УДК 517.9

ФОРМУЛА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. З. Мешков[1], И. П. Половинкин[1], М. В. Половинкина[2], Ю. Д. Ермакова[1], С. А. Рабееах[1]

[1] — *Воронежский государственный университет,*
[2] — *Воронежский государственный университет инженерных технологий*

Поступила в редакцию 11.01.2016 г.

Аннотация. В работе получена формула среднего значения для двумерного линейного однородного гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами, простыми характеристиками и однородным символом. Доказанная формула среднего значения может быть интерпретирована как распространение на случай произвольного порядка уравнения известной теоремы о среднем (принципа Асгейрссона) для уравнения колебаний струны, которая, в свою очередь, тоже может быть сконструирована с помощью символического подхода из формулы среднего для двумерного уравнения первого порядка. Кроме того, эта формула представляет собой точное разностное соотношение для решения указанного уравнения.

Ключевые слова: формула среднего, сопровождающее распределение, разностное соотношение.

A MEAN-VALUE FORMULA FOR A TWO-DIMENSIONAL LINEAR HYPERBOLIC EQUATION

V. Z. Meshkov, I. P. Polovinkin, M. V. Polovinkina, Yu. D. Ermakova, S. A. Rabeeakh

Abstract. We obtained a mean-value formula for the two-dimensional linear homogeneous hyperbolic equation with constant coefficients, simple characteristics and a homogeneous symbol. The proven formula can be interpreted as the expansion into the case of arbitrary order of the well-known mean-value theorem (Asgeirsson principle) for the string vibration equation, which, in turn, can also be designed using the symbolic approach from the mean-value formulas for two-dimensional equations of the first order. In addition, this formula is an exact difference scheme for the specified equations.

Keywords: mean-value formula, accompanying distribution, difference scheme.

Термины "формула среднего", "теорема о среднем" в литературе встречаются весьма часто. Иногда под этим понимают несколько разнородные факты. Нас интересуют свойства средних значений решений дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее широко известны теоремы о среднем для эллиптических уравнений, в частности, классические теоремы о среднем значении для уравнений Лапласа и Гельмгольца (см., напр., [1]). В работах В.А. Ильина и Е.И. Моисеева (см., напр., [2] – [3]) получены формулы среднего для эллиптических операторов более общего вида.

Известны также и теоремы о среднем для гиперболических уравнений, среди которых прежде всего следует указать на классический принцип Асгейрсона (см. [4]) для ультрагиперболического уравнения и теорему А. В. Бицадзе и А. М. Нахушева о среднем значении для волнового уравнения (см. [5]). Здесь следует отметить, что в частном случае уравнения колебаний струны формула Асгейрссона превращается в разностное соотношение. В работах Л. Зальцмана [6] и А. В. Покровского [7] был выработан особый подход к получению формул среднего, связанный с анализом символа оператора. Этот подход (символический) с помощью методов Л. Хермандера [8] был обобщен в работе [9]. Именно он используется ниже.

Пусть $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$, $j = 1,\ldots,n$, $D = (D_1,\ldots,D_n)$, мультииндекс $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ имеет неотрицательные целые координаты, i — мнимая единица, $x^\beta = x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$. Через $\delta(x-x_0)$ обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0. Символом "$*$" будем обозначать свертку распределений.

Рассмотрим уравнение

$$P(D)u \equiv \sum_{|\beta|\leqslant m} a_\beta D^\beta u = 0. \tag{1}$$

Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{|\beta|\leqslant m} a_\beta \xi^\beta$ будет символом оператора $P(D)$.

Определение. *Распределение Φ с компактным носителем назовем сопровождающим (сопровождением) уравнение(я) (1) (оператор(а) $P(D)$), если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство*

$$\langle \Phi, u\rangle = 0, \tag{2}$$

называемое формулой среднего значения для уравнения (1).

Базовым результатом для дальнейшего повествования будет следующее утверждение.

