УДК 517.927

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ЧЁТНОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин

Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 03.12.2015 г.

Аннотация. Изучается краевая задача для дифференциального оператора с разделёнными граничными условиями при условии, что потенциал является суммируемой функцией на отрезке. Дифференциальное уравнение, задающее дифференциальный оператор, сведено к интегральному уравнению Вольтерра. Получена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра. Изучено уравнение на собственные значения изучаемого дифференциального оператора. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения. Выведена асимптотика собственных значений в различных секторах координатной плоскости в зависимости от параметров граничных условий. Выписано уравнение, из которого определяются собственные функции рассматриваемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: спектральный параметр, дифференциальный оператор, суммируемый потенциал, асимптотика собственных значений, индикаторная диаграмма, собственные функции.

ABOUT SPECTRAL PROPERTIES OF A FAMILY OF DIFFERENTIAL OPERATORS OF THE HIGH EVEN ORDER WITH A SUMMABLE POTENTIAL

S. I. Mitrokhin

Abstract. We study the boundary value problem for a differential operator with separated boundary conditions, provided that the potential is a summable functions on the interval. The differential equation that defines the differential operator is reduced to an integral equation of Volterra. The asymptotic behavior of solutions of the corresponding differential equation for large values of the spectral parameter is obtained. The equation for the eigenvalues of the differential operator is studied. We investigated the indicator diagram of the equation for the eigenvalues. The asymptotic behavior of the eigenvalues in the various sectors of the coordinate plane is obtained, depending on the parameters of the boundary conditions. The equation from which eigenfunctions of the considered differential operator are defined is given.

Keywords: spectral parameter, differential operator, summable potential, asymptotics of eigenvalues, indicator diagram, eigenfunctions.

---

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального оператора высокого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(20)}(x) + q(x) \cdot y(x) = \lambda \cdot a^{20} \cdot y(x), 0 \leqslant x \leqslant \pi, a > 0, \tag{1}$$

с разделёнными граничными условиями

$$\begin{gathered} y^{(m_1)}(0) = y^{(m_2)}(0) = y^{(m_3)}(0) = \ldots = y^{(m_{17})}(0) = y^{(n_1)}(\pi) = y^{(n_2)}(\pi) = y^{(n_3)}(\pi) = 0, \\ m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_{17}, n_1 < n_2 < n_3; m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{17}, n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1, 2, \ldots, 19\}, \end{gathered} \tag{2}$$

при этом мы предполагаем, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке:

$$q(x) \in L_1[0;\pi] (=) \left(\int\limits_0^x q(t)\, dt \right)'_x = q(x) \quad \text{почти для всех } x \text{ из отрезка } [0;\pi]. \tag{3}$$

2. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Нахождение асимптотики решений дифференциальных уравнений типа (1) при больших значениях спектрального параметра λ развивалось в направлении ослабления гладкости потенциала $q(x)$. Случай, когда потенциал был бесконечно гладким на отрезке, был изучен в работах [1], [2]. В работах [3, глава 1, 2], [4] гладкость потенциала постепенно понижалась, функция $q(x)$ принадлежала классу $C^n[a;b], n = 2, 3, \ldots N < +\infty$. Изучалась связь количества членов асимптотических разложений и гладкости потенциала. В работах [5], [6] автором изучались различные типы дифференциальных операторов с разрывными (кусочно-непрерывными) коэффициентами. В работе [7] исследовалась сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциальных операторов. В работе [8] были приведены примеры так называемых изоспектральных операторов с разрывными коэффициентами (дифференциальных операторов, которые задаются одинаковыми дифференциальными уравнениями, но разными граничными условиями, и при этом имеют одинаковый спектр). В работе [9] для дифференциального оператора второго порядка был изучен случай кусочно-постоянной весовой функции. В последнее время ведётся интенсивная работа по исследованию дифференциальных операторов различных порядков с негладкими коэффициентами и различными нерегулярными условиями (см. работы [10]-[15]). В работе [16] была рассмотрена обратная задача с кусочно-непрерывными коэффициентами.

Случай суммируемого потенциала впервые был изучен для дифференциального оператора второго порядка в работе [17]. Эта работа послужила толчком к новым исследованиям. В работе [18] был придуман метод, отличный от метода работы [17], для изучения спектральных свойств дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами с разделёнными граничными условиями. Был ещё раз продемонстрирован факт, что с возрастанием порядка дифференциальных операторов их исследование становится многократно труднее.

В работе [19] порядок дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор, возрастает до шестого, в работе [20] рассматривается оператор с гладкой весовой функцией, в работе [21] рассматривается дифференциальный оператор произвольного нечётного порядка с суммируемым потенциалом со стандартными граничными условиями. В наших граничных условиях (2) мы исследуем сразу целое семейство дифференциальных операторов, что ранее никем не предпринималось.

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1) ПРИ $\lambda \to \infty$

Пусть $\lambda = s^{20}, s = \sqrt[20]{\lambda}$, при этом для корректности дальнейших вычислений зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[20]{1} = +1$. Обозначим через w_k $(k = 1, 2, \ldots, 20)$ различные корни двадцатой степени из единицы:

$$w_k^{20} = 1, w_k = e^{\frac{2\pi i}{20}\cdot(k-1)}, k = 1, 2, \ldots, 20; w_1 = 1; w_2 = e^{\frac{2\pi i}{20}} = \cos\left(\frac{2\pi}{20}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{20}\right) = z \neq 0;$$
$$w_3 = e^{\frac{4\pi i}{20}} = \cos\left(\frac{4\pi}{20}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{20}\right) = z^2; w_m = z^{m-1}, m = 1, 2, 3 \ldots. \quad (4)$$

При этом справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{20} w_k^p = 0, p = 1, 2, \ldots, 19; \sum_{k=1}^{20} w_k^p = 20, p = 0, p = 20. \quad (5)$$

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:*

$$y\left(x, s\right) = \sum_{k=1}^{20} C_k \cdot y_k\left(x, s\right); y^{(p)}\left(x, s\right) = \sum_{k=1}^{20} C_k \cdot y_k^{(p)}\left(x, s\right), p = 1, 2, \ldots, 19, \quad (6)$$

