УДК 517.9

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СУЩЕСТВЕННО ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

П. В. Садчиков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.12.2015 г.

Аннотация. Данная работа посвящена разработке метода построения решения задачи Коши для одного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с существенно переменными коэффициентами на полубесконечном интервале с использованием системы символьной математики. С помощью специального интегрального преобразования в окрестности нуля однородное дифференциальное уравнение приводится к модифицированному уравнению Бесселя, которое решается на отрезке. Далее система линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения продолжается на бесконечность численными методами программного пакета «Wolfram Mathematica 7». Доказывается, что система решений является фундаментальной. После чего строятся общее решение неоднородного дифференциального уравнения и решение задачи Коши.

Ключевые слова: функции Бесселя, уравнение Бесселя, метод Рунге-Кутта, определитель Вронского.

THE METHOD OF CONSTRUCTING SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR SOME LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH ESSENTIALLY VARIABLE COEFFICIENTS ON A SEMI-INFINITE INTERVAL

P. V. Sadchikov

Abstract. This work is dedicated to the development of the method of construction of solution of the Cauchy problem for a single linear nonhomogeneous ordinary differential equation of second order with essentially variable coefficients on a semi-infinite interval, using the system of symbolic mathematics. Using a special integral transform in a neighbourhood of zero the homogeneous differential equation is reduced to the modified Bessel equation, which is solved on the interval. Further the system of linearly independent solutions of the homogeneous differential equation continues to infinity by numerical methods of software package "Wolfram Mathematica 7". It is proved that the system of solutions is fundamental. Then the general solution of the inhomogeneous differential equation and the solution of the Cauchy problem are constructed.

Keywords: Bessel function, Bessel equation, Runge-Kutta method, Vronsky determinant.

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих задач математической физики приходят к линейному дифференциальному уравнению Бесселя. К такому уравнению мы придем, например, при решении задачи о колебании круглой мембраны, о статических потенциалах, о распределении интенсивности света, дифрагированного на круглом отверстии, об остывании круглого цилиндра методом разделения переменных, если будем пользоваться цилиндрическими (или полярными) координатами. В курсах аналитической теории дифференциальных уравнений и в курсах теории специальных функций устанавливается ряд важных свойств решений этого уравнения, которые становятся незаменимыми при решении некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с существенно переменными коэффициентами.

В этой работе строится решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с существенно переменными коэффициентами на полубесконечном интервале. После специального интегрального преобразования уравнение приводится к модифицированному уравнению Бесселя. В качестве решений уравнения в окрестности нуля берутся спецфункции, т.е. функции, не выражающиеся в элементарных функциях. Решениями модифицированного уравнения Бесселя являются модифицированные функции Бесселя первого рода.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Поставим задачу нахождения ограниченного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (см. [1])

$$\alpha(t)(\alpha(t)u'(t))' + \sigma\alpha'(t)\alpha(t)u'(t) - \lambda^2 u(t) = G(t), \tag{1}$$

$$u(0) = z_0, \tag{2}$$

где σ и λ — положительные числовые параметры, $\alpha(t) \in C^3(0,\infty)$ — положительная при $0 < t < \infty$ функция, обращающаяся в нуль при $t = +0$ и стремящаяся к ∞ при $t \to \infty$, причем предполагается, что существует интеграл $d = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\alpha(t)}dt < \infty$. Сформулированным условиям удовлетворяет, например, функция $\alpha(t)$, равная $\sqrt{t}$ при $0 \leqslant t \leqslant 5$, и представляющая при $t \geqslant 5$ многочлен третьей степени, коэффициенты которого подбираются так, что в целом $\alpha(t) \in C^3(0,\infty)$. Построим в пакете “Wolfram Mathematica 7” гладкий коэффициент $\alpha(t) \in C^3(0,\infty)$ (см. [2], [3]). График функции $\alpha(t)$ изображен на рисунке 1.

