УДК 519.624

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ*

М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.06.2016 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению модели деформаций разрывной стилтьесовской струны с особенностями типа δ'- взаимодействий и имеющей упругое закрепление на концах. Применяя расширенное толкование интеграла и меры Стилтьеса, предложенное Ю. В. Покорным, такая модель допускает поточечное определение как решений, так и соотношений. При этом краевые условия представляют собой реализацию уравнения в концевых точках замкнутого сегмента. Чтобы подчеркнуть, что используется расширенное толкование интеграла Стилтьеса, функция, стоящая под знаком дифференциала, заключается в квадратные скобки. В работе приведен алгоритм для нахождения приближенного решения рассматриваемой модели, получена оценка сходимости.

Ключевые слова: Стилтьесовская струна, интеграл Стилтьеса, разрывные решения, мера, метод конечных элементов.

THE ADAPTATION OF THE FINITE ELEMENTS METHOD FOR A PROBLEM WITH DISCONTINUOUS SOLUTIONS

M. B. Zvereva, S. A. Shabrov, Zh. O. Zalukaeva

Abstract. The present work is concerned with a study of a model of discontinuous Stiltjes string deformations with singularities of δ' -interactions type and which has springs at the ends. We applied expanded definitions of Stiltjes integral and measure, that were recommended by Yu. V. Pokornyi. This fact has allowed to preserve the pointwise interpretation of solutions and relations, moreover boundary conditions are the representation of the equation at the end points of the closed segment.To emphasize that we use expanded definition of Stiltjes integral, we conclude the function standing under the sign of the differential in brackets. The paper presents the algorithm for finding the approximate solution of the model, the estimate of convergence was obtained.

Keywords: Stiltjes string, Stiltjes integral, discontinuous solutions, measure, finite elements method.

В последнее время особое внимание уделяется исследованиям математических моделей, описывающих процессы, происходящие в струнных системах, в связи с их актуальностью во многих отраслях естествознания и техники. Наличие особенностей (упругие опоры, сосредоточенные внешние воздействия) у таких моделей может привести к трудно разрешимым проблемам из-за потери гладкости. Этот факт исключает возможность использования обыкновенных производных при моделировании и анализе. Применение теории обобщенных функций к таким моделям не дает нужного эффекта, так как позволяет доказать лишь наличие слабого решения.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

© Зверева М. Б., Шабров С. А., Залукаева Ж. О., 2016

В настоящей работе мы воспользуемся поточечным подходом с применением производных по мере, берущим начало в работе Стилтьеса о колебаниях струны с бусинками и получившим дальнейшее развитие в трудах М. Г. Крейна, Ф. Р. Гантмахера, О. Келлога (см. комментарии [1]). Данный подход был расширен Ю. В. Покорным при изучении одномерных граничных задач [2]-[3] и применен в работах [4]-[6], где для случая негладких решений была доказана осцилляционность спектра и изучены качественные свойства задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями $u(0) = u(\ell) = 0$. Однако численные методы для такого рода задач находятся в стадии формирования. Далее мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из [2], [3].

В настоящей работе изучается интегро-дифференциальное уравнение

$$-(pu'_\mu)(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0), \tag{1}$$

рассматриваемое на замкнутом сегменте $[0,\ell]$. Предполагается, что $p(x)$, и $F(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$, причем $\inf\limits_{(0,\ell)} p(x) = p_0 > 0$; функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0,\ell]$, $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$. Решение $u(x)$ уравнения (1) ищется в классе E функций μ-абсолютно непрерывных на $[0,\ell]$, производная которых u'_μ имеет ограниченную вариацию на $[0,\ell]$. Интеграл понимается по Стилтьесу в расширенном смысле, предложенном Ю.В. Покорным в [2], когда в точке разрыва мера "расщепляется". Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции ограниченной вариации на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)d[g(x)] = \int\limits_a^b f(x)dg_0(x) + \sum u(\xi-0)\Delta^- g(\xi) + \sum u(\xi+0)\Delta^+ g(\xi),$$

где суммирование ведется по всем точкам разрыва $g(x)$ из $[a,b]$, интеграл справа понимается по Лебегу-Стилтьесу, g_0 —непрерывная часть g. Здесь левый скачок функции g в точке ξ обозначен через $\Delta^- g(\xi)$, т.е. $\Delta^- g(\xi) = g(\xi) - g(\xi - 0)$, правый скачок функции g в точке ξ обозначен через $\Delta^+ g(\xi) = g(\xi+0) - g(\xi)$, полный скачок функции g в точке ξ будем обозначать через $\Delta g(\xi)$, т.е. $\Delta g(\xi) = g(\xi + 0) - g(\xi - 0)$. Также мы будем пользоваться формулой из [2]

$$\int\limits_a^b f(x)d[g(x)] = f(x)g(x)|_a^b - \int\limits_a^b g(x)df(x),$$

где интеграл справа понимается по Лебегу-Стилтьесу. Из уравнения (1) следуют равенства, являющиеся краевыми условиями третьего рода

$$-p(+0)u'_\mu(+0) + u(+0)\Delta^+ Q(0) = \Delta^+ F(0),$$

$$p(l-0)u'_\mu(l-0) + u(l-0)\Delta^- Q(l) = \Delta^- F(l).$$

Если ξ —точка разрыва $\mu(x)$, то

$$-\frac{p(\xi)\Delta u(\xi)}{\Delta\mu(\xi)} + p(\xi-0)u'_\mu(\xi-0) + u(\xi-0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi),$$

$$-p(\xi+0)u'_\mu(\xi+0) + \frac{p(\xi)\Delta u(\xi)}{\Delta\mu(\xi)} + u(\xi+0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi).$$

