

## МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ\*

М. Е. Семенов<sup>1,2,3</sup>, З. Хатиф<sup>3</sup>, О. О. Решетова<sup>2</sup>,  
А. А. Демчук<sup>1</sup>, П. А. Мелешенко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> — ВУНЦ ВВС “ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”

<sup>2</sup> — Воронежский государственный университет,

<sup>3</sup> — Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 01.12.2015 г.

**Аннотация.** В работе изучается математическая модель стабилизации перевернутого маятника с вертикально осциллирующим основанием, управляющим воздействием на который является выход гистерезисного преобразователя — люфта. Найдены критерии устойчивости для линеаризованного уравнения движения маятника, формулируемые в терминах ограничений на физические параметры системы. Построены двумерные проекции зон устойчивости трехмерного пространства параметров. Получены зависимости между начальными условиями и параметрами управления, обеспечивающие периодические колебания маятника. Построены области начальных значений в фазовом пространстве, соответствующие периодическим решениям.

**Ключевые слова:** перевернутый маятник, гистерезисная нелинейность, люфт, устойчивость, периодические решения.

## THE MODEL OF THE DYNAMICS WITH THE INVERTED PENDULUM HYSTERETIC CONTROL

M. E. Semenov, Z. Hatif, O. O. Reshetova, A. A. Demchuk, P. A. Meleshenko

**Abstract.** The article deals with mathematical model of the stabilization of the inverted pendulum with vertically oscillating base and hysteretic control. Sustainability criteria for the linearized equations was found of motion of the pendulum. Two-dimensional projection of stability zones also presented. The dependencies between the initial conditions and control parameters, providing to a periodic oscillation of the pendulum presented in article. The areas of the initial values in the phase space, corresponding to periodic solutions were defined.

**Keywords:** inverted pendulum, hysteresis nonlinearity, backlash, stability, periodic solutions.

### ВВЕДЕНИЕ

Модель перевернутого маятника с осциллирующей нижней точкой подвеса (рис. 1.) была впервые детально изучена П. Л. Капицей [1, 2]. Уравнение динамики маятника единичной массы имеет вид:

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{l}(g + \ddot{f}(t)) \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — угол отклонения маятника от вертикали,  $l$  — длина маятника,  $g$  — ускорение свободного падения,  $f(t)$  — закон движения подвеса.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-08-00312)

© Семенов М. Е., Хатиф З., Решетова О. О., Демчук А. А., Мелешенко П. А., 2016

В 1951 г. Капицей было дано физическое объяснение динамической стабилизации и оценка снизу частоты вибрации, при которой верхнее положение становится устойчивым.

При движении нижней точки подвеса по гармоническому закону уравнение (1) сводится к хорошо известному уравнению Матье [3].

Для адекватного описания динамики реальных физических и механических систем необходимо учитывать эффекты гистерезисной природы - люфты, упоры [4]. Математические модели этих нелинейностей, следуя классическим схемам М. А. Красносельского и А. В. Покровского [5] сводятся к операторам, трактуемым как преобразователи, действующие в соответствующих функциональных пространствах, динамика которых описывается соотношением: вход-состояние и состояние-выход.

В настоящей работе исследуется перевернутый маятник, управляющим воздействием, на который является выход гистерезисного преобразователя - люфта.

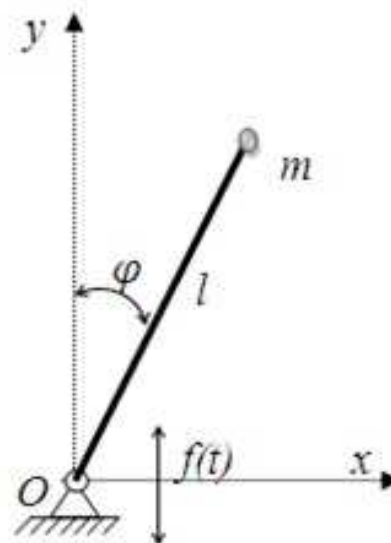


Рис. 1. Модель вертикального маятника с осциллирующим подвесом.

### МОДЕЛЬ МАЯТНИКА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ И ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Ниже рассматривается система, в которой основанием маятника является физическая система (P, S), образованная из цилиндра длины H и поршня P, которые могут перемещаться в направлении вертикальной оси, и расположены так, как показано на рис. 2.

Положение поршня будем определять координатой  $f(t)$ , а положение цилиндра – координатой  $v(t)$ . Будем считать P ведущим звеном системы, а цилиндр S ведомым. Тогда систему (P, S) можно рассматривать как преобразователь  $\Gamma$  с входным сигналом  $f(t)$  – переменным положением поршня и выходным сигналом  $v(t)$  – переменным положением цилиндра. Такой преобразователь называют *люфтом*. Множеством его возможных состояний является полоса  $f \leq v \leq f + H$  ( $-\infty < f < \infty$ ). Переменное положение  $v(t)$  цилиндра определяется равенством  $v(t) = \Gamma [t_0, v(t_0)] f(t)$  ( $t > t_0$ ), где  $\Gamma [t_0, v(t_0)]$  – оператор, определенный при каждом  $v_0 = v(t_0)$  на множестве всех непрерывных входов  $f(t)$  ( $t > t_0$ ), для которых  $v_0 - H < f(t_0) < v_0$  [5].

Будем считать, что поршень осуществляет движение так, что его ускорение периодически с частотой  $\omega$  меняется с  $-\omega^2$  на  $\omega^2$ . Это соответствует тому, что линеаризованное уравнение движения вертикального маятника с описанным выше подвесом будет иметь вид:

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{l} (g + a\omega^2 G(t, H)w(t)) \varphi = 0,$$

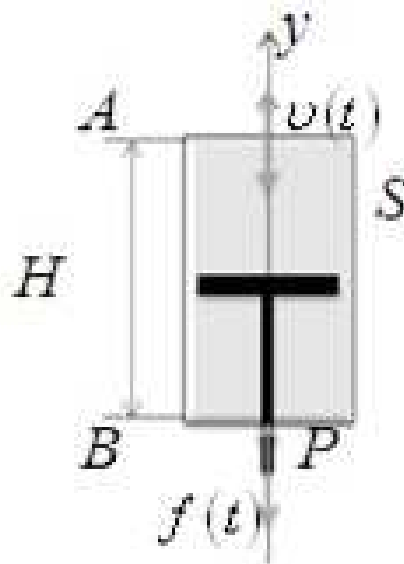


Рис. 2. Цилиндр в основании маятника.