В уравнении (1) проведем замену переменной $y = \varphi(t) = \int\limits_0^t \frac{ds}{\alpha(s)}$ (см. [4]). Обозначим через

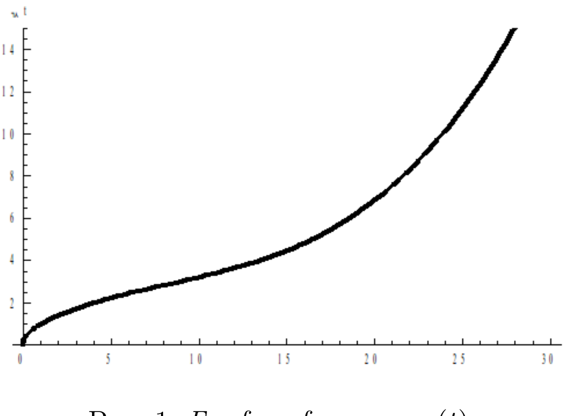

Рис. 1. *График функции* $\alpha(t)$.

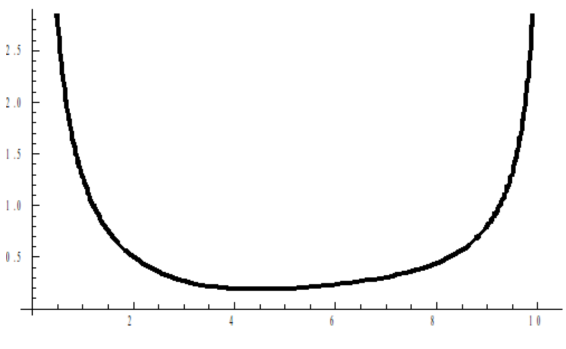

Рис. 2. *График функции* $b_1(y)$

$t = p(y)$ функцию, обратную функции $y = \varphi(t)$, и через $b_0(y)$ функцию $\alpha(t)$ при $t = p(y)$. Пусть $\nu(y) = u(p(y))$, тогда $u'(t) = v'(y)y'(t) = \frac{v'(y)}{\alpha(p(y))} = \frac{v'(y)}{b_0(y)}$. После этого исходное уравнение приобретает вид

$$v''(y) + \sigma \cdot b_1(y) \cdot v'(y) - \lambda^2 \cdot v(y) = g(y), \tag{3}$$

где $b_1(y) = \alpha'(t)$, а $g(y) = G(t)$ при $t = p(y)$. Коэффициент $b_1(y)$ показан на рисунке 2.

Здесь видно, что коэффициент $b_1(y)$ остается существенно переменным, обращаясь в бесконечность при $y \to 0$ и $y \to d$. $d = s_0 + s_1$, где $s_0 = \int\limits_0^m \frac{ds}{\alpha(s)}$, $s_1 = \int\limits_m^\infty \frac{ds}{\alpha(s)}$.

Сначала решим однородное уравнение

$$v''(y) + \sigma \cdot b_1(y) \cdot v'(y) - \lambda^2 \cdot v(y) = 0. \tag{4}$$

Построим систему линейно независимых решений на интервале (s_1, d).

Возьмем $\lambda = 1$. Проведя замену$v(y) = (\frac{1}{y})^{\frac{\sigma-1}{2}} \cdot v_0(y)$, приходим к модифицированному уравнению Бесселя (см. [5])

$$y^2 \cdot v_0''(y) + y \cdot v_0'(y) - (y^2 + \tau^2) \cdot v_0(y) = 0, \tag{5}$$

где $\tau = \frac{\sigma-1}{2}$.