где $C_k\left(k = 1, 2, \ldots, 20\right)$ *— произвольные постоянные,*

$$y_k\left(x, s\right) = e^{aw_k sx} - \frac{A_{19,k}\left(x, s\right)}{20a^{19}s^{19}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|Ims|x}}{s^{38}}\right), k = 1, 2, \ldots, 20, \quad (7)$$

$$y_k^{(p)}\left(x, s\right) = (as)^p \cdot \left\{w_k^p \cdot e^{aw_k sx} - \frac{A_{19,k}^p\left(x, s\right)}{20a^{19}s^{19}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|Ims|x}}{s^{38}}\right)\right\}, k = 1, 2, \ldots, 20, p = 1, 2, \ldots, 19, \quad (8)$$

$$A_{19,k}\left(x, s\right) = \sum_{n=1}^{20} w_n \cdot e^{aw_n sx} \cdot \int_0^x q\left(t\right) \cdot e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn}, k = 1, 2, \ldots, 20, \quad (9)$$

$$A_{19,k}^p\left(x, s\right) = w_1^{p+1} \cdot e^{aw_1 sx} \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{ak_1} + w_2^{p+1} \cdot e^{aw_2 sx} \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{ak_2} + \ldots +$$
$$+ w_{20}^{p+1} \cdot e^{aw_{20} sx} \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{ak_{20}}, \quad (10)$$
$$k = 1, 2, \ldots, 20; p = 1, 2, \ldots, 19.$$

Асимптотические оценки вида (7)–(8) получаются аналогично оценкам монографий [22, глава 2] и [23, глава 1].

4. ИЗУЧЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ (2)

Подставляя формулы (6) в граничные условия (2), имеем:

$$\left\{\begin{array}{l} y^{(m_n)}(0) \overset{(2)}{=} 0\,(=) \sum\limits_{k=1}^{20} C_k \cdot y_k^{(m_n)}(0,s) = 0\,(=) \sum\limits_{k=1}^{20} C_k \cdot w_k^{m_n} \cdot (as)^{m_n} \cdot 1 = 0; n = 1,2,3,\ldots,17; \\ y^{(n_j)}(\pi) \overset{(2)}{=} 0\,(=) \sum\limits_{k=1}^{20} C_k \cdot y_k^{(n_j)}(\pi,s) = 0, j = 1,2,3. \end{array}\right. \tag{11}$$

Теорема 2. *Уравнение на собственные значения краевой задачи (1)–(2)–(3) имеет следующий вид:*

$$f(s) = \begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s) & y_2^{(m_1)}(0,s) & \ldots & y_{19}^{(m_1)}(0,s) & y_{20}^{(m_1)}(0,s) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(m_{17})}(0,s) & y_2^{(m_{17})}(0,s) & \ldots & y_{19}^{(m_{17})}(0,s) & y_{20}^{(m_{17})}(0,s) \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & \ldots & y_{19}^{(n_1)}(\pi,s) & y_{20}^{(n_1)}(\pi,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n_3)}(\pi,s) & y_2^{(n_3)}(\pi,s) & \ldots & y_{19}^{(n_3)}(\pi,s) & y_{20}^{(n_3)}(\pi,s) \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Действительно, система (11) имеет ненулевые решения $\left(\sum\limits_{k=1}^{20} C_k^{20} \neq 0\right)$ только в том случае, когда её определитель равен нулю.

Используя свойства функций $y_k(x,s)$ и $y_k^{(p)}(x,s)$ из (7)–(8) $\Big(y_k(0,s) = 1;\ y_k^{(p)}(0,s) = (as)^p \cdot w_k^p\Big)$, уравнение (12) можно переписать в следующем виде:

$$f(s) = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \ldots\ldots & w_{19}^{m_1} & w_{20}^{m_1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ w_1^{m_{17}} & w_2^{m_{17}} & \ldots\ldots & w_{19}^{m_{17}} & w_{20}^{m_{17}} \\ b_{18,1} & b_{18,2} & \ldots\ldots & b_{18,19} & b_{18,20} \\ b_{19,1} & b_{19,2} & \ldots\ldots & b_{19,19} & b_{19,20} \\ b_{20,1} & b_{20,2} & \ldots\ldots & b_{20,19} & b_{20,20} \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

$$b_{18,m} = y_m^{(n_1)}(\pi,s), b_{19,m} = y_m^{(n_2)}(\pi,s), b_{20,m} = y_m^{(n_3)}(\pi,s), m = 1,2,\ldots,16.$$

Применяя теорему Лапласа, видим, что

$$f(s) = \begin{vmatrix} b_{18,1} & b_{18,2} & b_{18,3} \\ b_{19,1} & b_{19,2} & b_{19,3} \\ b_{20,1} & b_{20,2} & b_{20,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_4^{m_1} & \omega_5^{m_1} & \ldots & \omega_{20}^{m_1} \\ \omega_4^{m_2} & \omega_5^{m_2} & \ldots & \omega_{20}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_4^{m_{17}} & \omega_5^{m_{17}} & \ldots & \omega_{20}^{m_{17}} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} b_{18,2} & b_{18,3} & b_{18,4} \\ b_{19,2} & b_{19,3} & b_{19,4} \\ b_{20,2} & b_{20,3} & b_{20,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_5^{m_1} & \ldots & \omega_{20}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_5^{m_2} & \ldots & \omega_{20}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{m_{17}} & \omega_5^{m_{17}} & \ldots & \omega_{20}^{m_{17}} \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= \sum_{j_1,j_2,j_3,p_1,p_2,p_3\ldots,p_{17}} B_{j_1,j_2,j_3} \cdot W_{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_{17}} \cdot \delta(j_1,j_2,j_3,p_1,p_2,p_3,\ldots,p_{17}) = 0, \tag{14}$$

$$B_{j_1,j_2,j_3} = \begin{vmatrix} b_{18,j_1} & b_{18,j_2} & b_{18,j_3} \\ b_{19,j_1} & b_{19,j_2} & b_{19,j_3} \\ b_{20,j_1} & b_{20,j_2} & b_{20,j_3} \end{vmatrix}, W_{p_1p_2,\ldots,p_{17}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_{p_1}^{m_1} & \omega_{p_2}^{m_1} & \ldots & \omega_{p_{17}}^{m_1} \\ \omega_{p_1}^{m_2} & \omega_{p_2}^{m_2} & \ldots & \omega_{p_{17}}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{p_1}^{m_{17}} & \omega_{p_2}^{m_{17}} & \ldots & \omega_{p_{17}}^{m_{17}} \end{vmatrix}, j_1, \ldots, j_3, p_1, \ldots, p_{17} \in \{1, 2, \ldots, 20\}, \quad (15)$$