$$w(t) = -\text{sign}(\sin(\omega t)), \quad (2)$$

$$\varphi(0) = \varphi_{10}\dot{\varphi}(0) = \varphi_{20}.$$

где  $w(t)$  — ускорение поршня,  $G(t, H)w(t)$  — ускорение основания маятника, а

$$G(t, H) = \begin{cases} 0, & t \in (t^*, t^* + \Delta t), \\ 1, & t \notin (t^*, t^* + \Delta t), \end{cases}$$

где  $t^*$  — моменты времени, после которых ускорение меняет знак  $w(t^*)w(t^* + h) < 0$ ,  $\Delta t = \sqrt{\frac{2H}{a\omega^2}}$  — время, затрачиваемое поршнем на прохождение цилиндра.

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

Перейдем к безразмерным единицам, сделав в (2) следующую замену:

$$\tau = \omega t, \quad k = \frac{g}{l\omega^2}, \quad s = \frac{a}{l}, \quad \Delta\tau = \sqrt{\frac{2H}{sl}}.$$

В результате получим уравнение аналогичное уравнению Мейсснера [3], но с отрицательными коэффициентами и гистерезисной нелинейностью:

$$\ddot{x} - (k - sG(\tau, H)\text{sign}(\sin \tau))x = 0,$$

$$G(\tau, H) = \begin{cases} 0, & \tau \in (\tau^*, \tau^* + \Delta\tau), \\ 1, & \tau \notin (\tau^*, \tau^* + \Delta\tau), \end{cases} \quad (3)$$

$$x(0) = x_{10}, \dot{x}(0) = x_{20}.$$

Запишем уравнение (3) в виде эквивалентной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = p(\tau)x_1, \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}.$$

Ее матрица имеет вид

$$\mathbf{P}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

где  $p(\tau) = k - sG(\tau, H)\text{sign}(\sin \tau)$ .

Ввиду сделанных предположений матрица  $\mathbf{P}(\tau)$ , является периодической функцией времени с периодом  $2\pi$ , так что для любого момента времени  $\tau$  справедливо равенство  $\mathbf{P}(\tau + 2\pi) \equiv \mathbf{P}(\tau)$ .

Будем говорить, что уравнение (3) устойчиво или неустойчиво по Лагранжу, если устойчива или, соответственно, неустойчива система (4). Т.е. все решения  $x(\tau)$  устойчивого уравнения (3) ограничены на  $[\tau_0, \infty)$  вместе с их производными  $\dot{x}(\tau)$ .

Из результатов Флоке [6] следует, что задача исследования устойчивости для такого рода систем сводится к нахождению фундаментальной матрицы решений в момент  $2\pi$  — *матрицы монодромии* и оценке ее собственных значений, называемых *мультипликаторами*. Для устойчивости периодической системы необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы ее находились внутри единичного круга  $|\rho| < 1$ .

В силу того, что матрица  $\mathbf{P}(\tau)$  кусочно-постоянная, то фундаментальная система решений и, следовательно, матрица монодромии могут быть построены в замкнутом виде. Для этого

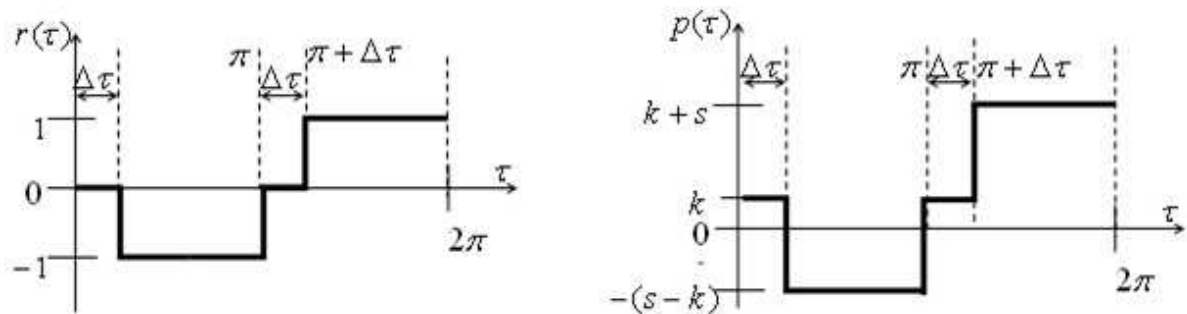


Рис. 3. Графики функций  $f(\tau)$  и  $p(\tau)$ .

рассмотрим поведение кусочно-постоянной функции  $r(\tau) = -G(\tau, H) \text{sign}(\sin(\tau))$  с периодом  $2\pi$  и соответственно  $p(\tau)$  (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что система (4) на промежутке  $(0, 2\pi)$  может быть описана 4-мя линейными системами с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_2^1, \\ \dot{x}_2^1 = kx_1^1, \tau \in [0, \Delta\tau], \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1^2 = x_2^2, \\ \dot{x}_2^2 = -(s-k)x_1^2, \tau \in [\Delta\tau, \pi], \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3, \\ \dot{x}_2^3 = kx_1^3, \tau \in [\pi, \pi + \Delta\tau], \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} \dot{x}_1^4 = x_2^4, \\ \dot{x}_2^4 = (k+s)x_1^4, \tau \in [\pi + \Delta\tau, 2\pi], \end{cases} \quad (8)$$

Так как фундаментальная матрица должна быть непрерывна, то решения систем (5)–(8) должны совпадать в соответствующих точках:

$$\mathbf{X}^1(0) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{X}^i(\tau_i^*) = \mathbf{X}^{i+1}(\tau_i^*),$$

где  $i = 1, 2, 3$ ,  $\tau_i^*$  — моменты перемены управления на периоде,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