Уравнение (5) имеет общее решение $v_0 = c_1 I_\tau(y) + c_2 I_{-\tau}(y)$, где $I_\tau(y)$ и $I_{-\tau}(y)$ - модифицированные функции Бесселя первого рода (функции Инфельда), причем $I_\tau(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{y}{2})^{2k+\tau}}{k!\Gamma(k+\tau+1)}$. При всех нецелых $\tau = \frac{\sigma-1}{2}$ функции $I_\tau(y)$ и $I_{-\tau}(y)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (5). Отсюда получаем два решения уравнения (4):

$$v_1 = 2^{\frac{\sigma-1}{2}} (d-y)^{\frac{1-\sigma}{2}} \Gamma(\frac{\sigma+1}{2}) I_\tau(d-y)$$

$$v_2 = 2^{-\frac{\sigma-1}{2}} (d-y)^{\frac{1-\sigma}{2}} \Gamma(\frac{3-\sigma}{2}) I_{-\tau}(d-y).$$

Построим в пакете "Wolfram Mathematica 7" график решений уравнения (4) v_1 и v_2 в предположении, что $\sigma = \frac{6}{5}$ (рисунок 3).

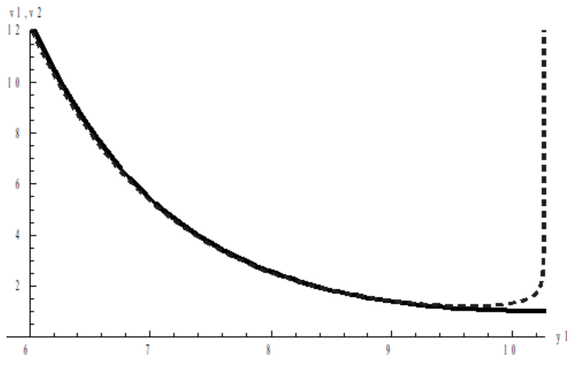

Рис. 3. *График решений уравнения Бесселя.*

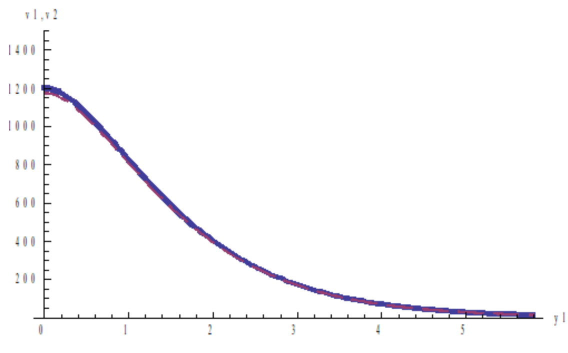

Рис. 4. *График интерполяционных функций*

Получив систему линейно независимых решений (4) на интервале (s_1,d), продолжаем их гладким образом на интервал $(0,s_1)$.

Для этого сделаем замену$y_1 = \varphi_1(t) = \int\limits_t^\infty \frac{1}{\alpha(s)} ds$. Получим следующее уравнение

$$v''(y_1) - \sigma \cdot b_1(y_1) \cdot v'(y_1) - \lambda^2 \cdot v(y_1) = 0, \tag{6}$$

Решив уравнение (6) при $\sigma = \frac{6}{5}$ и $\lambda = 1$ методом Рунге-Кутта в системе “Wolfram Mathematica 7” (см. [6]), получим решения в виде интерполяционных функций, которые изображены на рисунке 4.

Далее, склеив решения, найденные на интервалах $(s_1{,}d)$ и $(0{,}s_1)$, получим два линейно независимых решения однородного уравнения (4) $v_1(y)$ и $v_2(y)$ на всем интервале $(0{,}d)$.

Перейдем к решению задачи Коши для неоднородного уравнения

$$v''(y) - \sigma \cdot b_1(y) \cdot v'(y) - \lambda^2 \cdot v(y) = g(y) \tag{7}$$

$$v(d) = z_0. \tag{8}$$

Через $W(\sigma{,}y)$ обозначим определитель Вронского (вронскиан) решений $v_1(y)$ и $v_2(y)$ (см. [5])

$$W(\sigma{,}y) = v_1(y)v_2'(y) - v_2(y)v_1'(y).$$

В рассматриваемом нами конкретном примере $W(\sigma{,}y) = -\frac{1}{2}(\sigma - 1)b_0(y)^{-\sigma}$. При $\sigma = \frac{6}{5}$ вронскиан отличен от нуля, что позволяет считать систему решений $v_1(y)$ и $v_2(y)$ фундаментальной системой решений однородного уравнения (6) (см. [7], [8]).

