^{(0)}$ — есть вероятность правильного решения γ_0 о гипотезе H_0 , $P_i^{(0)}$ — условная вероятность при отсутствии сигнала принять решение γ_i , $i = 1..M$,

$$1 - P_0^{(0)} = \sum_{i=1}^M P_i^{(0)} = \alpha^{(0)} \quad (9)$$

— суммарная условная вероятность ложной тревоги, $P(\gamma_0|H_j) = P_0^{(j)}$, $j = 1..M$ — условная вероятность пропуска сигнала $s_j(t)$. Тогда

$$\bar{\beta} = \sum_{j=1}^M p_j P(\gamma_0|H_j) = \sum_{j=1}^M p_j P_0^{(j)} \quad (10)$$

— полная (усредненная) вероятность пропуска любого сигнала. Соответственно вероятность принять решение о наличии какого-либо сигнала

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p_j P_i^{(j)} = 1 - p_0 - \sum_{j=1}^M p_j P_0^{(j)} = 1 - p_0 - \bar{\beta}. \quad (11)$$

Оставшиеся элементы $P_i^{(j)}$, $i, j = 1..M$ определяют условные вероятности правильных и неправильных решений при различении M сигналов. На их основе можно вычислить среднюю (безусловную) вероятность \bar{P}_e ошибки различения системы сигналов $\{s_j(t)\}$

$$\bar{P}_e = \bar{D} - \sum_{j=1}^M p_j P(\gamma_j|H_j) = \bar{D} - \sum_{j=1}^M p_j P_j^{(j)}. \quad (12)$$

Данные формулы переходят в известные формулы для частных случаев:

- 1) Обнаружение одного сигнала $M = 1$: $\alpha^{(0)} = P_1^{(0)}$, $\bar{\beta} = p_1\beta = p_1P_0^{(1)}$, $\bar{D} = p_1D = p_1P_1^{(1)}$, где β и D — обычные условные вероятности пропуска сигнала и правильного обнаружения.
- 2) Различение M сигналов при отсутствии гипотезы H_0 : $\bar{D} = 1$, $\bar{P}_e = P_e = 1 - \sum_{j=1}^M p_j P_j^{(j)}$.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Рассмотрим способ разбиения пространства принятия решений для двух и четырех сигналов при обнаружении — различении сигналов с модуляцией ФМ-2 и ФМ-4. Для упрощения вычислений перейдем к достаточным статистикам $Y_i^{(j)} = (L_i^{(j)}(\xi(t)) + 0.5q^2)/q = qR_{ji} + n_i$. Здесь учтено, что $q_i = q$ — не зависит от номера сигнала. Также в дальнейшем будем полагать априорные вероятности гипотез $p_j = p$, $j = 1..M$

2.1. Пространство решений и характеристики процедуры обнаружения-различения для ФМ-2

Как следует из постановки задачи, пространство принятия решения разбивается на три подобласти $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. Для каждой гипотезы H_j статистики $\{Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}, Y_0^{(j)}\}$ являются статистически жестко коррелированными ($R_{i,j} = \pm 1$). Поэтому в качестве независимой можно взять только одну случайную величину $Y_j^{(j)}$. Тогда пространство принятия решения является одномерным, а подобласти $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ — отрезками на прямой. На рис. 1 приведен пример принятия решений, когда независимой выбрана статистика $Y_1^{(1)}$. Ее реализации, полученные путем статистического моделирования, представлены на рисунке точками. Гауссовская кривая на рис. 1 иллюстрирует распределение $Y_1^{(1)}$ при наличии сигнала $s_1(t)$.

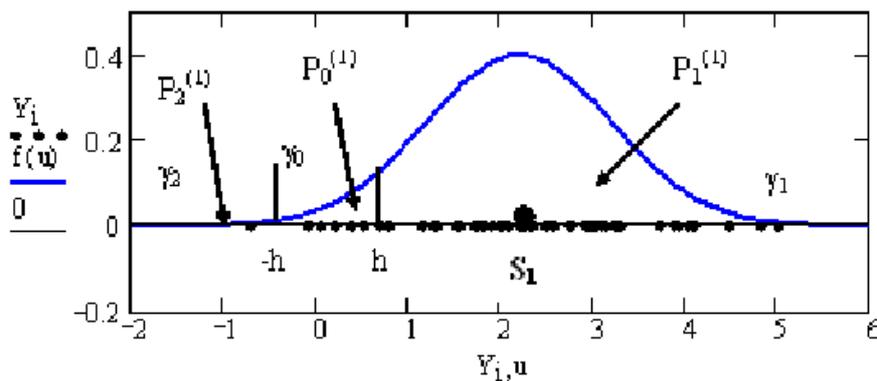


Рис. 1.

