УДК 517.925.7

О ТОЧНЫХ ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2 ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

В. Н. Орлов[1], Т. Ю. Леонтьева[2]

[1] — *Гуманитарно-педагогическая Академия (филиал) "КФУ им. В. И. Вернадского"*
[2] — *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

Поступила в редакцию 30.12.2015 г.

Аннотация. Один из вариантов классификации дифференциальных уравнений: линейные и нелинейные. Если для линейных дифференциальных уравнений теория достаточно полно разработана, то для нелинейных дифференциальных уравнений на данный момент этого утверждать нельзя. Особенность нелинейных дифференциальных уравнений, это наличие подвижных особых точек, являющиеся причиной принадлежности этих уравнений к классу в общем случае не разрешимых в квадратурах. Этот факт актуализирует разработку приближенных методов решения второй категории уравнений. Одним из соавторов разработан метод приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, состоящий из шести задач. В данной работе представлено решение одной из задач. Нестандартный подход в решении задачи позволил не только подтвердить ранее полученные результаты, но и существенно их дополнить. Полученные теоретические результаты сопровождены расчетными экспериментами, подтверждающие их достоверность.

Ключевые слова: Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, метод приближенного решения, подвижная особая точка, окрестность подвижной особой точки, возмущение подвижной особой точки, комплексная область, апостериорная погрешность.

ON THE EXACT BOUNDARIES OF APPLICATION AREAS OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER IN THE NEIGHBORHOOD OF APPROXIMATE VALUE OF MOVABLE SINGULARITIES IN A COMPLEX REGION

V. N. Orlov, T. Yu. Leonteva

Abstract. In the article the method of the approximate solution of the nonlinear differential equations with movable singularities including the solution of six tasks is offered. Solutions of the first four tasks: the formulation and the proof of the theorem of existence and uniqueness of the solution of the nonlinear differential equation in regular area and in the neighborhood of a movable singular point; creation of the approximate solution in regular area and in the neighborhood of a movable singular point; research of influence of indignation of a movable singularities and the initial dates on the approximate solution were published earlier. In this work material by definition of exact boundaries of application areas of the approximate solution of the studied nonlinear differential equation in the neighborhood of approximate value of a movable singular point in complex region is given. The solution of a task in this article is based not on classical approach (a triangle method when receiving estimates), but on use of elements of differential calculus. Researches presented in this work validate some earlier received results and together with it significantly expand a scope of the constructed analytical approximate solution. The received theoretical results are followed by the numerical experiment confirming their reliability.

Keywords: nonlinear differential equation of the second order, the method of the approximate solution, movable singular point, a neighbourhood of a movable singular point, indignation of movable singular point complex region, aposteriori error.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время дифференциальные уравнения встречаются во многих областях деятельности человека. Следует отметить, что теория линейных дифференциальных уравнений развита достаточно полно, в отличие от теории нелинейных дифференциальных уравнений. Препятствием к использованию известных на данный момент приближенных численных и аналитических методов решения [1], [2], [3] в решении последних является наличие подвижных особых точек. Белорусская школа по аналитической теории дифференциальных уравнений занимает лидирующее положение в мире по вопросам, связанным с разрешением в квадратурах нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками [4], [5], [6], [7], [8], [9], которые удается получить лишь в частных случаях.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

В работах [10], [11], [12], [13], [14] предложен метод приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, включающий в себя решение шести задач. Первые четыре задачи: теорема существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения в регулярной области и в окрестности подвижной особой точки; построение приближенного решения в регулярной области и в окрестности подвижной особой точки; исследование влияния возмущения подвижной особой точки и начальных условий на приближенное решение представлены в работах [15], [16], [17]. В данной работе представлен материал по определению точных границ области применения аналитического приближенного решения исследуемого нелинейного дифференциального уравнения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для задачи Коши

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \tag{1}$$

$$y(z_0) = y_0, y'(z_0) = y_1 \tag{2}$$

в работе [16] было получено приближенное решение в окрестности подвижной особой точки z^* в виде

$$y(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0. \tag{3}$$

Возмущение подвижной особой точки $\Delta\widetilde{z}^*$ оказывает влияние на структуру аналитического приближенного решения (3), которое принимает следующий вид [17]:

$$\widetilde{y}_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{C}_n (\widetilde{z}^* - z)^{(n-1)/2}, \quad \widetilde{C}_0 \neq 0, \tag{4}$$

где $\widetilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов.