Последовательно интегрируя системы (5)–(8), найдем фундаментальные матрицы решений:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^1(\tau) &= \begin{pmatrix} \text{ch}(\sqrt{k}\tau) & \frac{1}{\sqrt{ksh}}(\sqrt{k}\tau) \\ \sqrt{ksh}(\sqrt{k}\tau) & \text{ch}(\sqrt{k}\tau) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}^2(\tau) &= \mathbf{X}^1(\Delta\tau) \begin{pmatrix} \cos(k_2(\tau - \Delta\tau)) & \frac{1}{k_2 \sin}(k_2(\tau - \Delta\tau)) \\ -k_2 \sin(k_2(\tau - \Delta\tau)) & \cos(k_2(\tau - \Delta\tau)) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}^3(\tau) &= \mathbf{X}^2(\pi) \begin{pmatrix} \text{ch}(\sqrt{k}(\tau - \pi)) & \frac{1}{\sqrt{ksh}}(\sqrt{k}(\tau - \pi)) \\ \sqrt{ksh}(\sqrt{k}(\tau - \pi)) & \text{ch}(\sqrt{k}(\tau - \pi)) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}^4(\tau) &= \mathbf{X}^3(\pi + \Delta\tau) \begin{pmatrix} \text{ch}(k_1(\tau - \pi)) & \frac{1}{k_1 sh}(k_1(\tau - \pi)) \\ k_1 sh(k_1(\tau - \pi)) & \text{ch}(k_1(\tau - \pi)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда полагая в  $\mathbf{X}^4(\tau)$   $\tau = 2\pi$ , получим матрицу монодромии системы (4) в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{X}(2\pi) &= \begin{pmatrix} \text{ch}(\sqrt{k}\Delta\tau) & \frac{1}{\sqrt{ksh}}(\sqrt{k}\Delta\tau) \\ \sqrt{ksh}(\sqrt{k}\Delta\tau) & \text{ch}(\sqrt{k}\Delta\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(k_2\gamma) & \frac{1}{k_2 \sin}(k_2\gamma) \\ -k_2 \sin(k_2\gamma) & \cos(k_2\gamma) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \text{ch}(\sqrt{k}\Delta\tau) & \frac{1}{\sqrt{ksh}}(\sqrt{k}\Delta\tau) \\ \sqrt{ksh}(\sqrt{k}\Delta\tau) & \text{ch}(\sqrt{k}\Delta\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(k_1\gamma) & \frac{1}{k_1 sh}(k_1\gamma) \\ k_1 sh(k_1\gamma) & \text{ch}(k_1\gamma) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k_1^2 = k + s$  и  $k_2^2 = s - k$ , т.к.  $s > k$ ,  $\gamma = \pi - \Delta\tau$ .

Составим для нее характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{A} - \rho \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0, \quad (10)$$

где  $\beta = (-1)^2 e^{\int_0^T \text{Sp}(\mathbf{P}(\tau)) d\tau} = 1$  [7], а  $\alpha = -(a_{11} + a_{22})$ .

Согласно формуле Виета произведение корней  $\rho_1$  и  $\rho_2$  уравнения (10) равно единице, поэтому движение будет устойчиво только при  $|\alpha| < 2$ , когда модули обоих мультипликаторов равны единице, а сами они различны. Таким образом, получаем следующее условие устойчивости решений уравнения (3):

$$|a_{11} + a_{22}| < 2. \quad (11)$$

С учетом (9) условие (11) эквивалентно

$$\begin{aligned} & \left| \left( 2ch(2\sqrt{k}\Delta\tau) ch(k_1\gamma) + \left( \frac{\sqrt{k}}{k_1} + \frac{k_1}{\sqrt{k}} \right) sh(2\sqrt{k}\Delta\tau) sh(k_1\gamma) \right) \cos(k_2\gamma) + \right. \\ & \left( \left( \frac{\sqrt{k}}{k_2} - \frac{k_2}{\sqrt{k}} \right) sh(2\sqrt{k}\Delta\tau) ch(k_1\gamma) + \left( \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} \right) ch^2(\sqrt{k}\Delta\tau) sh(k_1\gamma) + \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{k}{k_2 k_1} - \frac{k_1 k_2}{k} \right) sh^2(\sqrt{k}\Delta\tau) sh(k_1\gamma) \right) \sin(k_2\gamma) \right| < 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, область устойчивости системы (4) в пространстве ее параметров, определяется неравенством (12).

## ПОСТРОЕНИЕ ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим уравнение (3) при  $H = 0$ , т.е. без гистерезисной нелинейности

$$\ddot{x} - (k + s(-\text{sign}(\sin \tau))) = 0, \quad (12)$$

тогда  $\Delta\tau = 0$  и неравенство (12) принимает вид:

$$\left| ch(k_1\pi) \cos(k_2\pi) + \frac{1}{2} \left( \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} \right) sh(k_1\pi) \sin(k_2\pi) \right| < 1, \quad (13)$$

Численно построим решение неравенства (13) относительно параметров  $k$  и  $s$  (рис. 4а). На рисунке 4б приведены зоны устойчивости для уравнения Мейсснера, полученного Chikara Sato [8].

Эти диаграммы являются зеркальным отражением друг друга, в силу противоположности знаков коэффициентов при  $x$  в соответствующих уравнениях.

Построим область устойчивости для системы (9). Пространство ее параметров трехмерно, т.к. она зависит от безразмерных величин  $k$  и  $s$  и длины поршня  $H$ . Положим длину маятника  $l = 1\text{м}$ .

Из рисунка 5 видно, что область устойчивости с ростом  $H$  не уменьшается, а меняется форма границ диаграммы.

Заметим, что в рассматриваемой задаче  $k$  и  $s$  могут принимать только положительные значения, причем непосредственно в окрестности нулевой точки  $k = s = 0$ , так как колебания точки подвеса осуществляется с малой амплитудой  $a$  и большой частотой осцилляций  $\omega$ , относительно собственной частоты колебаний маятника  $\omega_0$ . Изменение области устойчивости только в положительной полуплоскости показано на следующем рисунке.

На рисунке 7 видно, как с увеличением параметра  $H$  поднимается нижняя граница области устойчивости.

Зоны устойчивости в пространстве исходных параметров уравнения (2) приведены на рисунке 8.

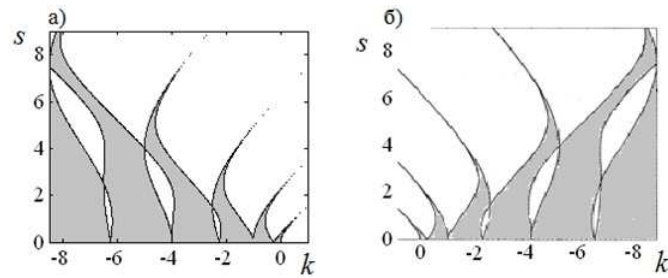


Рис. 4. Диаграмма устойчивости а) для (12) и б) для уравнения Мейсснера.