Из геометрической интерпретации решающего правила следует, что

$$P_1^{(1)}(q, h) = P[Y_1^{(1)} > h|q], P_0^{(1)}(q, h) = P[|Y_1^{(1)}| < h|q], P_2^{(1)}(q, h) = 1 - P_1^{(1)}(q, h) - P_0^{(1)}(q, h). \quad (13)$$

В формулах (13) указывается, что статистика $Y_1^{(1)}$ зависит от параметра q . Для гипотезы

H_0 можно считать, что статистика $Y_0 = Y_1^{(1)}(q = 0)$. Тогда

$$P_0^{(0)}(h) = P[|Y_0| < h], \quad \alpha(h) = 1 - P_0^{(0)}(h). \quad (14)$$

Из соотношений (13), (14) вытекает правило вычисления порога h по критерию Неймана–Пирсона и алгоритм статистического моделирования принятия решения для ФМ-2. Остальные условные вероятности рассчитываются на основе таблицы 1 и вероятностей (13), (14). В расчетах учитывается, что $s_1(t) = -s_2(t)$ и $p_1 = p_2 = p$.

На данном рисунке приведены также вероятности решений $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, $P_0^{(1)}$, представляющие собой интегралы от распределения $Y_1^{(1)}$ по соответствующим подобластям.

Определим величины этих вероятностей. Учитывая, что распределение $Y_1^{(1)}$ при наличии сигнала $s_1(t)$ имеет вид $w^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-q)^2}{2}\right)$, а при его отсутствии $w^{(0)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$, получаем

$$P_1^{(1)}(q, h) = P_2^{(2)}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty \exp\left(-\frac{(z-q)^2}{2}\right) dz = \Phi(q-h), \quad h > 0. \quad (15)$$

$$P_0^{(0)}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^h \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 2\Phi(h) - 1, \quad (16)$$

$$P_0^{(1)}(q, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^h \exp\left(-\frac{(z-q)^2}{2}\right) dz = \Phi(q+h) - \Phi(q-h). \quad (17)$$

Используя полученные условные характеристики (15)–(17) и подставляя их в (9)–(12) получаем окончательные характеристики многоальтернативного различения–обнаружения

$$\alpha^{(0)} = 1 - P_0^{(0)} = 2[1 - \Phi(h)], \quad \bar{\beta} = 2p[\Phi(q+h) - \Phi(q-h)],$$

$$\bar{D} = 2p[1 - \Phi(q+h) + \Phi(q-h)], \quad \bar{P}_e = 2p[1 - \Phi(q+h)].$$

Для сравнения приведем характеристики при бинарном обнаружении (гипотезы H_0 , H_1) и бинарном различении (гипотезы H_2 , H_1).

Гипотезы H_0 , H_1 : $\alpha = 1 - \Phi(h)$, $\beta = 1 - \Phi(q-h)$, $D = \Phi(q-h)$.

Гипотезы H_2 , H_1 : $P_e = 1 - \Phi(q)$. Здесь полагается $p_1 = p_2 = 0.5$.

На основе приведенных формул были выполнены расчеты характеристик для проверки следующих гипотез (H_0 , H_1 , H_2), (H_1 , H_2), (H_0 , H_1). Априорная вероятность гипотезы H_0 равна $p_0 = 0.1$. Вероятность ложной тревоги $\alpha = 0.1$. На рис. 2 сплошной линией дана безусловная вероятность правильного различения для трех гипотез (H_0 , H_1 , H_2), а штриховой линией вероятность правильного различения для двух гипотез (H_1 , H_2). Как следует из расчетов, добавление H_0 к числу гипотез о сигнале приводит к увеличению числа ошибочных решений в полной группе событий. Поэтому доля безусловной вероятности $2pP_1^{(1)}(q, h)$ правильного различения при проверке гипотез (H_0 , H_1 , H_2) уменьшается по сравнению с аналогичной вероятностью при проверке гипотез (H_1 , H_2).