В работе [17] было проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки z^* на аналитическое приближенное решение (4). В результате этих исследований область представления аналитического приближенного решения (4) в окрестности приближенного значения подвижной особой точки $\widetilde{z}^*$ существенно уменьшилась по сравнению с результатом, полученным в работе [16]. В данной работе представлены исследования, позволяющие существенно расширить область применения аналитического приближенного решения (4) за счет конструктивности метода получения оценок. Теоретические результаты иллюстрированы расчетами.

Теорема 1. *Пусть z^* — подвижная особая точка $y(z)$ задачи (1)–(2) и выполняются следующие условия:*

1) $r(z) \in C^1$ *в области* $\mathrm{K} = \{z : |\widetilde{z}^* - z| < \rho_0\}$, $\rho_0 = const > 0$;

2) $\exists M_0 : \frac{\left|r^{(n)}(\widetilde{z}^*)\right|}{n!} \leqslant M_0$, $M_0 = const$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

3) $|\widetilde{z}^*| \leqslant |z^*|$;

4) *известны оценки погрешности* $\widetilde{z}^*$ *и* $\widetilde{\alpha}$:

$$|\widetilde{z}^* - z^*| \leqslant \Delta\widetilde{z}^*, \quad |\widetilde{\alpha} - \alpha| \leqslant \Delta\widetilde{\alpha};$$

5) $\Delta\widetilde{z}^* < 1 \Big/ \left(4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2}\right)$.

Тогда для аналитического приближенного решения (4) задачи (1)-(2) в области

$$F_1 \cap F_2 \cap F_3, \tag{5}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta\widetilde{y}_N(z) \leqslant \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} \frac{\Delta\widetilde{z}^*}{|\widetilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$\Delta_1 \leqslant \frac{2^N M (M+1)^{\left[\frac{N}{5}\right]} |\widetilde{z}^* - z|^{\frac{N-1}{2}}}{1 - 2^5 (M+1) |\widetilde{z}^* - z|^{5/2}} \sum_{i=0}^{8} \frac{2^i \eta (M+1)^{\left[\frac{i}{5}\right]} \cdot |\widetilde{z}^* - z|^{\frac{i}{2}}}{|(N+i+2)(N+i-6)|},$$

$$\Delta_2 \leqslant \frac{2^5 \Delta\widetilde{M} \mu \beta^2}{1 - 2^{10} \mu^2 \beta^5} \left(\sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \mu^{\gamma_1} \beta^i + 2\beta^{1/2} \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \mu^{\gamma_2} \beta^i \right),$$

$$\Delta_3 \leqslant \frac{2^5 M \mu \Delta\widetilde{z}^*}{1 - 2^{10} \mu^2 \beta^5} \left(\frac{2 + 3 \cdot 2^{10} \mu^2 \beta^5}{1 - 2^{10} \mu^2 \beta^5} \left(\sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \mu^{\gamma_1} \beta^i + 2\beta^{1/2} \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \mu^{\gamma_2} \beta^i \right) + \right.$$

$$\left. + \beta \left(\sum_{i=1}^{4} i \cdot 2^{2i} \mu^{\gamma_1} \beta^{i-1} + \sum_{i=0}^{4} (2i+1) \cdot 2^{2i} \mu^{\gamma_2} \beta^{(2i-1)/2} \right) \right),$$