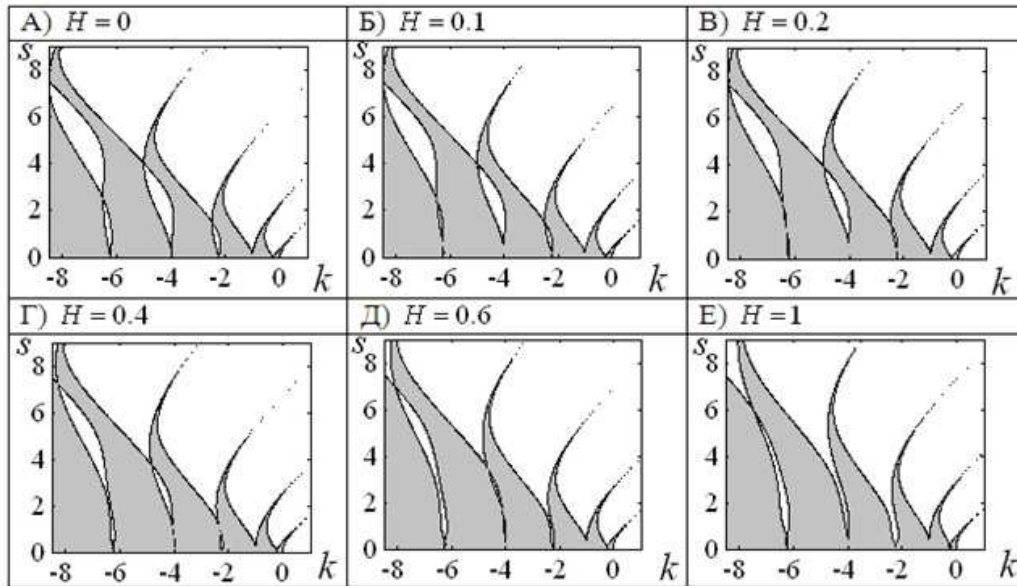


Рис. 5. Диаграммы устойчивости при различных длинах поршня  $H$ .

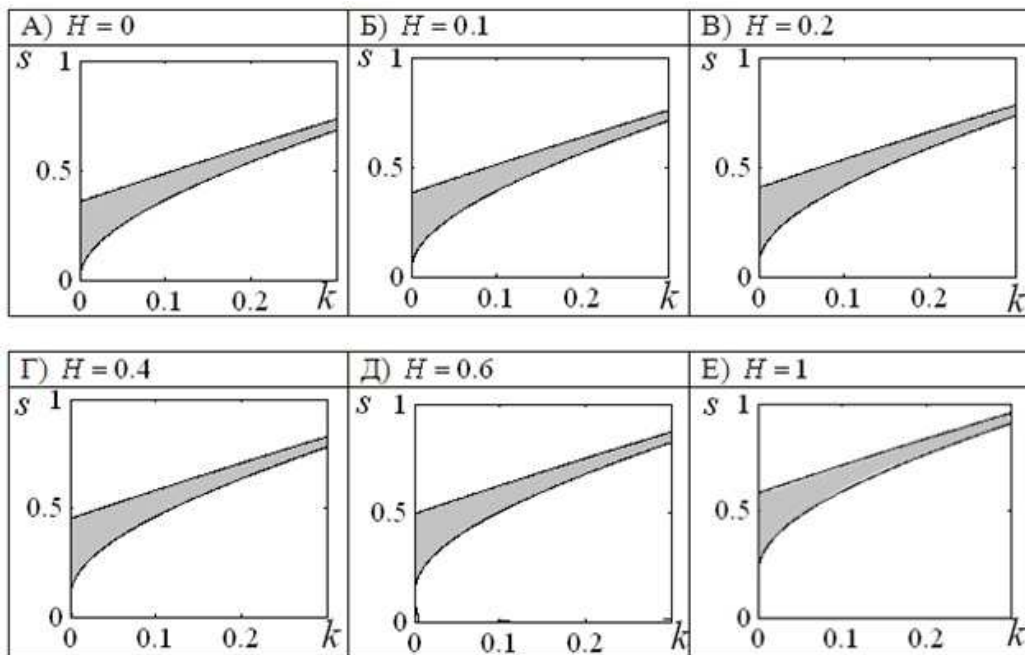


Рис. 6. Диаграмма в положительной полуплоскости при различных  $H$ .

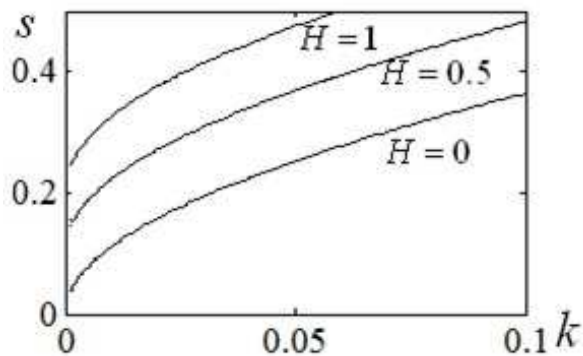


Рис. 7. Нижняя граница области устойчивости при различных  $H$ .