$\delta(j_1, j_2, j_3, p_1, p_2, \ldots, p_{17}) = +1$ или (-1) в зависимости от чётности или нечётности перестановки $(j_1, j_2, j_3, p_1, p_2, \ldots, p_{17})$. Из свойств (4)–(5) находим, что

$$W_{1,2,3,\ldots,17} = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \ldots & \omega_{17}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \ldots & \omega_{17}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{m_{17}} & \omega_2^{m_{17}} & \ldots & \omega_{17}^{m_{17}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \ldots & z^{16m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \ldots & z^{16m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{m_{17}} & z^{m_{17}} & \ldots & z^{16m_{17}} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k>n;k,n=1,2,3,\ldots,17} (z^{m_k} - z^{m_n}) = W_{17} \neq 0, z = e^{\frac{2\pi i}{20}}, \quad (16)$$

$$W_{2,3,4,\ldots,18} = \begin{vmatrix} \omega_2^{m_1} & \omega_3^{m_1} & \ldots & \omega_{18}^{m_1} \\ \omega_2^{m_2} & \omega_3^{m_2} & \ldots & \omega_{18}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_2^{m_{17}} & \omega_3^{m_{17}} & \ldots & \omega_{18}^{m_{17}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \ldots & z^{17m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \ldots & z^{17m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{m_{17}} & z^{m_{17}} & \ldots & z^{17m_{17}} \end{vmatrix} =$$

$$= z^{M_{17}} \cdot W_{17} \neq 0, M_{17} = \sum_{k=1}^{17} m_k, \quad (17)$$

$$W_{3,4,5,\ldots,19} = z^{2M_{17}} \cdot W_{17}; W_{4,5,6,\ldots,20} = z^{3M_{17}} \cdot W_{17}; W_{5,6,7,\ldots,21} = W_{1,5,6,7,\ldots,20} = z^{4M_{17}} \cdot W_{17};$$
$$W_{6,7,8,\ldots,21,22} = W_{1,2,6,7,\ldots,19,20} = z^{5M_{17}} \cdot W_{17}; \ldots; w_{k+20} = w_k, k = 1, 2, \ldots, 20. \quad (18)$$

Поэтому из (14) – (18) получаем:

$$f(s) = B_{123} \cdot W_{4,5,6,\ldots,20} - B_{234} \cdot W_{1,5,6,\ldots,20} + B_{345} \cdot W_{1,2,6,\ldots,19,20} - B_{456} \cdot W_{1,2,3,7,8,\ldots,19,20} + \ldots -$$
$$- B_{18,19,20} \cdot W_{1,2,3,\ldots,17} + B_{1,19,20} \cdot W_{2,3,4,\ldots,18} - B_{1,2,20} \cdot W_{3,4,5,\ldots,19} + \ldots =$$
$$= B_{123} \cdot z^{3M_{17}} \cdot W_{17} - B_{234} \cdot z^{4M_{17}} \cdot W_{17} + B_{345} \cdot z^{5M_{17}} \cdot W_{17} - \ldots + B_{19,20,1} \cdot z^{21M_{17}} \cdot W_{17} -$$
$$- B_{20,1,2} \cdot z^{22M_{17}} \cdot W_{17} + \ldots - B_{1,2,20} \cdot W_{3,4,5,\ldots,19} + \ldots = 0. \quad (19)$$

В силу формул (7)–(8) из (15) получаем:

$$B_{j_1j_2j_3} =$$
$$= \begin{vmatrix} w_{j_1}^{n_1} \cdot e^{aw_{j_1}s\pi} - \frac{A_{19,j_1}^{n_1}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_{j_2}^{n_1} \cdot e^{aw_{j_2}s\pi} - \frac{A_{19,j_2}^{n_1}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_{j_3}^{n_1} \cdot e^{aw_{j_3}s\pi} - \frac{A_{19,j_3}^{n_1}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots \\ w_{j_1}^{n_2} \cdot e^{aw_{j_1}s\pi} - \frac{A_{19,j_1}^{n_2}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_{j_2}^{n_2} \cdot e^{aw_{j_2}s\pi} - \frac{A_{19,j_2}^{n_2}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_{j_3}^{n_2} \cdot e^{aw_{j_3}s\pi} - \frac{A_{19,j_3}^{n_2}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots \\ w_{j_1}^{n_3} \cdot e^{aw_{j_1}s\pi} - \frac{A_{19,j_1}^{n_3}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_{j_2}^{n_3} \cdot e^{aw_{j_2}s\pi} - \frac{A_{19,j_2}^{n_3}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_{j_3}^{n_3} \cdot e^{aw_{j_3}s\pi} - \frac{A_{19,j_3}^{n_3}(s,\pi)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots \end{vmatrix},$$
$$" + \ldots " = \underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right); j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, 20. \quad (20)$$

Таким образом, имеем:

$$B_{j_1j_2j_3} = w_{j_1}^{n_1} \cdot w_{j_2}^{n_2} \cdot w_{j_3}^{n_3} \cdot e^{s\left(w_{j_1} + w_{j_2} + w_{j_3}\right)s\pi} - \ldots -$$
$$- \frac{A_{19,j_1}^{n_1}(\pi, s)}{20a^{19}s^{19}} \cdot w_{j_2}^{n_2} \cdot w_{j_3}^{n_3} \cdot e^{s\left(w_{j_2} + w_{j_3}\right)s\pi} - \ldots + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right). \quad (21)$$

5. ИНДИКАТОРНАЯ ДИАГРАММА УРАВНЕНИЯ (12)–(15)

Чтобы изучить поведение корней уравнения (12)–(15) с учётом формул (16)–(21), необходимо изучить так называемую индикаторную диаграмму этого уравнения (см. [24, глава 12]). Индикаторная диаграмма уравнения (12)–(15) — выпуклая оболочка показателей экспонент, входящих в это уравнение. Учитывая формулы (16)–(21) и (9)–(10), видим, что нам надо изучить выпуклую оболочку множества точек $\{w_{j_1} + w_{j_2} + w_{j_3}\}$, где $j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, 20$.

Кропотливое исследование множества точек $\{w_{j_1} + w_{j_2}\}$, где $j_1, j_2 = 1, 2, \ldots, 20$, показало, что выпуклой оболочкой этого множества является правильный двадцатиугольник с вершинами в точках $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_4, \ldots, w_{19} + w_{20}, w_{20} + w_1$. Остальные точки множества $\{w_{j_1} + w_{j_2}\}$ попадают внутрь этого двадцатиугольника. Этот факт можно доказать двумя способами: геометрическим и аналитическим. Геометрический способ следует из того, что точки w_k из (4)–(5) делят единичную окружность на двадцать равных частей, поэтому $|w_1 + w_3| < |w_1 + w_2|$, $|w_1 + w_4| < |w_1 + w_2|, \ldots, |w_k + w_{k+m}| < |w_k + w_{k+1}|, m = 2, 3, \ldots, 18; k = 1, 2, \ldots, 20$ ввиду свойства сложения векторов по правилу параллелограмма.