$F_1 = \{z : |z| \leqslant |\widetilde{z}^*|\}$, $\quad F_2 = \{z{:}\, |\widetilde{z}^* - z| \ < \rho_3\}$, $F_3 = \{z : |\widetilde{z}^* - z| > \Delta\widetilde{z}^*\}$, $\rho_3 = \min\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$,

$$\rho_1 = \frac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}}, \quad \rho_2 = \frac{1}{4\sqrt[5]{\left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^2}}, \quad \beta = |\widetilde{z}^* - z|, z \in (5), \quad \mu = M + \Delta\widetilde{M} + 1,$$

$$\eta = \begin{cases} i+1, i = 0,1,2,3,4, \\ 8 - i + 1, i = 5,6,7,8 \end{cases}, \quad \gamma_1 = \begin{cases} 0, i = 0,1,2 \\ 1, i = 3,4 \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} 0, i = 0,1 \\ 1, i = 2,3,4 \end{cases},$$

$$M = \max\left\{|\alpha|, \sup_n \frac{\left|r^{(n)}(\widetilde{z}^*)\right|}{n!}\right\}, \quad \Delta\widetilde{M} = \max\left(\left(\sup_{n,G} \frac{\left|r^{(n)}(z)\right|}{n!}\right)\Delta\widetilde{z}^*, \Delta\widetilde{\alpha}\right),$$

$$G = \{z : |\widetilde{z}^* - z| \leqslant \Delta\widetilde{z}^*\},$$

α — *параметр, зависящий от условий (2),* $n = 0,1,2,\ldots$.

Доказательство. Используя классический подход, имеем

$$\Delta\widetilde{y}_N(z) = |y(z) - \widetilde{y}_N(z)| \leqslant |y(z) - \widetilde{y}(z)| + |\widetilde{y}(z) - \widetilde{y}_N(z)|.$$

Оценим $|y(z) - \widetilde{y}(z)|$:

$$|y(z) - \widetilde{y}(z)| \leqslant \sup_{G,F} \left|\frac{\partial\widetilde{y}(z)}{\partial\widetilde{z}^*}\right| \Delta\widetilde{z}^* + \sum_0^\infty \sup_G \left|\frac{\partial\widetilde{y}(z)}{\partial\widetilde{C}_n}\right| \Delta\widetilde{C}_n, \tag{6}$$

где $G = \{z : |\widetilde{z}^* - z| \leqslant \Delta\widetilde{z}^*\}, F = \{\alpha : |\widetilde{\alpha} - \alpha| \leqslant \Delta\widetilde{\alpha}\}$.

Далее получаем

$$\sup_{G,F} \left|\frac{\partial\widetilde{y}(z)}{\partial\widetilde{z}^*}\right| = \sup_{G,F} \left|\sum_0^\infty \widetilde{C}_n \cdot \frac{n-1}{2} |\widetilde{z}^* - z|^{(n-3)/2}\right| \leqslant \sum_0^\infty \frac{n-1}{2} \sup_{G,F} \left|\widetilde{C}_n\right| \sup_G |\widetilde{z}^* - z|^{(n-3)/2}.$$

Обозначим $M = \max\left\{|\alpha|, \sup\limits_n \frac{\left|r^{(n)}(\widetilde{z}^*)\right|}{n!}\right\}$.

Рассмотрим

$$\sup_{G,F} \left|\widetilde{C}_n\right| \leqslant \widetilde{C}_n\left(\left|\widetilde{A}_0\right|, \ldots, \left|\widetilde{A}_n\right|, |\widetilde{\alpha}|\right) \leqslant \widetilde{C}_n\left(|A_0| + \Delta\widetilde{A}_0, .. |A_n| + \Delta\widetilde{A}_n, |\alpha| + \Delta\widetilde{\alpha}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n M\left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{[n/5]}}{|(n+2)(n-6)|} = \vartheta_n,$$

где $\Delta\widetilde{M} = \max\left(\left(\sup\limits_{n,G} \frac{\left|r^{(n)}(z)\right|}{n!}\right)\Delta\widetilde{z}^*, \Delta\widetilde{\alpha}\right)$, $\widetilde{z}^* \in G$ и $\widetilde{\alpha} \in F$, а коэффициенты $\widetilde{A}_n$ определяются из разложения функции $r(z)$ в регулярный ряд в окрестности точки $\widetilde{z}^*$.