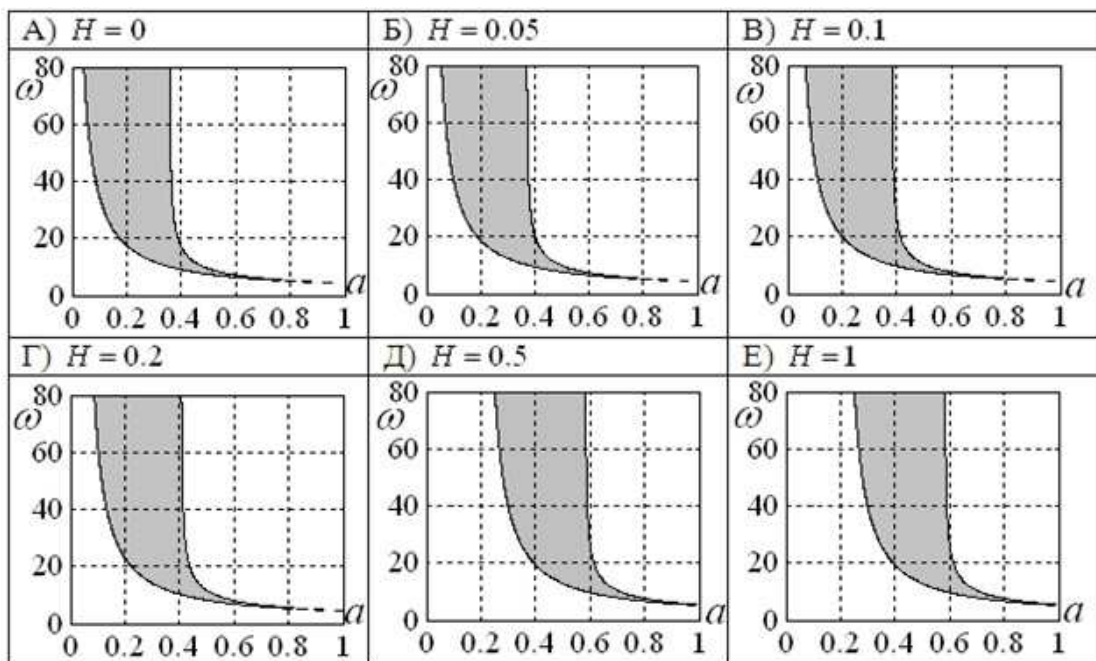


Рис. 8. Графики областей устойчивости при различных длинах поршня  $H$ .

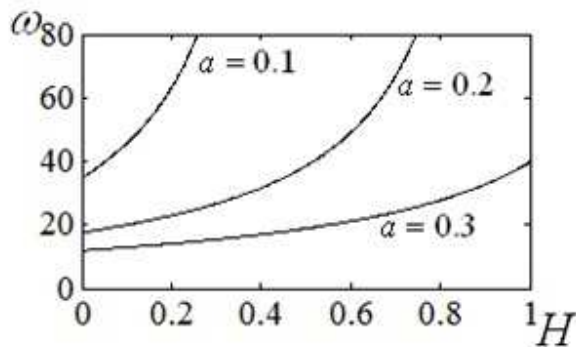


Рис. 9. Графики зависимости параметров  $\omega$  и  $H$  при различных  $\alpha$ .

Из рисунка 8 видно, что площадь областей устойчивости принципиально не изменяется с увеличением длины поршня  $H$ , а лишь смещается правее по оси  $a$ , т.е. при любом  $H \in [0,1]$  найдется такая пара значений для  $a$  и  $\omega$  обеспечивающих устойчивость вертикального положения перевернутого маятника с осциллирующим подвесом и гистерезисной нелинейностью.

Это хорошо видно и на рисунке 9, где построены графики изменения минимально возможной частоты колебаний, обеспечивающей устойчивость решений уравнения (6) в зависимости от длины поршня  $H$  при различных значениях амплитуды колебаний.

Так же из рисунка 9 видно, что даже при больших значениях  $H$  можно стабилизировать вертикальное положение маятника не значительно увеличив амплитуду, при этом, сильно не увеличивая частоту колебаний. Т.е. с не большим увеличением амплитуды минимальная частота, необходимая для стабилизации значительно уменьшается, даже при увеличении расстояния цилиндра  $H$ .

Параметрам, удовлетворяющим неравенству (12), соответствуют почти периодические колебания [9] маятника относительно верхнего положения. Для подтверждения полученных результатов приведем графики характеристик колебания линеаризованной модели вертикального маятника длиной  $l = 1\text{м}$ . с осциллирующим основанием и гистерезисной нелинейностью при  $H = 0.05\text{м}$ . (рис. 10). Амплитуду и частоту колебаний поршня определим как  $a = 0.15\text{м}$ . и  $\omega = 30\text{ Гц}$ ., а начальные условия:  $\varphi(0) = 0.2, \varphi''$ .

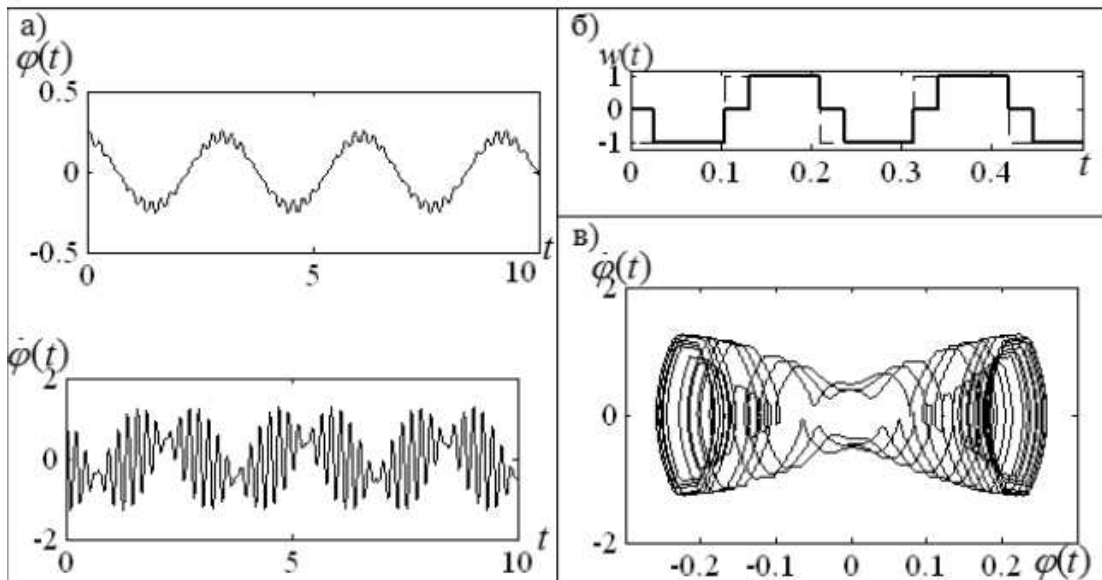


Рис. 10. а) Графики характеристик движения маятника, б) График управляющего воздействия (сплошной — с гистерезисом, прерывистый — без гистерезиса), в) Фазовая плоскость.