Аналогичным образом доказывается, что выпуклой оболочкой множества точек $\{w_{j_1} + w_{j_2} + w_{j_3}\}$, где $j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, 20$ является правильный двадцатиугольник с вершинами в точках $w_1 + w_2 + w_3, w_2 + w_3 + w_4, w_3 + w_4 + w_5, \ldots, w_{19} + w_{20} + w_1, w_{20} + w_1 + w_2$. Остальные точки множества $\{w_{j_1} + w_{j_2} + w_{j_3}\}$ попадают внутрь этого многоугольника.

Из общей теории нахождения корней уравнений (12) – (13), (14) – (15) и (18) – (19) следует, что они находятся в двадцати секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого правильного двадцатиугольника.

6. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА (1)–(2)–(3)

Изучим подробно сектор 1), биссектриса которого перпендикулярна отрезку $[R_1; R_2]$, $R_1 = w_1 + w_2 + w_3$, $R_2 = w_2 + w_3 + w_4$.

Теорема 3. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторе* 1) *индикаторной диаграммы имеет вид*

$$h_1(s) = B_{123} \cdot W_{4,5,6,\ldots,20} - B_{234} \cdot W_{1,5,6,\ldots,20} \overset{(18)}{=} z^{3M_{17}} \cdot W_{17} \cdot \left[B_{123} - z^{M_{17}} \cdot B_{234}\right] = 0. \quad (22)$$

С помощью формул (20) и свойств определителей величины B_{123} и B_{234} можно изучить подробно с точки зрения поведения их асимптотики, раскладывая определители на сумму определителей по столбцам:

$$B_{123} =$$

$$= \begin{vmatrix} w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} - \frac{A^{n_1}_{19,1}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi} - \frac{A^{n_1}_{19,2}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_3^{n_1} \cdot e^{aw_3 s\pi} - \frac{A^{n_1}_{19,3}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots \\ w_1^{n_2} \cdot e^{aw_1 s\pi} - \frac{A^{n_2}_{19,1}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_2^{n_2} \cdot e^{aw_2 s\pi} - \frac{A^{n_2}_{19,2}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_3^{n_2} \cdot e^{aw_3 s\pi} - \frac{A^{n_2}_{19,3}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots \\ w_1^{n_3} \cdot e^{aw_1 s\pi} - \frac{A^{n_3}_{19,1}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_2^{n_3} \cdot e^{aw_2 s\pi} - \frac{A^{n_3}_{19,2}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots & w_3^{n_3} \cdot e^{aw_3 s\pi} - \frac{A^{n_3}_{19,3}(\pi,s)}{20a^{19}s^{19}} + \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= B_{123,0} - \frac{B_{123,19}}{20a^{19}s^{19}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right), \quad (23)$$

$$B_{123,0} = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} & w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi} & w_3^{n_1} \cdot e^{aw_3 s\pi} \\ w_1^{n_2} \cdot e^{aw_1 s\pi} & w_2^{n_2} \cdot e^{aw_2 s\pi} & w_3^{n_2} \cdot e^{aw_3 s\pi} \\ w_1^{n_3} \cdot e^{aw_1 s\pi} & w_2^{n_3} \cdot e^{aw_2 s\pi} & w_3^{n_3} \cdot e^{aw_3 s\pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ w_1^{n_3} & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix}_1 \cdot e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi}, \quad (24)$$

$$B_{123,19} = \begin{vmatrix} A_{19,1}^{n_1}(\pi,s) & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ A_{19,1}^{n_2}(\pi,s) & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ A_{19,1}^{n_3}(\pi,s) & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix}_2 \cdot e^{a(w_2+w_3)s\pi} + \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & A_{19,2}^{n_1}(\pi,s) & w_3^{n_1} \\ w_1^{n_2} & A_{19,2}^{n_2}(\pi,s) & w_3^{n_2} \\ w_1^{n_3} & A_{19,2}^{n_3}(\pi,s) & w_3^{n_3} \end{vmatrix}_3 \cdot e^{a(w_1+w_3)s\pi} +$$
$$+ \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} & A_{19,3}^{n_1}(\pi,s) \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} & A_{19,3}^{n_2}(\pi,s) \\ w_1^{n_3} & w_2^{n_3} & A_{19,3}^{n_3}(\pi,s) \end{vmatrix}_4 \cdot e^{a(w_1+w_3)s\pi}. \quad (25)$$

Аналогично выводим, что

$$B_{234} = B_{234,0} - \frac{B_{234,19}}{20a^{19}s^{19}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right), \quad (26)$$

$$B_{234,0} = \begin{vmatrix} w_2^{n_1}e^{aw_2s\pi} & w_3^{n_1}e^{aw_3s\pi} & w_4^{n_1}e^{aw_4s\pi} \\ w_2^{n_2}e^{aw_2s\pi} & w_3^{n_2}e^{aw_3s\pi} & w_4^{n_2}e^{aw_4s\pi} \\ w_2^{n_3}e^{aw_2s\pi} & w_3^{n_3}e^{aw_3s\pi} & w_4^{n_3}e^{aw_4s\pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} & w_4^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} & w_4^{n_2} \\ w_2^{n_3} & w_3^{n_3} & w_4^{n_3} \end{vmatrix}_5 \cdot e^{a(w_2+w_3+w_4)s\pi}, \quad (27)$$

$$B_{234,19} = \begin{vmatrix} A_{19,2}^{n_1}(\pi,s) & w_3^{n_1} & w_4^{n_1} \\ A_{19,2}^{n_2}(\pi,s) & w_3^{n_2} & w_4^{n_2} \\ A_{19,2}^{n_3}(\pi,s) & w_3^{n_3} & w_4^{n_3} \end{vmatrix}_6 \cdot e^{a(w_3+w_4)s\pi} + \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & A_{19,3}^{n_1}(\pi,s) & w_4^{n_1} \\ w_2^{n_2} & A_{19,3}^{n_2}(\pi,s) & w_4^{n_2} \\ w_2^{n_3} & A_{19,3}^{n_3}(\pi,s) & w_4^{n_3} \end{vmatrix}_7 \cdot e^{a(w_2+w_4)s\pi} +$$
$$+ \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} & A_{19,4}^{n_1}(\pi,s) \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} & A_{19,4}^{n_2}(\pi,s) \\ w_2^{n_3} & w_3^{n_3} & A_{19,4}^{n_3}(\pi,s) \end{vmatrix}_8 \cdot e^{a(w_2+w_3)s\pi}. \quad (28)$$

Подставляя формулы (23) и (26) в (22), имеем:

$$y_1(s) = z^{3M_{17}} \cdot W_{17} \cdot \left\{ \left[B_{123,0} - z^{M_{17}} \cdot B_{234,0} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{20a^{19}s^{19}} \cdot \left[B_{123,19} - z^{M_{17}} \cdot B_{234,19} \right] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right) \right\} = 0. \quad (29)$$