Так как $\sup\limits_G |\widetilde{z}^* - z|^{(n-3)/2} = |\widetilde{z}^* - z|^{(n-3)/2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, а также

$$\sup_G \left|\frac{\partial\widetilde{y}(z)}{\partial\widetilde{C}_n}\right| = \sup_G |\widetilde{z}^* - z|^{(n-1)/2} = |\widetilde{z}^* - z|^{(n-1)/2}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

то с учетом $|C_0| = \left|\widetilde{C}_0\right| = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, $|C_1| = \left|\widetilde{C}_1\right| = 0$, $|C_2| = \left|\widetilde{C}_2\right| = 0$, $|C_3| = \left|\widetilde{C}_3\right| = 0$, $|C_4| = \left|\widetilde{C}_4\right| = 0$ из выражения (6) получим

$$|y(z) - \widetilde{y}(z)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\widetilde{z}^*}{|\widetilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \Delta\widetilde{z}^* \sum_{n=5}^\infty \frac{n-1}{2} \vartheta_n |\widetilde{z}^* - z|^{(n-3)/2} +$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{(n-1)/2} \text{ при } n = 5,6,7,\ldots.$$

Тогда

$$\left|y(z) - \widetilde{y}_N(z)\right| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\widetilde{z}^*}{\left|\widetilde{z}^* - z\right|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{(n-1)/2} + \sum_{n=5}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{(n-1)/2} +$$

$$+\Delta\widetilde{z}^* \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n-1}{2} \vartheta_n \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{(n-3)/2} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где $\left|\widetilde{C}_n - C_n\right| = \Delta\widetilde{C}_n$.

Таким образом,

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\widetilde{z}^*}{\left|\widetilde{z}^* - z\right|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

В соответствии с теоремой 2 работы [16] для Δ_1 имеет место оценка:

$$\Delta_1 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{(n-1)/2} \leqslant \frac{2^N M (M+1)^{\left[\frac{N}{5}\right]} \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{\frac{N-1}{2}}}{1 - 2^5 (M+1) \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{5/2}} \sum_{i=0}^{8} \frac{2^i \eta (M+1)^{\left[\frac{i}{5}\right]} \cdot \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{\frac{i}{2}}}{\left|(N+i+2)(N+i-6)\right|},$$

где $\eta = \begin{cases} i+1, i = 0,1,2,3,4, \\ 8-i+1, i = 5,6,7,8 \end{cases}$.

Перейдем к оценке Δ_2. Проведем суммирование отдельно по целым и дробным степеням:

$$\Delta_2 \leqslant \sum_{n=5}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{(n-1)/2} = \sum_{n=3}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_{2n-1} \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_{2n} \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{(2n-1)/2} =$$

$$= \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}.$$

Далее, с учетом закономерности получения оценок для $\widetilde{C}_n$, следует:

$$\Delta_{2,1} = \sum_{n=3}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_{2n-1} \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{n-1} = \sum_{t=0}^{4} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_{10k-5+2t} \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{5k-3+t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^5 \Delta\widetilde{M} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right) \left|\widetilde{z}^* - z\right|^2}{1 - 2^{10} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^2 \cdot \left|\widetilde{z}^* - z\right|^5} \cdot \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\gamma_1} \left|\widetilde{z}^* - z\right|^i,$$

где $\gamma_1 = \begin{cases} 0, i = 0,1,2 \\ 1, i = 3,4 \end{cases}$, а оценки для $\Delta\widetilde{C}_n$ получены ранее в работе [17].