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

Рассмотрим поведение движения маятника при параметрах, лежащих на границах области устойчивости, что возвращаясь к характеристическому уравнению матрицы монодромии (10) относится к двум случаям, когда  $\alpha = -2$  - левая граница и  $\alpha = 2$  - правая граница. Тогда мультипликаторы будут принимать следующие значения  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  и  $\rho_1 = \rho_2 = -1$  соответственно.

Если  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , то соответствующее нормальное решение будет удовлетворять равенству  $\mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)$ , следовательно, уравнение (2) имеет периодическое решение, период которого



совпадает с периодом его коэффициентов  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Если  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ , то соответствующее нормальное решение будет удовлетворять равенству  $\mathbf{X}(t + 2\pi) = -\mathbf{X}(t)$ , а еще через один период  $\mathbf{X}(t + 4\pi) = -\mathbf{X}(t + \pi) = \mathbf{X}(t)$ . Из этого следует, что при наличии мультипликаторов равных -1 уравнение (2) имеет периодическое решение, период которого вдвое больше периода коэффициентов исходного уравнения  $T_2 = \frac{4\pi}{\omega}$ .

Будем считать, что для обеспечения периодических режимов колебания маятника, все его параметры должны удовлетворять условию:

$$a_{11} + a_{22} = 2, \text{ для периода колебаний } T_1 \quad (14)$$

$$a_{11} + a_{22} = -2, \text{ для периода колебаний } T_2 \quad (15)$$

Однако, эти условия лишь необходимые, но не достаточные, в силу того, что не для любых ненулевых начальных значений при заданном управлении с параметрами удовлетворяющими одному из этих равенств, будут существовать периодические решения.

Отметим, что для рассматриваемого здесь управления, описываемого функцией  $v(t) = -a\omega^2 G(t, H) \text{sign}(\sin(\omega t))$ , начальные условия лежат в I и III четвертях.

Положим следующее начальное условие  $(\varphi_{10}, \varphi_{20})$ , и рассмотрим случай периодических колебаний с периодом  $T_1$ , тогда должно быть справедливо равенство  $\mathbf{X}(0 + T) = \mathbf{A}\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(0)$  и

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Отсюда получаем, что начальные условия должны удовлетворять условию:

$$\varphi_{10} = \frac{a_{12}}{1 - a_{11}} \varphi_{20}, \quad \varphi_{20} = \frac{a_{21}}{1 - a_{22}} \varphi_{10}, \quad (17)$$

т. е. лежать на прямой  $z_1 : \dot{\varphi} = K_1 \varphi$ , где коэффициент

$$K_1 = \frac{1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{1 - a_{22}}. \quad (18)$$

Данное равенство обеспечивает выполнение условия (13). Если для начальных условий  $(\varphi_{10}, \varphi_{20})$  можно найти пару параметров  $a$  и  $\omega$ , лежащих на границе области устойчивости, при фиксированном  $H$ , удовлетворяющую равенству (17), то эта пара единственна. Обратное так же верно.

Аналогично получаем, что периодические решения с периодом  $T_2$  существуют для начальных условий, удовлетворяющих равенствам:

$$\varphi_{10} = -\frac{a_{12}}{1 + a_{11}} \varphi_{20}, \quad \varphi_{20} = -\frac{a_{21}}{1 + a_{22}} \varphi_{10}, \quad (19)$$

т.е. лежащих на прямой  $z_2 : \dot{\varphi} = K_2 \varphi$ , с коэффициентом

$$K_2 = -\frac{1 + a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{1 + a_{22}}. \quad (20)$$

На рисунках 11 и 12 построены периодические решения уравнения (2) с периодами  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, чьи начальные условия лежат на прямых  $\dot{\varphi} = 5\varphi$  и  $\dot{\varphi} = 10\varphi$ , а пара параметров  $a$  и  $\omega$  для каждой из них найдены из условий (18), (20) при  $H = 0.05\text{м}$ .

Анализируя зависимости начальных условий периодических решений от различных параметров управляющего воздействия, будем полагать, что амплитуда колебаний подвеса не превышает длины маятника  $l$   $a \in (0, 1]$ , так же как и длина цилиндра  $H \in [0, 1]$ , а частота колебаний  $\omega \leq 150$  Гц.

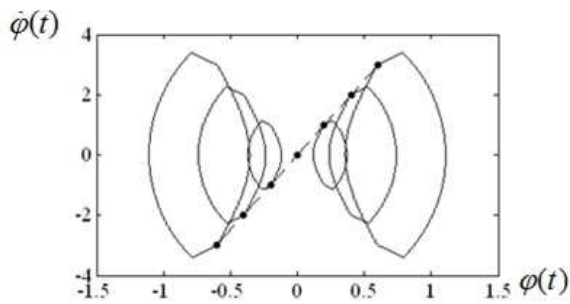


Рис. 11. Фазовый портрет решений с периодом  $2\pi/\omega$  начальные условия, которых лежат на одной прямой  $z_1 : \dot{\varphi} = 5\varphi$ .

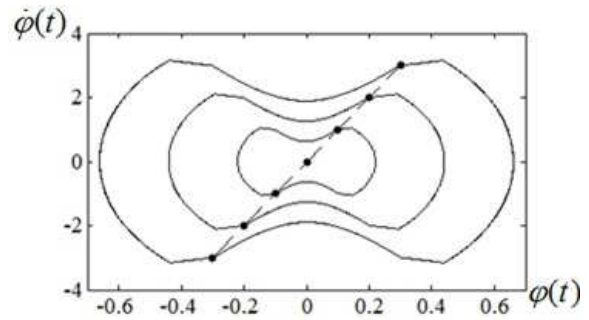


Рис. 12. Фазовый портрет решений с периодом  $4\pi/\omega$  начальные условия, которых лежат на одной прямой  $z_2 : \dot{\varphi} = 10\varphi$ .