Поделим в (29) на $z^{3M_{17}} \cdot W_{17} \cdot e^{a(w_2+w_3+w_4)s\pi} \neq 0$, получаем:

$$y_1(s) = \left[|\ldots|_1 \cdot e^{a(w_1-w_4)s\pi} - |\ldots|_5 \cdot z^{M_{17}} \right] -$$
$$- \frac{1}{20a^{19}s^{19}} \left\{ |\ldots|_2 \cdot e^{-aw_4s\pi} + |\ldots|_3 \cdot e^{a(w_1-w_2-w_4)s\pi} + |\ldots|_4 \cdot e^{a(w_1-w_3-w_4)s\pi} - \right.$$
$$\left. - z^{M_{17}} \cdot |\ldots|_6 \cdot e^{-aw_2s\pi} - z^{M_{17}} \cdot |\ldots|_7 \cdot e^{-aw_3s\pi} - z^{M_{17}} \cdot |\ldots|_8 \cdot e^{-aw_4s\pi} \right\}_9 + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right) = 0. \quad (30)$$

Применяя формулы (4), (5), находим:

$$|\ldots|_1 = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ w_1^{n_3} & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix}_1 = \begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} & z^{2n_1} \\ 1^{n_2} & z^{n_2} & z^{2n_2} \\ 1^{n_3} & z^{n_3} & z^{2n_3} \end{vmatrix} = V_3 \neq 0,$$
$$V_3 = \det Wandermond`s\left(z^{n_1}, z^{n_2}, z^{n_3}\right) = \left(z^{n_3} - z^{n_2}\right)\left(z^{n_3} - z^{n_1}\right)\left(z^{n_2} - z^{n_1}\right), \quad (31)$$

$$|\ldots|_5 = \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} & w_4^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} & w_4^{n_2} \\ w_2^{n_3} & w_3^{n_3} & w_4^{n_3} \end{vmatrix}_5 = \begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{2n_1} & z^{3n_1} \\ z^{n_2} & z^{2n_2} & z^{3n_2} \\ z^{n_3} & z^{2n_3} & z^{3n_3} \end{vmatrix} = z^{n_1} \cdot z^{n_2} \cdot z^{n_3} \cdot \begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} & z^{2n_1} \\ 1^{n_2} & z^{n_2} & z^{2n_2} \\ 1^{n_3} & z^{n_3} & z^{2n_3} \end{vmatrix} =$$
$$= z^{N_3} \cdot |\ldots|_1 = z^{N_3} \cdot V_3 \neq 0, \qquad N_3 = n_1 + n_2 + n_3 = \sum_{k=1}^{3} n_k. \quad (32)$$

Используя формулы (31), (32), поделив в (30) на $|\ldots|_1 = V_3 \neq 0$, получим:

$$y_1(s) = \left[e^{a(w_1-w_4)s\pi} - z^{M_{17}} \cdot z^{N_3}\right] - \frac{1}{20a^{19}s^{19} \cdot V_3} \cdot \{\ldots\}_9 + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right) = 0. \qquad (33)$$

Применяя формулы (9), (10), имеем $\left(e^k = e^{aw_k s\pi}, k = 1, 2, \ldots, 20\right)$:

$$|\ldots|_2 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} w_1 w_1^{n_1} e^1 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a11} + w_2 w_2^{n_1} e^2 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a12} + \ldots + \\ + w_{19} w_{19}^{n_1} e^{19} \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a1,19} + w_{20} w_{20}^{n_1} e^{20} \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a1,20} \end{matrix} & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ \begin{matrix} w_1 w_1^{n_2} e^1 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a11} + w_2 w_2^{n_2} e^2 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a12} + \ldots + \\ + w_{19} w_{19}^{n_2} e^{19} \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a1,19} + w_{20} w_{20}^{n_2} e^{20} \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a1,20} \end{matrix} & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ \begin{matrix} w_1 w_1^{n_3} e^1 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a11} + w_2 w_2^{n_3} e^2 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a12} + \ldots + \\ + w_{19} w_{19}^{n_3} e^{19} \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a1,19} + w_{20} w_{20}^{n_3} e^{20} \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a1,20} \end{matrix} & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix} =$$

$$= |\ldots|_1 \cdot e^1 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a11} \cdot w_1 + e^2 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a12} \cdot 0 + e^3 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a13} \cdot 0 +$$

$$+ |\ldots|_5 \cdot e^4 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a14} \cdot w_4 + \overline{\overline{o}}(1) \cdot e^5 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a15} + \ldots + \omega_{20} \cdot 0. \qquad (34)$$

Аналогичным образом выводим, что

$$|\ldots|_3 = e^1 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a21} \cdot 0 + |\ldots|_1 e^2 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a22} \cdot w_2 + e^3 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a23} \cdot 0 +$$

$$+ e^4 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a24} \cdot \overline{\overline{o}}(1) + e^5 \cdot \overline{\overline{o}}(1) + \ldots + e^{20} \cdot 0, \qquad (35)$$

$$|\ldots|_4 = e^1 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a31} \cdot 0 + e^2 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a32} \cdot 0 +$$

$$+ e^3 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a33} \cdot |\ldots|_1 \cdot w_3 + e^4 \cdot \overline{\overline{o}}(1) + e^5 \cdot \overline{\overline{o}}(1) + \ldots + e^{20} \cdot 0, \qquad (36)$$

$$|\ldots|_6 = e^1 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a21} \cdot \overline{\overline{o}}(1) + e^2 \left(\int\limits_0^\pi \ldots\right)_{a22} \cdot |\ldots|_5 \cdot w_2 + e^3 \cdot 0 + e^4 \cdot 0 +$$

$$+e^{5}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a25}\cdot z^{N_3}\cdot|\dots|_5\cdot w_5+\dots+e^{20}\cdot 0, \quad (37)$$

$$|\dots|_7=e^{1}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a31}\cdot\overline{\overline{o}}\,(1)+e^{2}\cdot 0+e^{3}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a33}\cdot|\dots|_5\cdot w_3+$$
$$+e^{4}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a34}\cdot 0+e^{5}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a35}\cdot\overline{\overline{o}}\,(1)+\dots+e^{20}\cdot 0, \quad (38)$$

$$|\dots|_8=w_1e^{1}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a41}\cdot|\dots|_1+e^{2}\cdot 0+e^{3}\cdot 0+$$
$$+e^{4}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a44}\cdot|\dots|_5\cdot w_4+e^{5}\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a45}\cdot\overline{\overline{o}}\,(1)+e^{6}\cdot 0+\dots+e^{20}\cdot 0. \quad (39)$$

При выводе формул (34)–(39) мы учитывали, что в секторе 1) индикаторной диаграммы основными по росту являются экспоненты $e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi}$ и $e^{a(w_2+w_3+w_4)s\pi}$, остальные экспоненты в этом секторе представляют собой бесконечно малые величины: $e^{a(w_1+w_2+w_4)s\pi}=\overline{\overline{o}}\,(1)\,, e^{a(w_1+w_2+w_5)s\pi}=\overline{\overline{o}}\,(1)\,, e^{a(w_3+w_4+w_5)s\pi}=\overline{\overline{o}}\,(1)$ и так далее.