Аналогичным способом получим оценку для $\Delta_{2,2}$

$$\Delta_{2,2} \leqslant \frac{2^6 \Delta\widetilde{M} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right) \left|\widetilde{z}^* - z\right|^{5/2}}{1 - 2^{10} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^2 \cdot \left|\widetilde{z}^* - z\right|^5} \cdot \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\gamma_2} \left|\widetilde{z}^* - z\right|^i,$$

где $\gamma_2 = \begin{cases} 0, i = 0,1 \\ 1, i = 2,3,4 \end{cases}$.

Далее находим оценку Δ_3. Так как

$$\Delta_3 \leqslant \Delta\widetilde{z}^* \left(\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n M \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\left[\frac{n}{5}\right]}}{|(n+2)(n-6)|} |\widetilde{z}^* - z|^{(n-1)/2} \right)'_z ,$$

а

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n M \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\left[\frac{n}{5}\right]}}{|(n+2)(n-6)|} |\widetilde{z}^* - z|^{(n-1)/2} \leqslant \frac{2^5 M \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right) |\widetilde{z}^* - z|^2}{1 - 2^{10} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^2 |\widetilde{z}^* - z|^5} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\gamma_1} |\widetilde{z}^* - z|^i + 2 |\widetilde{z}^* - z|^{1/2} \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\gamma_2} |\widetilde{z}^* - z|^i \right),$$

то окончательно имеем:

$$\Delta_3 \leqslant \Delta\widetilde{z}^* \left(\frac{2^5 M \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right) |\widetilde{z}^* - z|^2}{1 - 2^{10} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^2 |\widetilde{z}^* - z|^5} \left(\sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\gamma_1} |\widetilde{z}^* - z|^i + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ 2 |\widetilde{z}^* - z|^{1/2} \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^{\gamma_2} |\widetilde{z}^* - z|^i \right)\right)'_z = \frac{2^5 M \mu \Delta\widetilde{z}^*}{1 - 2^{10}\mu^2\beta^5} \left(\frac{2 + 3 \cdot 2^{10}\mu^2\beta^5}{1 - 2^{10}\mu^2\beta^5} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \mu^{\gamma_1} \beta^i + 2\beta^{1/2} \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} \mu^{\gamma_2} \beta^i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^{4} i \cdot 2^{2i} \mu^{\gamma_1} \beta^{i-1} + \sum_{i=0}^{4} (2i+1) \cdot 2^{2i} \mu^{\gamma_2} \beta^{(2i-1)/2} \right) \right),$$

где $\beta = |\widetilde{z}^* - z|, x \in (5), \mu = M + \Delta\widetilde{M} + 1$, $\gamma_1 = \begin{cases} 0, i = 0,1,2 \\ 1, i = 3,4 \end{cases}, \gamma_2 = \begin{cases} 0, i = 0,1 \\ 1, i = 2,3,4 \end{cases}$.

Учитывая, что Δ_0 справедливо в области $|z| \leqslant |\widetilde{z}^*|$, Δ_1 в области $|\widetilde{z}^* - z| \leqslant 1\Big/4\sqrt[5]{(M+1)^2}$, а Δ_2 и Δ_3 в области $|\widetilde{z}^* - z| \leqslant 1\Big/4\sqrt[5]{\left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^2}$, получаем, что оценка для $\Delta\widetilde{y}_N(z)$ справедлива в области (5), где $\rho_3 = \min\left\{1\Big/4\sqrt[5]{(M+1)^2}, 1\Big/4\sqrt[5]{\left(M + \Delta\widetilde{M} + 1\right)^2}\right\}$, что и доказывает нашу теорему.

Пример 1. Найдем приближенное решение задачи (1)–(4) в случае $r(z) = 0$ при начальных данных $y(0{,}5 + 0{,}5i) = 1 + i$, $y'(0{,}5 + 0{,}5i) = 2\sqrt{3}/3 + i2\sqrt{3}/3$ и $\alpha = 0{,}001$. Данная задача имеет точное решение $y = \sqrt{\sqrt{3}/\left(1 + \left(1 + \sqrt{3}/2\right) \cdot i - 2z\right)}$. Найдем $\rho_3 \approx 0{,}175144$ для области (5). Точное значение подвижной особой точки $z^* = 0{,}5 + \left(0{,}5 + \sqrt{3}/4\right) i$. В случае $\widetilde{z}^* = 0{,}5 + 0{,}93301i$, $\Delta\widetilde{z}^* = 0{,}000003$, $\Delta\widetilde{\alpha} = 0{,}0001$ значение аргумента $z = 0{,}48 + 0{,}93i \in |z^* - z| < \rho_3$ и структуры приближенного решения $\widetilde{y}_{12}$. Расчеты представлены в табл. 1.