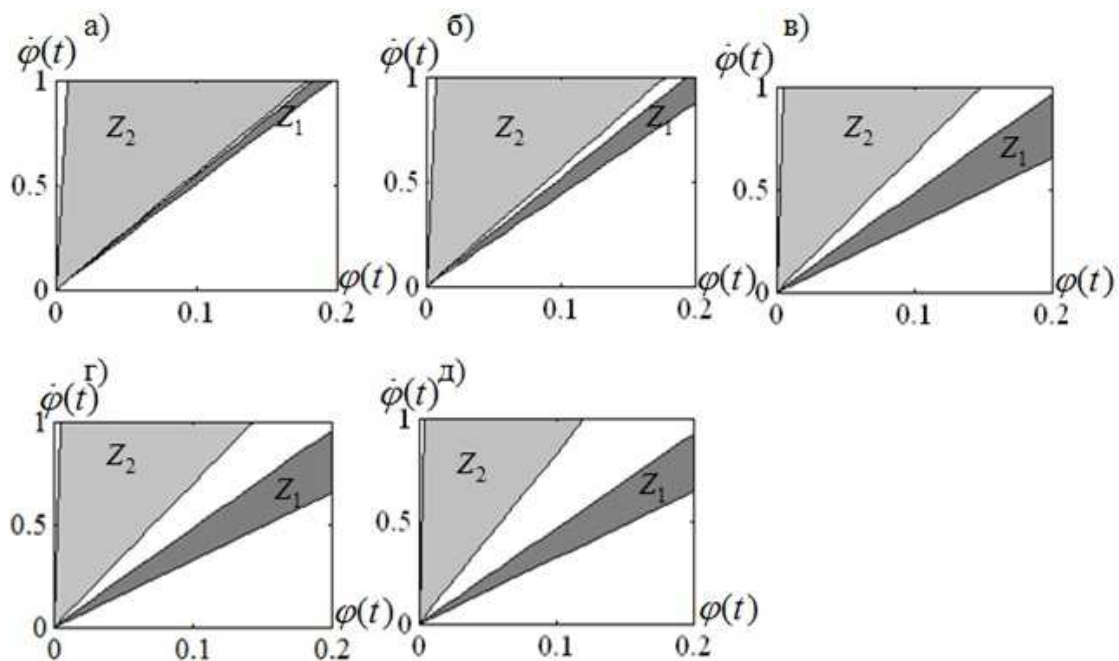


Рис. 13. Области начальных условий периодических решений при а)  $H = 0$ , б)  $H = 0.05$ , в)  $H = 0.5$ , г)  $H = 0.6$ , д)  $H = 1$ .

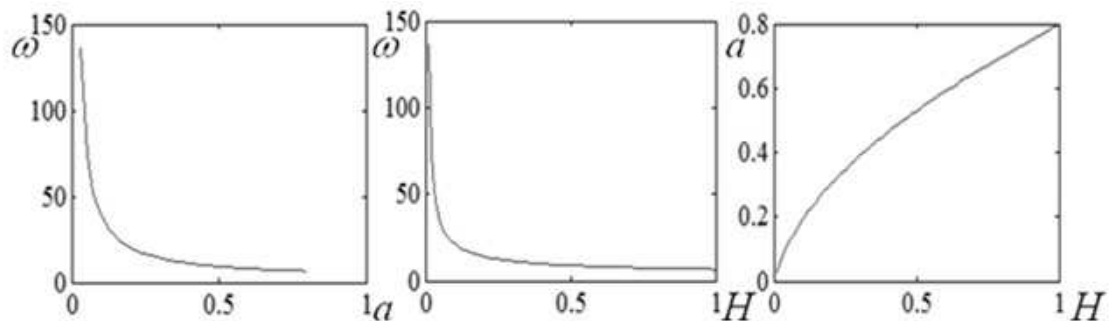


Рис. 14. Графики изменения параметров необходимых для периодических колебаний маятника для фиксированного начального условия  $(0.1, 0.44) \in Z_{1общ}$ .

В отсутствии гистерезисной нелинейности, т.е.  $H = 0$ , сектор  $Z_1$ , в котором лежат все возможные прямые  $z_1$ , очень мал (рис. 13), а с появлением люфта и ростом  $H$  на интервале  $(0,0.6]$  увеличивается, но при больших значениях раствора цилиндра  $H \in (0.6,1]$  уменьшается, хотя и не столь значительно.

Из рис. 13 видно, что не существует таких начальных условий  $(\varphi_{10}, \varphi_{20})$ , для которых можно найти периодические решения при всех  $H$ , т. к. сектор  $Z_1$  при увеличении  $H$  поворачивается по часовой стрелке, а  $Z_1|_{H=0} \cap Z_1|_{H=1} = \emptyset$ . Однако, если рассматривать, например длину цилиндра  $H \in [0.01,1]$ , причем  $Z_1|_{H=0.01} \cap Z_1|_{H=1} = Z_{1общ} \neq \emptyset$ , то прослеживается следующая тенденция: для любого фиксированного  $(\varphi_{10}, \varphi_{20}) \in Z_{1общ}$  с увеличением  $H$  частота вибраций поршня, обеспечивающая периодические колебания маятника, уменьшается, а соответствующая ей амплитуда увеличивается (Рис.14).

Для периодических решений  $T_2$  имеет место обратное утверждение: в отсутствии гистерезисной нелинейности сектор  $Z_2$ , в котором лежат все возможные прямые  $z_2$ , обладает наибольшей площадью (рис. 13), а с появлением люфта и ростом  $H$  на всем интервале  $(0,1]$  уменьшается. Причем существует достаточно большая область  $Z_{2общ} = Z_2|_{H=0} \cap Z_2|_{H=1}$ , содержащая все начальные условия  $(\varphi_{10}, \varphi_{20})$ , для которых можно найти периодические решения при всех  $H \in [0,1]$  (Рис. 15).

Численные эксперименты показали, что для любого фиксированного  $(\varphi_{10}, \varphi_{20}) \in Z_{2общ}$  с увеличением  $H$  частота вибраций поршня, обеспечивающая периодические колебания маятника, тоже уменьшается, а соответствующая ей амплитуда увеличивается (Рис.16).

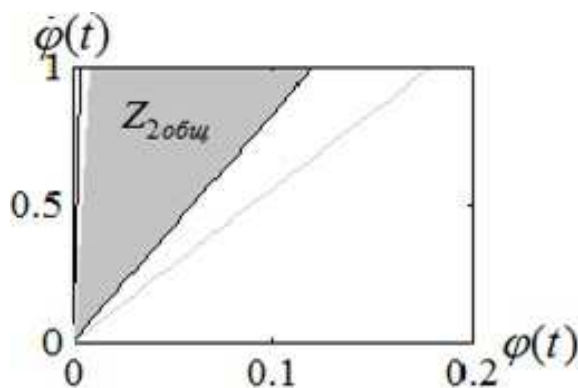


Рис. 15. Область пересечения областей  $Z_2|_{H=0}$  и  $Z_2|_{H=1}$ .