С помощью формул (34)–(39) и (31)–(32) уравнение (33), (30) можно переписать в следующем виде:

$$y_1\,(s)=\left[e^{a(w_1-w_4)s\pi}-z^{M_{17}}\cdot z^{N_3}\right]-\frac{1}{20a^{19}s^{19}}\cdot\left\{[\dots]_{10}-z^{M_{17}}\cdot[\dots]_{11}\right\}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{38}}\right)=0, \quad (40)$$

$$[\dots]_{10}=w_1\cdot\sigma_1\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a11}+w_4\cdot z^{N_3}\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a14}+w_2\cdot\sigma_1\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a22}+$$
$$+w_3\cdot\sigma_1\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a33},\sigma_1=e^{a(w_1-w_4)s\pi}, \quad (41)$$

$$[\dots]_{11}=w_2\cdot z^{N_3}\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a22}+w_3\cdot z^{N_3}\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a33}+$$
$$+w_1\cdot\sigma_1\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a41}+w_4\cdot z^{N_3}\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a44}, \quad (42)$$

причём в силу формул (9) – (10) отметим, что

$$\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a11}=\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a22}=\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a33}=\left(\int_{0}^{\pi}\dots\right)_{a44}=\int_{0}^{\pi}q\,(t)\,dt_{a11}. \quad (43)$$

Основное приближение уравнения (40)–(42) имеет вид

$$e^{a(w_1-w_4)s\pi} - z^{M_{17}} \cdot z^{N_3} = 0 \, (=) \, e^{a(w_1-w_4)s\pi} =$$
$$= e^{2\pi ik} \cdot e^{\frac{2\pi i}{20}\cdot M_{17}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{20}\cdot N_3} \, (=) \, s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2\pi i}{a\pi \left(w_1 - w_4\right)} \cdot \widetilde{k}, \widetilde{k} = k + \frac{M_{17}+N_3}{20}, k \in Z.$$

Поэтому в силу общей теории нахождения корней квазиполиномов вида (40)–(42) (см. [25]–[26]) справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторе* 1) *имеет вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2i}{a\left(w_1-w_4\right)} \cdot \left[\widetilde{k} + \frac{d_{19,k,1}}{\widetilde{k}^{19}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{38}}\right)\right], \widetilde{k} = k + \frac{M_{17}+N_3}{20}, k \in Z. \tag{44}$$

Найдём коэффициенты $d_{19,k,1}$ из (44) в явном виде. По формулам Маклорена имеем:

$$e^{a(w_1-w_4)s\pi}\Big|_{s_{k,1}} = e^{2\pi i\left[\widetilde{k}+\frac{d_{19,k,1}}{\widetilde{k}^{19}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{38}}\right)\right]} = z^{M_{17}} \cdot z^{N_3} \cdot \left[1 + \frac{2\pi i d_{19,k,1}}{\widetilde{k}^{19}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{38}}\right)\right], \tag{45}$$

$$\frac{1}{s^{19}}\Big|_{s_{k,1}} = \frac{a^{19}\cdot\left(w_1-w_4\right)^{19}}{2^{19}\cdot i^{19}} \cdot \frac{1}{\widetilde{k}^{19}} \cdot \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{20}}\right)\right). \tag{46}$$

Подставляя формулы (44)–(46) в уравнение (40)–(42), с учётом формулы (43) получаем:

$$\left[z^{M_{17}} \cdot z^{N_3} + \frac{2\pi i \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{N_3} \cdot d_{19,k,1}}{\widetilde{k}^{19}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{38}}\right) - z^{M_{17}} \cdot z^{N_3}\right] -$$
$$- \frac{1}{20a^{19}} \cdot \frac{a^{19}\cdot\left(w_1-w_4\right)^{19}}{2^{19}} \cdot \frac{1}{\widetilde{k}^{19}} \cdot \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{20}}\right)\right) \left\{[\ldots]_{10} - z^{M_{17}}\,[\ldots]_{11}\right\}\Big|_{s_{k,1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{38}}\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$d_{19,k,1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot z^{-M_{17}} \cdot z^{-N_3} \cdot \frac{\left(w_1-w_4\right)^{19}}{2^{19}\cdot 20} \cdot \left\{[\ldots]_{10} - z^{M_{17}}\,[\ldots]_{11}\right\}\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}. \tag{47}$$

Из формул (41)–(44) получаем:

$$\left\{[\ldots]_{10} - z^{M_{17}}\,[\ldots]_{11}\right\}\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}} =$$
$$= \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a11} \cdot \left[\left(w_1+w_2+w_3\right)\cdot z^{M_{17}}\cdot z^{N_3} - \left(w_2+w_3+w_4\right)\cdot z^{M_{17}}\cdot z^{N_3}\right]\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}} +$$
$$+ \left[w_4 \cdot z^{N_3} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a14} \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{-M_{17}} - w_1 \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{N_3} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a14} \cdot z^{M_{17}}\right]_{12}\Bigg|_{s_{k,1,\text{осн}}}. \tag{48}$$

Вторая скобка в (48) в силу формул (9)–(10), (4) преобразуется следующим образом:

$$[\ldots]_{12} = z^{M_{17}} \cdot z^{N_3} \cdot \left[e^{\frac{3\pi i}{20}} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{20}\cdot M_{17}} \cdot \int_0^\pi q\left(t\right) \cdot e^{a(w_1-w_4)t\cdot\frac{2i\cdot\widetilde{k}}{a(w_1-w_4)}} \cdot dt_{a14} - \right.$$
$$\left. - e^{-\frac{3\pi i}{20}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{20}\cdot M_{17}} \cdot \int_0^\pi q\left(t\right) \cdot e^{-2i\cdot\widetilde{k}} \cdot dt_{a41}\right] \cdot e^{\frac{3\pi i}{20}} =$$

$$= 2i \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{N_3} \cdot e^{\frac{3\pi i}{20}} \cdot \int\limits_0^{\pi} q(t) \cdot \sin\left[2\widetilde{k}t + \frac{3\pi}{20} - \frac{2\pi}{20} \cdot M_{17}\right] \cdot dt_{k1}. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (48) и делая необходимые преобразования, из (47) получаем:

$$d_{19,k,1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{(w_1 - w_4)^{20}}{2^{19} \cdot 20} \cdot \left[\left(\int\limits_0^{\pi} \ldots\right)_{a11} + \frac{1}{w_1 - w_4} \cdot 2i \cdot e^{\frac{3\pi i}{20}} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \ldots\right)_{k1}\right]. \quad (50)$$