Таблица 1. *Характеристика погрешности численного эксперимента в области действия двух теорем*

z	y	$\widetilde{y}_{12}$	Δy	$(\Delta\widetilde{y}_{12})^I$	$(\Delta\widetilde{y}_{12})^{II}$	$\Delta_1 y$
$0{,}48+$ $0{,}93i$	$6{,}5252865+$ $0{,}4887118i$	$6{,}5253818+$ $0{,}4882844i$	0,0004	0,02	0,06	0,003

где y – значение точного решения; $\widetilde{y}_{12}$ – приближенное решение (4); Δy – абсолютная погрешность приближенного решения $\widetilde{y}_{12}$; $(\Delta\widetilde{y}_{12})^I$ – оценка погрешности приближенного решения, полученная в работе [16]; $(\Delta\widetilde{y}_{12})^{II}$ – оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме 1; $\Delta_1 y$ – апостериорная оценка погрешности, позволяющая проверить величину погрешности $(\Delta\widetilde{y}_{12})^{II}$. В этом случае для $N = 24$ априорная оценка будет удовлетворять требуемой точности $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$. Добавки в структуре приближенного решения для $N = 13{,}14, \ldots ,24$ не превышают требуемой точности. Поэтому в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 12$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$.

Пример 2. Рассмотрим предыдущий пример в случае $z = 0{,}39 + 0{,}933i$ и $\Delta\widetilde{\alpha} = 0{,}000001$.

Таблица 2. *Характеристика погрешности численного эксперимента в области действия теоремы 1*

z	y	$\widetilde{y}_{12}$	Δy	$(\Delta\widetilde{y}_{12})^{II}$	$\Delta_1 y$
0,39+0,933i	2,805879209+ 0,000162i	2,805884497+ 0,000161975i	0,0000053	0,0158	0,0009

где y – значение точного решения; $\widetilde{y}_{12}$ – приближенное решение (4); Δy – абсолютная погрешность приближенного решения $\widetilde{y}_{12}$; $(\Delta\widetilde{y}_{12})^{II}$ – оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме 1; $\Delta_1 y$ – апостериорная оценка погрешности, позволяющая проверить величину погрешности $(\Delta\widetilde{y}_{12})^{II}$. В этом случае для $N = 26$ априорная оценка будет удовлетворять требуемой точности $\varepsilon = 0{,}0009$. Добавки в структуре приближенного решения для $N = 13, \ldots ,26$ не превышают требуемой точности. Поэтому в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 12$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\varepsilon = 0{,}0009$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе сформулирована и доказана теорема, позволяющая определить точные границы области применения приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений 2 порядка в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области. Представленные результаты позволяют существенно расширить область применения построенного аналитического приближенного решения. Достоверность полученных результатов подтверждена численными расчетами. В работе применяются ряды с дробными степенями, коэффициенты которого можно рассматривать как значения дробных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. — М. : Наука, 1970. — 632 с.

2. Березин, И. С. Методы вычислений : в 2 Т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Физматгиз, 1960.

3. Фильчаков, П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики / П. Ф. Фильчаков. — Киев : Наукова думка, 1970. — 800 с.

4. Чичурин, А. В. Об интегрируемости систем третьего порядка, эквивалентных уравнению Шази с шестью неподвижными полюсами / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2014. — № 4 (22). — С. 176–187.

5. Лукашевич, Н. А. Простейшие дифференциальные уравнения третьего порядка Р-типа / Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31, № 6. — С. 955–961.