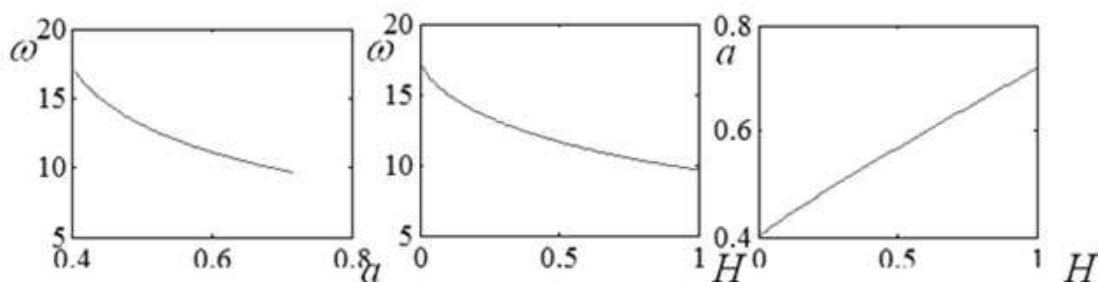


Рис. 16. Графики изменения параметров необходимых для периодических колебаний маятника для фиксированного начального условия  $(0.1,1.5) \in Z_{2общ}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении отметим, что наличие гистерезисных нелинейностей в контуре управления обратным маятником существенно влияет на его динамику: в частности, зоны устойчивости претерпевают изменения в зависимости от параметров гистерезисного звена, появляются области в пространстве параметров, которым соответствуют неустойчивые периодические режимы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капица, П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П. Л. Капица // ЖЭТФ. — 1951. — № 21. — С. 588–597.
2. Капица, П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом / П. Л. Капица // УФН. — 1951. — Т. 44. — С. 7–20.
3. Магнус, К. Колебания : Введение в исследование колебательных систем / К. Магнус; пер. с нем. В. И. Сидорова, В. В. Филатова. — М. : Мир, 1982. — 304 с.
4. Нелепин, Р. А. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р. А. Нелепина. — М. : Наука, 1979. — 447 с.
5. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 271 с.
6. Плисс, В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний / В. А. Плисс. — М. : Наука, 1964. — 367 с.
7. Меркин, Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения : Учеб. пособие для вузов / Д. Р. Меркин. — М. : Наука, 1987. — 304 с.
8. Chikara Sato Correction of stability curves in Hill-Meissner's equation // Math. Comp. — 1966. — V. 20. — P. 98–106.
9. Красносельский, М. А. Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 304 с.

## REFERENCES

1. Kapitza P.L. Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates. [Капица P.L. Dinamicheskaya ustojchivost' mayatnika pri koleblyushhejsya tochke podvesa]. *ZhE'TF — Soviet Phys. JETP*, 1951, no. 21, pp. 588–597.
2. Kapitza P.L. Pendulum with a vibrating suspension. [Капица P.L. Mayatnik s vibriruyushhim podvesom]. *Uspehi fizicheskix nauk — Physics-Uspeski*, 1951, vol. 44, pp. 7–20.
3. Magnus K. Vibrations: An Introduction to the study of oscillating systems. [Magnus K. Kolebaniya: Vvedenie v issledovanie kolebatel'nyx sistem]. Moscow: Mir, 1982, 304 p.
4. Nelepin R.A. Methods of investigating of automatic control nonlinear systems. [Nelepin R.A. Metody issledovaniya nelinejnyx sistem avtomaticheskogo upravleniya]. Moscow: Science. 1979, 447 p.
5. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with Hysteresis. [Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Sistemy s gisterezisom]. Moscow: Science, 1983, 271 p.
6. Pliss V.A. Nonlocal problems of the theory of oscillations. [Pliss V.A. Nelokal'nye problemy teorii kolebanij]. Moscow: Science, 1964, 367 p.
7. Merkin D.R. Introduction to the theory of stability of motion: Proc. The manual for schools. [Merkin D.R. Vvedenie v teoriyu ustojchivosti dvizheniya: Ucheb. posobie dlya vuzov]. Moscow: Science. 1987, 304 p.
8. Chikara Sato Correction of stability curves in Hill-Meissner's equation. *Math. Comp.*, 1966, vol. 20, pp. 98–106.

9. Krasnosel'skii M.A., Burd V.S., Kolesov Ju.S. Nonlinear Almost Periodic Oscillations. [Krasnosel'skii M.A., Burd V.S., Kolesov Ju.S. Nelinejnye pochtii periodicheskie kolebaniya]. Moscow: Science, 1970, 304 p.

Семенов Михаил Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор кафедры 11 теоретической гидрометеорологии ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", Воронеж, Россия; профессор кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия; профессор кафедры математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: mkl150@mail.ru

Semenov Mikhail E, Theoretical Hydrometeorology Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia; Digital Technologies Department, Voronezh State University, Voronezh, Russia; Mathematics Department, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Prof., senior professor, Voronezh, Russia  
E-mail: mkl150@mail.ru

Хати́ф Зайнип, аспирант кафедры высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета, Воронеж, Россия

Hatif Zaynip, Postgraduate student of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, Russia

Решетова Ольга Олеговна, магистрант кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: tribunskih1993@mail.ru

Reshetova Olga O, Graduate student of the Department of digital technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: tribunskih1993@mail.ru

Демчук Ангелина Анатольевна, к.т.н., доцент 206 кафедры ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", Воронеж, Россия

Demchuk Angelina A, Department of 206, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy; PhD, docent, Voronezh, Russia

Мелешенко Петр Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры 122 средств связи (и авиационных комплексов связи) ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", Воронеж, Россия; доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: melechrp@yandex.ru

Meleshenko Peter A, Communication Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia; Digital Technologies Department, Voronezh State University, PhD, docent, Voronezh, Russia  
E-mail: melechrp@yandex.ru