На рис. 3 приведены теоретические экспериментальные кривые безусловной вероятности пропуска сигнала: сплошной линией для трех гипотез (H_0 , H_1 , H_2), штриховой линией — для задачи бинарного обнаружения (гипотезы H_0 , H_1). В случае трех гипотез число ошибочных

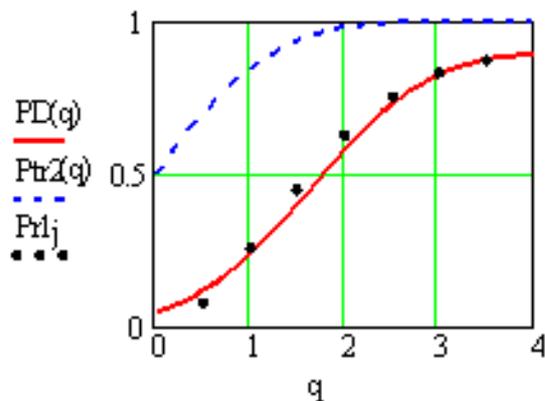


Рис. 2.

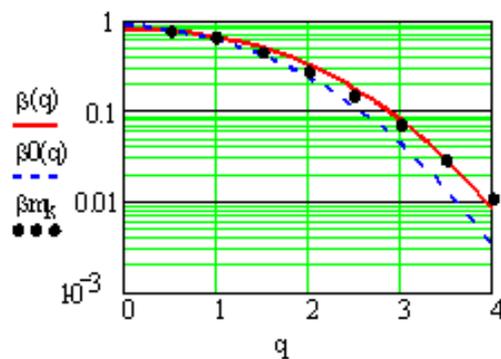


Рис. 3.

решений больше, чем при бинарном обнаружении. Поэтому вероятность пропуска увеличивается. Результаты статистического моделирования безусловной вероятности правильного различения и пропуска сигнала при объеме выборки $n = 10^3 - 2 \cdot 10^3$ показано точками на рис. 2, 3.

2.2. Пространство решений и характеристики процедуры обнаружения-различения для ФМ-4

Приемное устройство для модуляции ФМ-4 формирует четыре статистики (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) в соответствии с числом возможных сигналов. При эквидистантном расположении созвездия сигналов с фазами $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$ статистики (Y_1, Y_3) и (Y_2, Y_4) жестко коррелированы, поскольку $s_1(t) = -s_3(t)$, $s_2(t) = -s_4(t)$. Пары (Y_1, Y_2) и (Y_3, Y_4) являются независимыми гауссовскими величинами вследствие ортогональности пар сигналов $(s_1(t), s_2(t)) = 0$, $(s_3(t), s_4(t)) = 0$. Таким образом, из четырех статистик независимой можно считать только одну пару, например (Y_1, Y_2) . Поэтому координатные оси пространства решений можно привязать к этой паре. Пространство решений γ_j , $j = 0..4$ состоит из пяти подобластей. На рис. 4 приведена схема разбиения пространства решений в соответствии с решающими правилами (7), (8).

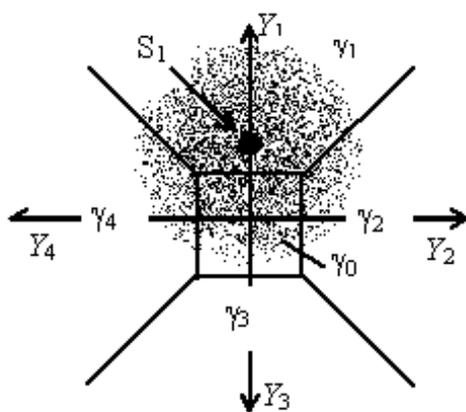


Рис. 4.

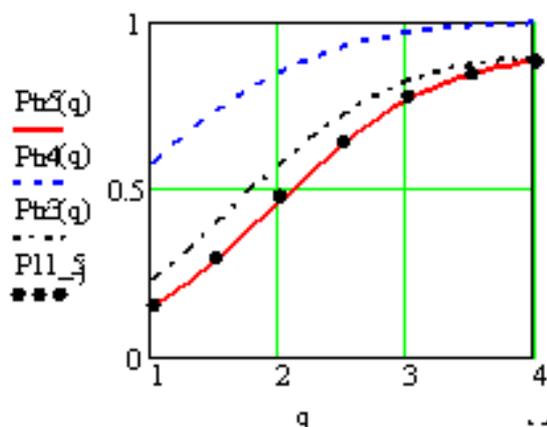


Рис. 5.