6. Еругин, Н. П. Аналитическая теория и проблемы вещественной теории дифференциальных уравнений, связанные с первым методом и методами аналитической теории / Н. П. Еругин // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3, № 11. — С. 1821–1864.

7. Мататов, В. И. О подвижных особенностях автономных систем Гамильтона / В. И. Ма-

татов, Л. В. Сабынич // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. — 1991. — 8 с.

8. Самодуров, А. А. Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде / А. А. Самодуров // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. — 1983. — № 2. — С. 57–59.

9. Кондратеня, С. Г. К вопросу о существовании полярных решений у дифференциальных уравнений первого порядка / С. Г. Кондратеня, Е. Г. Пролиско, Т. И. Шило // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24, № 10. — С. 1824–1826.

10. Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник Казанского государственного технического университета имени А. Н. Туполева. — 2008. — № 2. — С. 42–46.

11. Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана. Серия : Естественные науки. — 2009. — № 4 (35). — С. 102–108.

12. Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиационного института. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 128–135.

13. Орлов, В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Самарского государственного университета. Естественная научная серия. — 2006. — № 6/1 (46). — С. 64–69.

14. Орлов, В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2010. — № 2 (8). — С. 399–405.

15. Орлов, В. Н. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия : Естественные и технические науки. — 2013. — № 4 (80). — С. 156–162.

16. Орлов, В. Н. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2014. — № 4 (22). — С. 157–166.

17. Леонтьева, Т. Ю. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области / Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2015. — № 2 (24). — С. 109–118.

REFERENCES

1. Bakhvalov N.S. Numerical methods. [Baxvalov N.S. Chislennye metody]. Moscow: Nauka, 1970, 632 p.

2. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Methods of calculation: in 2 v. [Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychislenij : v 2 T.]. Moscow, 1960.

3. Fil'chakov P.F. Numerical and graphical methods of applied mathematics. [Fil'chakov P.F. Chislennye i graficheskie metody prikladnoj matematiki]. Kiev: Naukova Dumka, 1970, 800 p.

4. Chichurin A.V., Shvychkina E.N. On the integrability of a third-order system, the equivalent

equation of Chazy six fixed poles. [Chichurin A.V., Shvychkina E.N. Ob integriruemosti sistem tret'ego poryadka, e'kvivalentnyx uravneniyu Shazi s shest'yu nepodvizhnymi polyusami]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I.Ya. Yakovlev. Series: Mechanics limit state*, 2014. no. 4 (22), pp. 176–187.

5. Lukashevich N.A. Simple differential equations of the third order of the P-type. [Lukashevich N.A. Prostejshie differencial'nye uravneniya tret'ego poryadka P-tipa]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 6, pp. 955–961.

6. Erugin N.P. Analytical theory and the real problems of the theory of differential equations associated with the first method and the analytic theory of differential equations. [Erugin N.P. Analiticheskaya teoriya i problemy veshhestvennoj teorii differencial'nyx uravnenij, svyazannye s pervym metodom i metodami analiticheskoj teorii]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1967, vol. 3, no. 11, pp. 1821–1864.

7. Matatov V.I., Sabynich L.V. On mobile features of autonomous Hamiltonian systems. [Matatov V.I., Sabynich L.V. O podvizhnyx osobennostyax avtonomnyx sistem Gamil'tona]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1 — Bulletin of the Belarusian State University. Series 1*, 1991, 8 p.

8. Samodurov A.A. Integrability of Abel differential equation in parametric form. [Samodurov A.A. Ob integriruemosti differencial'nogo uravneniya Abelya v parametricheskom vide]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1 — Bulletin of the Belarusian State University. Series 1*, 1983, no. 2, pp. 57–59.

9. Kondratenya S.G., Prolisky E.G., Shilo T.I. On the existence of polar solutions of first order differential equations. [Kondratenya S.G., Prolisko E.G., Shilo T.I. K voprosu o sushhestvovanii polyarnyx reshenij u differencial'nyx uravnenij pervogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 10, pp. 1824–1826.