Теорема А *(см. [9]). Пусть $P(D) = P_1(D)P_2(D)$, где P_1 и P_2 суть многочлены. Пусть Φ_l — финитное распределение, сопровождающее оператор $P_l(D)$, $l = 1,2$. Тогда распределение*

$$\Phi = \Phi_1 * \Phi_2$$

является сопровождением оператора $P(D) = P_1(D)P_2(D)$.

Рассмотрим уравнение

$$(a_1\partial/\partial x + b_1\partial/\partial t)\,(a_2\partial/\partial x + b_2\partial/\partial t)\,(a_m\partial/\partial x + b_m\partial/\partial t)\,u = 0. \tag{3}$$

Будем называть прямую, заданную уравнением $b_jx - a_jt = const$, характеристикой j−го типа для уравнения (3), $j = 1,2,\ldots,m$. Будем считать, что все характеристики уравнения (3) просты. Пусть $Z = (x,t)$. Рассмотрим финитные распределения вида

$$\Phi_j(Z) = \delta(Z - Q_j^0) - \delta(Z - Q_j^1), \quad j = 1,\ldots,m, \tag{4}$$

где каждая пара точек

$$Q_j^{\alpha_j} = (\xi_j^{\alpha_j},\tau_j^{\alpha_j}),\ \alpha_j \in \{0;1\}, \quad j = 1,\ldots,m, \tag{5}$$

лежит на характеристике j−го типа. Совершенно очевидно, что каждое распределение $\Phi_j(Z)$ является сопровождением оператора $(a_j\partial/\partial x + b_j\partial/\partial t)$, $j = 1,\ldots,m$. Поэтому, в силу теоремы А, финитное распределение

$$\Phi(Z) = \Phi_1(Z) * \Phi_2(Z) * \cdots * \Phi_m(Z) =$$

$$= (\delta(Z - Q_1^0) - \delta(Z - Q_1^1)) * \cdots * (\delta(Z - Q_m^0) - \delta(Z - Q_m^1)). \tag{6}$$

будет сопровождением уравнения (3).

Принимая во внимание известную формулу $\delta(Z-Z_1)*\delta(Z-Z_2)=\delta(Z-Z_1-Z_2)$, опишем сопровождение (6) и соответствующую ему формулу среднего. Обозначим символом "$\oplus$" операцию сложения булевых переменных по модулю 2. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $l=\alpha_1\oplus\cdots\oplus\alpha_m$. Обозначим через Θ множество всех наборов $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\alpha_j\in\{0;1\}$, $j=1,\ldots,m$. Пусть

$$A_l^\alpha=\sum_{j=1}^m Q_j^{\alpha_j}. \tag{7}$$

В этих обозначениях сопровождение (6) уравнения (3) запишется в виде

$$\Phi(Z)=\sum_{\alpha\in\Theta}(-1)^l\delta(Z-A_l^\alpha), \tag{8}$$

а соответствующая формула среднего для уравнения (3) будет иметь вид

$$\sum_{\alpha\in\Theta}(-1)^l u(A_l^\alpha)=0. \tag{9}$$

Отметим, что две точки $A_l^\alpha=(\eta_l^\alpha,\omega_l^\alpha)$ и $A_s^\gamma=(\eta_s^\gamma,\omega_s^\gamma)$, определенные формулой (7), будут лежать на характеристике j-го вида тогда и только тогда, когда их верхние мультииндкесы

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m), \gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m),\ \alpha_j,\gamma_j\in\{0;1\},\ j=1,\ldots,m,$$

связаны соотношениями

$$\alpha_k=\gamma_k,\ k=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m,\ \gamma_j=\neg\alpha_j,\ s=\neg l=l\oplus 1, \tag{10}$$

где "$\neg$" означает операцию отрицания.