На этом рисунке точками обозначены пары статистик (Y_1, Y_2) в предположении, что присутствует сигнал $s_1(t)$. Исходя из разбиения пространства и условия привязки координат

натных осей к паре статистик (Y_1, Y_2) , можно определить условные вероятности решений следующим образом $P_1^{(1)}(q, h) = P(Y_1 > h \cap Y_1 > |Y_2|)$, $P_0^{(1)}(q, h) = P(|Y_1| < h \cap |Y_2| < h)$, $P_0^{(0)}(q, h) = P(|Y_{1,0}| < h \cap |Y_2| < h)$.

Здесь $Y_{1,0} \equiv Y_1(q=0)$ — статистика Y_1 при $s_1(t) = 0$. Основываясь на таблице 1 и симметрии задачи, нетрудно определить остальные условные вероятности.

При наличии входного сигнала $s_1(t)$ вектор $(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)})$ имеет совместное условное распределение

$$W(z_1^{(1)})W(z_2^{(1)}) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(z_1^{(1)} - q)^2 + (z_2^{(1)})^2}{2} \right\}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (10)–(12) получаем условные характеристики многоальтернативного обнаружения-различения:

$$P_1^{(1)}(q, h) = \int_h^\infty W(z_1^{(1)}) dz_1^{(1)} \int_{-z_1^{(1)}}^{z_1^{(1)}} W(z_2^{(1)}) dz_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty \exp \left(-\frac{(t-q)^2}{2} \right) (2\Phi(t) - 1) dt. \quad (19)$$

$$P_0^{(1)}(q, h) = \left[(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-h}^h \exp(-x^2/2) dx \right] \left[(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-h}^h \exp(-(x-q)^2/2) dx \right] = [2\Phi(h) - 1] [\Phi(q+h) - \Phi(q-h)]. \quad (20)$$

$$P_0^{(0)}(h) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-h}^h \exp(-(z_1^{(1)})^2/2) dz_1^{(1)} \cdot (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-h}^h \exp(-(z_2^{(1)})^2/2) dz_2^{(1)} = [2\Phi(h) - 1]^2.$$

Тогда условная ложная тревога $\alpha = 1 - P_0^{(0)}(h) = 1 - [2\Phi(h) - 1]^2 = 4\Phi(h)(1 - \Phi(h))$.

Данные условные вероятности позволяют получить все безусловные характеристики многоальтернативного обнаружения-различения для ФМ-4. Они имеют следующий вид.

Безусловная вероятность пропуска любых сигналов

$$\bar{\beta} = MpP_0^{(1)} = 4p [2\Phi(h) - 1] [\Phi(q+h) - \Phi(q-h)].$$

Безусловная вероятность принять решение в пользу любого сигнала

$$\bar{D} - Mp \left[1 - P_0^{(1)} \right] = 4p \{ 1 - [2\Phi(h) - 1] [\Phi(q+h) - \Phi(q-h)] \}$$

Безусловная вероятность ошибки различения сигналов

$$\bar{P}_e = \bar{D} - \sum_{j=1}^M p_j P_j^{(j)} = 4p \left[1 - P_1^{(1)} - P_0^{(1)} \right].$$

Проведем исследования полученных соотношений. На рис. 5 приведены расчеты общей безусловной вероятности правильного различения для следующих случаев. Сплошная линия рассчитана с использованием формулы (19) для случая анализа гипотез $(H_0, H_1 \dots H_4)$ при значениях $Mp = 0.9$, $h = 1.95$. Данный порог соответствует $\alpha_0 = 0.1$. Штриховой линией — суммарная вероятность правильного различения для ФМ-4 без учета гипотезы H_0 , штрих — пунктирной линией суммарная вероятность правильного различения при проверке трех гипотез (H_0, H_1, H_2) . Здесь же точками приведены результаты статистического моделирования при объеме выборки $n = 1000$. Как следует из графиков на рис. 5, увеличение числа гипотез для обнаружения-различения сигналов с ФМ-4 приводит к уменьшению вероятности