Применяя (4), находим, что $w_1 - w_4 = 1 - e^{\frac{2\pi i}{20} \cdot 3} = e^{\frac{3\pi i}{20}} \cdot \left(e^{-\frac{3\pi i}{20}} - e^{\frac{3\pi i}{20}}\right) = (-2i) \cdot e^{\frac{3\pi i}{20}} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)$, поэтому формулы (50) и (44) можно привести к следующему виду:

$$s_{k,1} = -\frac{1}{a \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)} \cdot e^{-\frac{3\pi i}{20}} \cdot \left[\widetilde{k} + \frac{d_{19,k,1}}{\widetilde{k}^{19}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{38}}\right)\right], \widetilde{k} = k + \frac{M_{17} + N_3}{20}, k \in N, \quad (51)$$

$$d_{19,k,1} = \frac{\sin^{20}\left(\frac{3\pi}{20}\right)}{20\pi} \cdot \left[\int\limits_0^{\pi} q(t)\, dt_{a11} - \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)} \cdot \int\limits_0^{\pi} q(t) \cdot \sin\left[2\widetilde{k}t + \frac{3\pi}{20} - \frac{2\pi}{20} \cdot M_{17}\right] dt_{k1}\right]. \quad (52)$$

Исследуя аналогичным образом сектора 2), 3), ..., 20) индикаторной диаграммы, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторах* $2), 3), \ldots, 20)$ *индикаторной диаграммы имеет следующий вид:*

$$s_{k,2} = s_{k,1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{20}}; s_{k,3} = s_{k,2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{20}} = s_{k,1} \cdot e^{\frac{4\pi i}{20}}; \ldots; s_{k,m} = s_{k,1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{20}(m-1)}, m = 1, 2, \ldots, 20, \quad (53)$$

при этом $\lambda_{k,m} = s_{k,m}^{20}, m = 1, 2, 3, \ldots, 20; k \in N$.

7. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА (1)–(2)–(3)

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 6. *Асимптотика собственных функций* $h_k(x,s)$ *дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторе* 1) *индикаторной диаграммы может быть найдена по формуле:*

$$h_k(x,s) = \left. \begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s) & y_2^{(m_1)}(0,s) & \ldots.. & y_{19}^{(m_1)}(0,s) & y_{20}^{(m_1)}(0,s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(m_{17})}(0,s) & y_2^{(m_{17})}(0,s) & \ldots.. & y_{19}^{(m_{17})}(0,s) & y_{20}^{(m_{17})}(0,s) \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & \ldots.. & y_{19}^{(n_1)}(\pi,s) & y_{20}^{(n_1)}(\pi,s) \\ y_1^{(n_2)}(\pi,s) & y_2^{(n_2)}(\pi,s) & \ldots.. & y_{19}^{(n_2)}(\pi,s) & y_{20}^{(n_2)}(\pi,s) \\ y_1(x,s) & y_2(x,s) & \ldots.. & y_{19}(x,s) & y_{20}(x,s) \end{vmatrix} \right|_{s=s_{k,1}},$$

где $y_k(x,s)$ *определены в (9)–(10),* $s_{k,1}$ *находятся по формулам (51)–(53).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birkhoff, G. D. On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter / G. D. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — V. 9. — P. 219–231.

2. Тамаркин, Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / Я. Д. Тамаркин. — Петроград, 1917. — 308 с.

3. Марченко, В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 329 с.

4. Лундина, Д. Ш. Точная зависимость между асимптотическими разложениями собственных значений краевых задач Штурма–Лиувилля и гладкостью потенциала / Д. Ш. Лундина // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1982. — № 37. — С. 74–101.

5. Митрохин, С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами / С. И. Митрохин // Вестник МГУ. Серия : математика, механика. — 1986. — № 6. — С. 3–6.

6. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами / С. И. Митрохин // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28, № 3. — С. 530–532.

7. Ильин, В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора / В. А. Ильин // Математические заметки. — 1977. — Т. 22, № 5. — С. 698–723.

8. Gottlieb, H. P. W. Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients / H. P. W. Gottlieb // Journal of Math. Anal. and Appl. — 1988. — V. 132. — P. 123–137.

9. Митрохин, С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией / С. И. Митрохин // Доклады РАН. — 1997. — Т. 356, № 1. — С. 13–15.

10. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 6. — С. 578–582.

11. Бурлуцкая, М. Ш. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 64–71.

12. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // УМН. — 2008. — Т. 63, вып. 1(379). — С. 111–154.

13. Иванникова, Т. А. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 2(1). — С. 3–8.

14. Поляков, Д. М. Спектральные свойства дифференциального оператора четвёртого порядка / Д. М. Поляков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 179–181.

15. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвёртого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

16. Hald, O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems / O. H. Hald // Communs Pure and Appl. Math. — 1984. — V. 37. — P. 539–577.

17. Винокуров, В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом / В. А. Винокуров, В. А. Садовничий // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1423–1426.

18. Митрохин, С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами / С. И. Митрохин // Вестник Московского университета. Серия: математика, механика. — 2009. — № 3. — С. 14–17.

19. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом / С. И. Митрохин // Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 95–115.

20. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией / С. И. Митрохин // Вестник СамГУ. Естественнонауч. серия. — 2008. — № 8 (1/67). — С. 172–187.

21. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечётного порядка с суммируемым потенциалом / С. И. Митрохин // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 2. — С. 1808–1811.

22. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

23. Левитан, Б. М. Введение в спектральную теорию / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М. : Наука, 1970. — 672 с.

24. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.

25. Садовничий, В. А. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса / В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, Ю. Белабасси // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 254, № 6. — С. 1346–1348.

26. Митрохин, С. И. О «расщеплении» кратных в главном собственных значений краевых задач / С. И. Митрохин // Известия ВУЗов. Серия : математика. — 1997. — № 3 (418). — С. 38–43.

REFERENCES

1. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter. Trans. Amer. Math. Soc., 1908, vol. 9, pp. 219–231.