Множество всех точек A_l^α, определенных формулой (7), вместе со всеми отрезками характеристик, соединяющих пары точек A_l^α и A_l^γ, удовлетворяющих соотношениям (10), можно рассматривать как граф с вершинами в точках A_l^α и ребрами в виде указанных отрезков характеристик. Обозначим этот граф символом G и назовем его характеристическим. С другой стороны, для всякого характеристического графа G вершины A_l^α могут быть представлены в виде (7). Распространяя формулу (9) на произвольные негулярные решения уравнения (3), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Пусть $u(Z)=u(x,t)$ — регулярное решение уравнения (3), а G — произвольный характеристический граф с вершинами A_l^α. Тогда имеет место точное разностное соотношение — формула среднего (9).*

При $m=3$ эта теорема доказана в [10], при $m=4$ — в [11], но примененные там средства не позволяли обобщить результаты на случай произвольного порядка.

Мы рассмотрели случай, когда все характеристики уравнения (3) просты. Если отказаться от этого предположения и допустить наличие кратных характеристик, формально формула (9) не изменится, только на каждой кратной характеристике в этом случае можно располагать не по две точки, а в количестве, равном удвоенной ее кратности. В самом простом случае, когда имеется единственная характеристика с кратностью m, уравнение (3) примет вид

$$(a\,\partial/\partial x+b\,\partial/\partial t)^m\,u=0. \tag{11}$$

Это уравнение после замены $\eta=x$, $\xi=b\,x-a\,t$ приведется к виду

$$\frac{\partial^m u}{\partial\eta^m}=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) — обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое переменная ξ входит как параметр. Общим решением этого уравнения является полином одной переменной η степени $m-1$. В этом случае формула (9) приобретает вид формулы включений-исключений для полинома степени $m-1$

$$u(0)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}u(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}), \tag{13}$$

где $x_1,\ldots,x_m$ суть произвольные точки числовой прямой.

Отметим еще одно обстоятельство. Известен следующий результат (теорема о среднем для уравнения колебаний струны, или одномерный принцип Асгейрссона): если функция двух переменных *u(x,t)* является регулярным решением уравнения колебаний струны $u_{tt}=u_{xx}$, то она удовлетворяет равенству $u(x_1,t_1)+u(x_3,t_3)=u(x_2,t_2)+u(x_4,t_4)$, где (x_i,t_i), $i=$1,2,3,4, суть последовательно пронумерованные вершины прямоугольника, образованного линиями $x\pm t=x_i\pm t_i$, i=1,2,3,4. Легко теперь видеть, что этот результат тоже может быть сконструирован с помощью изложенной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, П. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.

2. Ильин, В. А. О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами / В. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5, № 11. — С. 1940–1978.

3. Ильин, В. А. Формула среднего значения для присоединенных функций оператора Лапласа / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 17, № 10. — С. 1908–1910.

4. Йон, Ф. Плоские волны и сферические средние / Ф. Йон. — М. : Издательство иностранной литературы, 1958. — 158 с.

5. Бицадзе, А. В. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях / А. В. Бицадзе, А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10, № 12. — С. 2184–2191.

6. Zalcman, L. Mean values and differential equations / L. Zalcman // Israel J. Math. — 1973. — V. 14. — P. 339–352.

7. Покровский, А. В. Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными / А. В. Покровский // Математические заметки. — 1998. — Т. 64, вып. 2. — С. 260–272.

8. Хермандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1 / Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.

9. Мешков, В. З. О получении новых формул среднего значения для динейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В. З. Мешков, И. П. Половинкин // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 12. — С. 1724–1731.

10. Разностная формула среднего значения для двумерного линейного гиперболического уравнения третьего порядка / В. З. Мешков, И. П. Половинкин, М. В. Половинкина и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 138–145.

11. Мешков, В. З. Разностная формула среднего значения для двумерного линейного гиперболического уравнения четвертого порядка / В. З. Мешков, Ю. Д. Ермакова, И. П. Половинкин // Проблемы математического анализа. — 2016. — Вып. 86. — С. 98–99.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. [Gilbarg D., Trudinger N. E'llipticheskie differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka]. Moscow: Nauka, 1989, 464 p.