Если в точке s функция $\mu(x)$ непрерывна, но хотя бы одна из функций p, Q, F терпит разрыв, то выполняется равенство

$$-p(s+0)u'_\mu(s+0)+p(s-0)u'_\mu(s-0)+u(s)\Delta Q(s)=\Delta F(s).$$

Заметим, что уравнение (1) моделирует деформации разрывной стилтьесовской струны (цепочки из струн, упруго соединенных между собой пружинами), имеющей упругое закрепление в точках $x=0$ и $x=l$, и возникает как аналог уравнения Эйлера в задаче о минимизации функционала потенциальной энергии, имеющего вид

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{(0,\ell)} p(x)(u'_\mu(x))^2d\mu(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{[0,\ell]} u^2(x)\,d[Q(x)]-\int\limits_{[0,\ell]} u(x)\,d[F(x)].$$

Здесь функция $u(x)$ описывает форму струны, причем $u(x)$ может быть разрывна лишь в точках разрыва $\mu(x)$, $F(x)$ описывает распределение внешней нагрузки, $Q(x)$ — упругую реакцию внешней среды, $p(x)$ характеризует упругие свойства струны, причем в точках разрыва $\mu(x)$ значения $p(x)$ определяются равными упругостям пружин, соединяющих куски струн. Заметим, что

$$\int\limits_{(0,\ell)} p(x)u'^2_\mu(x)\,d\mu(x)=\int\limits_{[0,\ell]} p(x)u'^2_\mu(x)\,d\mu(x),$$

поскольку функция $\mu(x)$ предполагается непрерывной в точках $x=0$ и $x=\ell$, а значит, μ-мера этих точек равна нулю. Следовательно, собственное значение функции $p(x)u'^2_\mu(x)$ в точках $x=0$ и $x=\ell$ на рассматриваемый выше интеграл влияния не оказывает, поэтому будем полагать $p(0)u'_\mu(0)=p(\ell)u'_\mu(\ell)=0$. Воспользовавшись методами, развитыми в [4]—[6], можно показать, что уравнение (1) имеет единственное решение, которое представимо в виде $u(x)=\int\limits_0^\ell K(x,s)d[F(s)]$, где функция $K(x,s)$ строго положительна и ограниченна на $[0,\ell]\times[0,\ell]$.

Для нахождения приближенного решения (1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение Зафиксируем произвольное число $h>0$. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Предположим, что множество $S(\mu)$ конечное. Заменим всякую точку ξ разрыва функции $\mu(x)$ парой $\{\xi-0,\xi+0\}$ и обозначим полученное расширение отрезка $[0,l]$ через $\overline{[0,l]}_\mu$. Дополним $\overline{[0,\ell]}_\mu$ точками x_i^* так, чтобы на каждом промежутке $[0,\xi_1-0]$, $[\xi_1+0,\xi_2-0]$, ... $[\xi_n+0,\ell]$ выполнялись неравенства $\mu(x_{i+1}^*-0)-\mu(x_i^*+0)<\dfrac{h}{2}$. Таким образом мы получили разбиение множества $\overline{[0,l]}_\mu$. Если же множество $S(\mu)$ счетное, то выберем сначала точки ξ_i, в которых $\Delta\mu(\xi_i)>\dfrac{h}{2}$, заменим эти точки на пары $\{\xi_i-0,\xi_i+0\}$ и рассмотрим аналогичное разбиение построенного расширения $[0,\ell]$. Перенумеруем точки, входящие в разбиение как $0=x_0<x_1<...x_N=\ell$. Определим базисные функции $\varphi_k(x)$, где $k=1,...N-1$, следующим образом:

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu(x)-\mu(x_{k-1})}{\mu(x_k)-\mu(x_{k-1})}, & \text{если } x\in[x_{k-1},x_k]\\ \dfrac{\mu(x_{k+1})-\mu(x)}{\mu(x_{k+1})-\mu(x_k)}, & \text{если } x\in[x_k,x_{k+1}]\\ 0, \ \text{если } x\notin[x_{k-1},x_{k+1}]\end{cases}$$