2. Tamarkin J.D. About some general problems of the theory of ordinary linear differential equations. [Tamarkin Ya.D. O nekotorykh obshchikh zadachakh teorii obyknovennykh lineynykh differentsial'nykh uravneniy]. Petrograd, 1917, 308 p.

3. Marchenko V.A. Sturm-Liouville operators and their applications. [Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillya i ikh prilozheniya]. Kiev: Naukova Dumka, 1977, 329 p.

4. Lundina D.Sh. Exact relationship between the asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems of the Sturm-Liouville problem and the smoothness of the potential. [Lundina D.Sh. Tochnaya zavisimost' mezhdu asimptoticheskimi razlozheniyami sobstvennykh znacheniy kraevykh zadach Shturma-Liuvillya i gladkost'yu potentsiala]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya — The theory of functions, functional analysis and their applications*, 1982, iss. 37, pp. 74–101.

5. Mitrokhin S.I. About formulas of regularized traces for differential operators of the second order with discontinuous coefficients. [Mitrokhin S.I. O formulakh regulyarizovannykh sledov dlya differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya: matematika, mehanika — Vestnik MGU. Series: Mathematics, mechanics*, 1986, iss. 6, pp. 3–6.

6. Mitrokhin S.I. About spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients. [Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov s razryvnymi koeffitsientami]. *Differentsial'nye uravneniya — Differential equations*, 1992, vol. 28, iss. 3, pp. 530–532.

7. Il'in V. A. About the convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of coefficients of the differential operator. [Il'in V. A. O skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam v tochkakh razryva koeffitsientov differentsial'nogo operatora]. *Matematicheskie zametki — Mathematical notes*, 1977, vol. 22, iss. 5, pp. 698–723.

8. Gottlieb H.P.W. Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients. Journal of Math. Anal. and Appl., 1988, vol. 132, pp. 123–137.

9. Mitrokhin S.I. About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function. [Mitrokhin S.I. O nekotorykh spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnoy vesovoy funktsiey]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1997, vol. 356, iss. 1, pp. 13–15.

10. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. About irregular extension of the oscillation theory of the spectral Sturm-Liouville problem. [Pokornyy Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii ostsillyatsionnoy teorii spektral'noy zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, iss. 6, pp. 578–582.

11. Burlutskaya M.Sh. Asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions of the functional-differential operator with involution. [Burlutskaya M.Sh. Asimptoticheskie formuly dlya sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy funktsional'no-differentsial'nogo operatora s involyutsiey]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 64–71.

12. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. The oscillation theory of the Sturm–Liouville for impulse problems. [Pokornyy Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Ostsillyatsionnaya teoriya Shturma-Liuvillya dlya impul'snykh zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1(379), pp. 111–154.

13. Ivannikova T.A., Timashova E.B. Shabrov S.A. About necessary condition for the minimum of a quadratic functional with Stieltjes integral and zero coefficient under highest derivative on the part of the interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobkhodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funktsionala s integralom Stil't'esa i nulevym koeffitsientom pri starshey proizvodnoy na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 2(1), pp. 3–8.

14. Polyakov D.M. Spectral properties of the differential operator of the fourth order. [Polyakov D.M. Spektral'nye svoystva differentsial'nogo operatora chetvyertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 179–181.

15. Shabrov S.A. About estimates of the function of influence for one mathematical model of the fourth order. [Shabrov S.A. Ob otsenkakh funktsii vliyaniya odnoy matematicheskoy modeli chetvyertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

16. Hald O.H. Discontinuous inverse eigenvalue problems. Communs Pure and Appl. Math., 1984, vol. 37, pp. 539–577.

17. Vinokurov V.A., Sadovnichii V.A. Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm-Liouville problem on a segment with a summable potential. [Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asimptotika lyubogo poryadka sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy kraevoy zadachi Shturma-Liuvillya na otrezke s summiruemym potentsialom]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1998, vol. 34, iss. 10, pp. 1423–1426.

18. Mitrokhin S.I. Asymptotics of the eigenvalues of the differential operator of the fourth order with summable coefficients. [Mitrokhin S.I. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsial'nogo operatora chetvyertogo poryadka s summiruemymi koeffitsientami]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya: matematika, mehanika — Vestnik MGU. Series: Mathematics, mechanics*, 2009, iss. 3, pp. 14–17.

19. Mitrokhin S.I. About spectral properties of one differential operator with summable coefficients with a retarded argument. [Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh odnogo differentsial'nogo operatora s summiruemymi koeffitsientami s zapazdyvayushchim argumentom]. *Ufimskiy matematichkiy zhurnal — Ufa mathematical Journal*, 2011, vol. 3, iss. 4, pp. 95–115.

20. Mitrokhin S.I. About spectral properties of the differential operator with summable potential and smooth weight function. [Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh differentsial'nogo operatora s summiruemym potentsialom i gladkoy vesovoy funktsiey]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya — Vestnik of SamGU. Estestvennonauch. series*, 2008, iss. 8 (1/67), pp. 172–187.

21. Mitrokhin S.I. About spectral properties of differential operators of odd order with a summable potential. [Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov nechyetnogo poryadka s summiruemym potentsialom]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2011, vol. 47, iss. 2, pp. 1808–1811.

22. Naimark M.A. Linear differential operators. [Najmark M.A. Lineynye differencial'nye operatory]. Moscow: Nauka, 1969, 528 p.

23. Levitan B.M., Sargsyan I.S. Introduction to the spectral theory. [Levitan B.M., Sargsyan I.S. Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu]. Moscow: Nauka, 1970, 672 p.

24. Bellman R., Cooke K.L. Differential-difference equations. [Bellman R., Kuk K.L. Differentsial'no-raznostnye uravneniya]. Moscow: Mir, 1967, 548 p.

25. Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A., Belabassi Yu. About regularized sums of the roots of the entire function of one class. [Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A., Belabassi Yu.O regulyarizovannykh summakh korney tseloy funktsii odnogo klassa]. *Doklady AN SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1980, vol. 254, iss. 6, pp. 1346–1348.

26. Mitrokhin S.I. About "splitting" in the main multiple eigenvalues of boundary value problems. [Mitrokhin S.I. O «rasshcheplenii» kratnykh v glavnom sobstvennykh znacheniy kraevykh zadach]. *Izvestiya vuzov. Seriya: matematika — Proceedings of the universities. Series: Mathematics*, 1997, iss. 3 (418), pp. 38–43.

Митрохин Сергей Иванович, старший научный сотрудник НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru
Тел.: 8–916–506–51–75

Mitrokhin Sergey Ivanovich, senior researcher of computer center of Moscow State University of the M. V. Lomonosov, candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor, Moscow, Russian Federation
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru
Tel.: 8–916–506–51–75