2. Il'in V.A. Fourier Series in Fundamental Systems of Functions of the Beltrami Operator. [Il'in V.A. O ryadax Fur'e po fundamental'nym sistemam funkcij operatora Bel'trami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1969, vol. 5, no. 11, pp. 1940–1978.

3. Il'in V.A., Moiseev E.I. A Mean Value Formula for the Associated Equation of the Laplace Operator. [Il'in V.A., Moiseev E.I. Formula srednego znacheniya dlya prisoedinennyx funkcij operatora Laplasa]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1981, vol. 17, no. 10, pp. 1908–1910.

4. John F. Plane Waves and Spherical means. [Jon F. Ploskie volny i sfericheskie srednie]. Moscow, 1958, 158 p.

5. Bitsadze A.V., Nakhushev A.M. On the Theory of Equations of Mixed Type in Multidimentional Domains. [Bitsadze A.V., Nakhushev A.M. K teorii uravnenij smeshannogo tipa v mnogomernyx oblastyax]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1974, vol. 10, no. 12, pp. 2184–2191.

6. Zalcman L. Mean values and differential equations. Israel J. Math., 1973, vol. 14, pp. 339–352.

7. Pokrovskii A.V. Mean value theorems for solutions of linear partial differential equations. [Pokrovskii A.V. Teoremy o srednem dlya reshenij linejnyx differencial'nyx uravnenij s chastnymi proizvodnymi]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1998, vol. 64, iss. 2, pp. 260–272.

8. Hörmander L. The Analysis of Linear Differential Operators. [Xermander L. Analiz linejnyx differencial'nyx operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1]. Moscow: Mir, 1986, 464 p.

9. Meshkov V.Z., Polovinkin I.P. On the Derivation of New Mean-Value Formulas for Linear Differential Equations. [Meshkov V.Z., Polovinkin I.P. O poluchenii novyx formul srednego znacheniya dlya dinejnyx differencial'nyx uravnenij s postoyannymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 1724–1731.

10. Meshkov V.Z., Polovinkin I.P., Polovinkina M.V., Ermakova Yu.D., Rabeeah S.A. Difference Mean-Value Formula for Two-Dimensional Linear Hyperbolic Equations of Third Order. [Meshkov V.Z., Polovinkin I.P., Polovinkina M.V., Ermakova Yu.D., Rabeeah S.A. Raznostnaya formula srednego znacheniya dlya dvumernogo linejnogo giperbolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 138–145.

11. Meshkov V.Z., Ermakova Yu.D., Polovinkin I.P. Difference Mean-Value Formula for a Two-Dimensional Fourth Order Linear Hyperbolic Equation. [Meshkov V.Z., Ermakova Yu.D., Polovinkin I.P. Raznostnaya formula srednego znacheniya dlya dvumernogo linejnogo giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka]. *Problemy matematicheskogo analiza — Problems in Mathematical Analysis*, 2016, no. 86, pp. 98–99.

Мешков Виктор Захарович, Доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа, Воронеж, Россия
Тел.: 8–(473)220–83–48

Meshkov Viktor Z., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Tel.: 8–(473)220–83–48

Половинкин Игорь Петрович, Доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа
E-mail: polovinkin@yandex.ru
Тел.: 8–(473)220–83–48

Polovinkin Igor P., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkin@yandex.ru
Tel.: 8–(473)220–83–48

Половинкина Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет инженерных технологий, кафедра высшей математики, Воронеж, Россия
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Polovinkina Marina V., Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of High mathematics, Voronezh State University of engineering technologies, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Ермакова Юлия Дмитриевна, Бакалавр прикладной математики, магистрант, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа, Воронеж, Россия
Тел.: 8-(473)220–83–48

Ermakova Yulia. D., a postgraduate student, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Tel.: 8-(473)220–83–48

Рабееах Светлана Александровна, аспирант, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа, Воронеж, Россия
E-mail: srabeeakh@mail.ru
Тел.: 8-(473)220–83–48

Rabeeakh Svetlana A., a postgraduate student, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: srabeeakh@mail.ru
Tel.: 8-(473)220–83–48