правильного различения. Для других вероятностей правильных и неправильных решений также наблюдается хорошее совпадение теоретических и экспериментальных характеристик с точностью до среднеквадратической погрешности $\sigma_P = \sqrt{P(1-P)/n}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе исследовано совместное обнаружение-различение M сигналов. Введен расширенный набор характеристик для описания вероятностей правильных и неправильных решений. Предложена геометрическая интерпретация областей принятия решений при многоальтернативном обнаружении сигналов с ФМ-2 и ФМ-4. Для этих видов сигналов получены характеристики обнаружения-различения, не требующие работы с многомерным вырожденным распределением. Предложенная методика геометрического и вероятностного анализа принятия решений может быть обобщена на случай многопозиционной модуляции с $M > 4$. Реализован подход к статистическому моделированию решающих правил, обеспечивающий формирование невырожденных статистик. Результаты статистического моделирования совпадают с теоретическими формулами, определяющими вероятности решений при проверке гипотез. Полученные результаты обобщают известные характеристики отдельного обнаружения и различения для таких созвездий сигналов [5, 6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миддлтон, Д. Введение в статистическую теорию связи. Т. 2 / Д. Миддлтон; пер. с англ. Б. А. Смиренина; под ред. Б. Р. Левина. — М. : Сов. радио, 1961. — 613 с.
2. Радченко, Ю. С. Обнаружение-различение сигналов в асинхронных системах связи при наличии замираний / Ю. С. Радченко, Т. А. Радченко // Радиотехника и электроника. — 2003. — № 5. — С. 578–583.
3. Радченко, Ю. С. Характеристики различения системы сигналов с вырожденной корреляционной матрицей / Ю. С. Радченко, М. С. Кондаков / Доклады АН ВШ РФ. — 2014. — № 2–3. — С. 91–99.
4. Харин, Ю. С. Основы имитационного и статистического моделирования : учеб. пособие для вузов / Ю. С. Харин, В. И. Малюгин. — Минск : Дизайн ПРО, 1997. — 288 с.
5. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986. — 264 с.
6. Semianalytic BER for PSK / M. Core, R. Campbell, P. Quan, J. Wada // IEEE TRANS. ON WIRELESS COMM. — 2009. — V. 8, № 4. — P. 1644–1648.
7. Прокис, Дж. Цифровая связь / Дж. Прокис. пер. с англ. под ред. Д. Д. Кловского, 2000. — 800 с.

REFERENCES

1. Middleton D. An introduction to statistical communication theory. [Middleton D. Vvedenie v statisticheskuyu teoriyu svyazi]. Moscow, 1961, 613 p.
2. Radchenko Yu.S., Radchenko T.A. Detection-recognition of signals in asynchronous communication systems in presence of fading. [Radchenko Yu.S., Radchenko T.A. Obnaruzhenie-razlichenie signalov v asinxronnyx sistemax svyazi pri nalichii zamiraniy]. *Radiotekhnika i elektronika — Journal of Communications Technology and Electronics*, 2003, vol. 5, pp. 578–583.
3. Radchenko Yu.S., Kondakov M.S. Distinguishing characteristics of signal systems with singular correlation matrix. [Radchenko Yu.S., Kondakov M.S. Karakteristiki razlicheniya sistemy signalov s vyrozhdennoj korrelyacionnoj matricej]. *Doklady AN VSh RF — Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, vol. 2–3, pp. 91–99.
4. Harin Yu.S., Malyugin V.I. Basics of simulation and statistical modeling: textbook for high school. [Harin Yu.S., Malyugin V.I. Osnovy imitatsionnogo i statisticheskogo modelirovaniya: ucheb.

posobie dlya vuzov]. Minsk, Design PRO, 1997, 288 p.

5. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Joint recognition of signals and estimation of their parameters under interference conditions. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh]. Moscow, 1986, 264 p.

6. Core M., Campbel R., Quan P., Wada J. Semianalytic BER for PSK. IEEE TRANS. ON WIRELESS COMM., 2009, vol. 8, no. 4, pp. 1644–1648.

7. Proakis J.G. Digital Communications. [Prokis Dzh. Cifrovaya svyaz']. 2000, 800 p.

Радченко Юрий Степанович, д.ф.м.н., профессор кафедры радиофизики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия

E-mail: ysradchenko@yandex.ru

Тел.: +7(473)220-89-16

Radchenko Y.S., doctor of science (Phys.-Math.), professor of radio physics department, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: ysradchenko@yandex.ru

Tel.: +7(473)220-89-16

Кондаков Михаил Сергеевич, аспирант кафедры радиофизики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия

E-mail: ppkms@yandex.ru

Тел.: +7(473)220-89-16

Kondakov M.S., postgraduated student, department of radio physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: ppkms@yandex.ru

Tel.: +7(473)220-89-16