Теорема 1 (о структуре общего решения неоднородного уравнения). Общим решением $v(y)$ неоднородного уравнения (3) является сумма его произвольного частного решения $v^*(y)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения (4), т.е.

$$v(y) = v^*(y) + \bar{v}(y).$$

Теорема 2 (о структуре решения задачи (7)-(8)). Решение задачи (7)-(8) можно записать в следующей форме

$$v(y) = v^*(y) + \bar{v}(y) = \frac{v_1(y)v_2'(d)}{W(\sigma{,}d)} z_0 + \int\limits_d^y \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1(y) & v_2(y) \end{vmatrix} \frac{g(x)}{W(\sigma{,}x)} dx.$$

В качестве $G(t)$ возьмем функцию e^{-t}. Используя утверждение теоремы 2, при $z_0 = 1$, $\sigma = \frac{6}{5}$ и $\lambda = 1$построим в системе “Wolfram Mathematica 7” решение задачи (7)-(8) (рисунок 5).

Проведя обратную замену $y = \varphi(t)$, получим решение задачи (1)-(2) на полубесконечном интервале, которое изображено на рисунке 6.

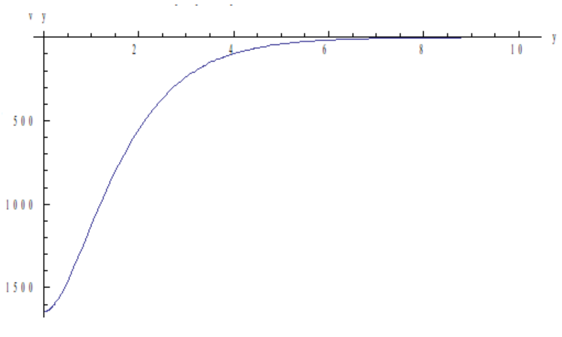

Рис. 5. *График решения задачи (7)–(8).*

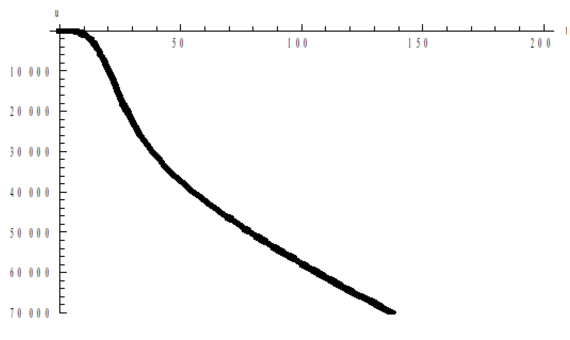

Рис. 6. *График решения задачи (1)–(2)*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, почти все спецфункции (их более 350) являются решениями некоторых однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Невозможно решить поставленную задачу прямыми методами. Поэтому приходится строить новые спецфункции и использовать их свойства для решения поставленной задачи, а затем применять численные методы системы символьной математики, чтобы получить визуальную картину поведения решения и его производных на полубесконечном интервале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушко, В. П. Теория и практика решения задачи Коши в системе символьной математики "Mathematica 3.0" : учебное пособие / В. П. Глушко. — Воронеж : ВГУ, 1999. — 42 с.

2. Дьяконов, В. Mathematica 4 : учебный курс / В. Дьяконов. — СПб. : Питер, 2001. — 656 с.

3. Глушко, В. П. Системы Символьной Математики. Построение вычислений, работа с пакетами приложений : учебно-методическое пособие для вузов / В. П. Глушко, П. В. Садчиков, С. А. Ткачева. — Воронеж : Воронеж. гос. ун–т, 2008. —- 52 с.