10. Orlov V.N. The approximate solution of the first Painlevé equation. [Orlov V.N. O priblizhennom reshenii pervogo uravneniya Penleve]. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta imeni A.N. Tupoleva — Bulletin of the Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev*, 2008, no. 2, pp. 42–46.

11. Orlov V.N. The study of the approximate solutions of differential equations in the neighborhood Abel mobile singularity. [Orlov V.N. Issledovanie priblizhennogo resheniya differencial'nogo uravneniya Abelya v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta imeni N.E'. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki — Bulletin of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman. Series: Natural sciences*, 2009, no. 4 (35), pp. 102–108.

12. Orlov V.N. A method for the approximate solution of the matrix Riccati differential equations. [Orlov V.N. Ob odnom metode priblizhennogo resheniya matrichnyx differencial'nyx uravnenij Rikkati]. *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta — Bulletin of the Moscow Aviation Institute*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 128–135.

13. Orlov V.N. Criteria for the existence of mobile singular points of solutions of differential Riccati equations. [Orlov V.N. Kriterii sushhestvovaniya podvizhnyx osobyx tochek reshenij differencial'nyx uravnenij Rikkati]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennaya nauchnaya seriya — Bulletin of the Samara State University. Natural science series*, 2006, no. 6/1 (46). pp. 64–69.

14. Orlov V.N. The precise boundaries for the approximate solution of differential equations in the neighborhood Abel approximate value of movable singular point in the complex domain. [Orlov V.N. Tochnye granicy dlya priblizhennogo resheniya differencial'nogo uravneniya Abelya v okrestnosti priblizhennogo znacheniya podvizhnoj osoboj tochki v kompleksnoj oblasti]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I.Ya. Yakovleva. Seriya:*

Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics limit state, 2010, no. 2 (8), pp. 399–405.

15. Orlov V.N., Leont'eva T.Yu Construction of approximate solutions of second-order nonlinear differential equations in the region of holomorphy. [Orlov V.N., Leont'eva T.Yu. Postroenie priblizhennogo resheniya odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v oblasti golomorfnosti]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I. Ya. Yakovleva. Seriya: Estestvennye i texnicheskie nauki — Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Natural and Technical Sciences*, 2013, no. 4 (80), pp. 156–162.

16. Orlov V.N., Leont'eva T.Yu Construction of the approximate solution of a nonlinear second-order differential equations in the neighborhood of the movable singular point in a complex region. [Orlov V.N., Leont'eva T.Yu. Postroenie priblizhennogo resheniya odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki v kompleksnoj oblasti]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics limit state*, 2014, no. 4 (22), pp. 157–166.

17. Leont'eva T.Yu. The effect of perturbation movable singular point on the approximate solution of a nonlinear second-order differential equations in a complex region. [Leont'eva T.Yu. Vliyanie vozmushheniya podvizhnoj osoboj tochki na priblizhennoe reshenie odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v kompleksnoj oblasti]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics limit state*, 2015, no. 2 (24), pp. 109–118.

Орлов Виктор Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике Гуманитарно-педагогической Академии (филиал) «КФУ им. В. И. Вернадского» в г. Ялта, Россия
E-mail: orlowvn@rambler.ru
Тел.: 8978–144–06–78

Orlov Viktor Nikolaevich, Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Mathematics, Theory and Methods of teaching mathematics, Humanity and Pedagogical Academy (Branch) «V. I. Vernadskogo named CFU» in Yalta, Russia
E-mail: orlowvn@rambler.ru
Tel.: 8978–144–06–78

Леонтьева Татьяна Юрьевна, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, Чебоксары, Россия
E-mail: betty2784@mail.ru
Тел.: 8927–861–51–15

Leonteva Tatyana Yur'evna, Postgraduate student of the Department of Mathematical analysis, Algebra and Geometry, Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russian Federation
E-mail: betty2784@mail.ru
Tel.: 8927–861–51–15