4. Глушко, В. П. Построение решения линейного дифференциального уравнения с существенно переменными коэффициентами на полубесконечном интервале / В. П. Глушко, П. В. Садчиков // Актуальные проблемы математики и информатики (тр. мат. факультета). — 2008. — № 4. — С. 9–14.

5. Лизоркин, П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин. — М. : Наука, 1981. — 384 с.

6. Глушко, А. В. Сборник заданий по курсу "Уравнения с частными производными". Разделы : "Приближённое решение дифференциальных уравнений", "Численное решение дифференциальных уравнений" : учебное пособие / А. В. Глушко, В. П. Глушко. — Воронеж : ВГУ, 2002. — 100 с.

7. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Изд–во МГУ, 1984. — 295 с.

8. Баев, А. Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

REFERENCES

1. Glushko V.P. Theory and practice of solution of the Cauchy problem in the system of symbolic mathematics Mathematica 3.0. [Glushko V.P. Teorija i praktika reshenija zadachi Koshi v sisteme simvol'noj matematiki "Mathematica 3.0"]. Voronezh: Voronezh State University, 1999, 42 p.

2. Deaconov V. Mathematica 4. [D'jakonov V. Mathematica 4]. Saint Petersburg: Peter, 2001, 656 p.

3. Glushko V.P., Sadchikov P.V., Tkacheva S.A. Systems Of Symbolic Mathematics. Construction of calculations, work with application packages. [Glushko V.P., Sadchikov P.V., Tkacheva S.A. Sistemy Simvol'noj Matematiki. Postroenie vychislenij, rabota s paketami prilozhenij]. Voronezh: Voronezh State University, 2008, 52 p.

4. Glushko V.P., Sadchikov P.V. Building of solution of linear differential equation with essentially variable coefficients on a semi-infinite interval. [Glushko V.P., Sadchikov P.V. Postroenie reshenija linejnogo differencial'nogo uravnenija s sushhestvenno peremennymi kojefficientami na polubeskonechnom interval]. *Aktual'nye problemy matematiki i informatiki (tr. mat. fakul'teta) — Actual problems of mathematics and informatics (proceedings of the mathematical faculty)*, 2008, no. 4, pp. 9–14.

5. Lizorkin P.I. Kurs of differential and integral equations with supplementary chapters of the analysis. [Lizorkin P.I. Kurs differencial'nyh i integral'nyh uravnenij s dopolnitel'nymi glavami analiza]. Moscow: Nauka, 1981, 384 p.

6. Glushko A.V., Glushko V. P. Collection of tasks on the course “Equations with partial derivatives” Sections: “Approximate solution of differential equations”, “Numerical solution of partial differential equations”. [Glushko A.V., Glushko V. P. Sbornik zadanij po kursu “Uravnenija s chastnymi proizvodnymi” Razdely: “Priblizhjonnoe reshenie differencial’nyh uravnenij”, “Chislennoe reshenie differencial’nyh uravnenij”]. Voronezh: Voronezh State University, 2002, 100 p.

7. Petrovsky I.G. Lectures on the theory of ordinary differential equations. [Petrovsky I.G. Lekcii po teorii obyknovennyh differencial’nyh uravnenij]. Moscow: Moscow Univ. Press, 1984, 295 p.

8. Baev A.D., Sadchikov P.V. Apriori estimates and existence of solutions of boundary value problems in the half space for a class of degenerate pseudo-differential equations. [Baev A.D., Sadchikov P.V. Apriornye ocenki i sushhestvovanie reshenij kraevyh zadach v poluprostranstve dlja odnogo klassa vyrozhdajushhihsja psevdodifferencial’nyh uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 1, pp. 162–168.

Садчиков Павел Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теорий вероятностей Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru
Тел.: 8–960–106–17–93

Sadchikov Pavel V., candidate of physics and mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Partial Differential Equations and Theories of Probability, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru
Tel.: 8–960–106–17–93