Также определим базисные функции

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu(x_1)-\mu(x)}{\mu(x_1)-\mu(0)}, & x\in[0,x_1],\\ 0, \ \text{для остальных } x.\end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu(x) - \mu(x_{N-1})}{\mu(\ell) - \mu(x_{N-1})}, & x \in [x_{N-1},\ell], \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в точках разбиения. В связи с этим будем использовать в (1) вместо $u(x)$ функцию

$$v(x) = \sum_{i=0}^{N} v_i\varphi_i(x),$$

где v_i — значения $v(x)$ в точках разбиения. Из уравнения (1) следует, что

$$-\int_0^\ell \varphi_k d[pu'_\mu] + \int_0^\ell u\varphi_k d[Q] = \int_0^\ell \varphi_k d[F],$$

откуда

$$\int_0^\ell pu'_\mu\varphi'_{k\mu}d\mu + \int_0^\ell \varphi_k u d[Q] = \int_0^\ell \varphi_k d[F].$$

Подставив сюда функцию $v(x)$ вместо $u(x)$, получим систему из $N+1$ уравнения с $N+1$ неизвестными $\{v_0,v_1,...v_N\}$

$$\sum_{m=0}^{N} v_m \left(\int_0^\ell p\varphi'_{m\mu}\varphi'_{k\mu}d\mu + \int_0^\ell \varphi_m\varphi_k d[Q] \right) = \int_0^\ell \varphi_k d[F]. \tag{2}$$

Введем обозначение

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_0^\ell p\varphi'_\mu\psi'_\mu d\mu + \int_0^\ell \varphi\psi d[Q].$$

Очевидно, что последнее выражение представляет собой билинейный симметричный функционал в пространстве μ -непрерывных функций, имеющих производную, суммируемую с квадратом. Благодаря свойствам $p(x)$ и $Q(x)$ он еще и невырожденный, т.е.

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = \int_0^\ell p\varphi'^2_\mu d\mu + \int_0^\ell \varphi^2 d[Q] \geqslant 0$$

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0.$$

Поэтому этот функционал может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты рассматриваемой системы уравнений (2) $A_{ij} = \langle\varphi_i,\varphi_j\rangle = A_{ji}$ образуют матрицу Грамма системы линейно независимых векторов φ_i. Значит, определитель матрицы коэффициентов изучаемой системы уравнений отличен от нуля, откуда следует, что система (2) имеет единственное решение.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ —точное решение задачи (1); $v(x)$ —приближенное решение, найденное с помощью описанного выше алгоритма. Тогда*

$$\langle u - v, u - v\rangle \leqslant Ch,$$

причем, константа C не зависит от h.

Доказательство. Как мы уже замечали, уравнение (1) возникает из задачи о минимизации квадратичного функционала (потенциальной энергии)

$$\Phi(v) = \int_0^\ell \frac{pv_\mu'^2}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{v^2}{2} d[Q] - \int_0^\ell v d[F]. \tag{3}$$

Решение (1) и является точкой минимума функционала (3) на множестве E. Так как функционал (3) не содержит вторых производных, то его можно определить на функциях, у которых первая производная μ-суммируема с квадратом, т.е. на $\widehat{E}$ — пополнении E по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{E}} = \int_0^\ell pu_\mu'^2 d\mu + \int_0^\ell u^2 d[Q].$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимального значения функционала, поскольку каждое новое значение $\Phi(v)$ есть предел $\Phi(v_n)$, где $v_n \in E$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{E}} \to 0$. Поэтому, если u доставляет $\min\limits_E \Phi(v)$, то $\Phi(v_n) \geqslant \Phi(u)$, и следовательно, $\Phi(v) \geqslant \Phi(u)$ для всех $v \in \widehat{E}$.

В обратную сторону, минимизация $\Phi(v)$ на $\widehat{E}$ приводит к уравнению (1). В самом деле, для первой вариации функционала (3) имеем равенство:

$$\int_0^\ell pu_\mu' h_\mu' d\mu + \int_0^\ell uhd[Q] - \int_0^\ell hd[F] = 0.$$

Откуда следует, что

$$\int_0^\ell hd[-pu_\mu' + g - F] = 0,$$

где $g(x) = \int_0^x ud[Q] + const$. Значит,

$$-(pu_\mu')(x) + \int_0^x ud[Q] - F(x) = const,$$

т.е.

$$-(pu_\mu')(x) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0).$$

В силу свойств функций p,Q, F, функция u_μ' имеет ограниченную вариацию, причем, $u(x)$ является μ- абсолютно-непрерывной, т.е. $u \in E$. Таким образом, мы можем минимизировать $\Phi(v)$ на $\widehat{E}$. Другими словами, в качестве базисных функций мы можем действительно брать описанные выше функции. После решения линейной системы мы получим приближенное решение $v(x)$, которое в тоже время будет аппроксимацией Ритца. Оценим разность между точным решением $u(x)$ и полученным приближенным решением $v(x)$.

Сначала оценим разность между точным решением и его интерполянтом $u_I(x)$ в энергетической норме, где

$$u_I(x) = \sum_{i=0}^N u(x_i)\varphi_i(x).$$

Обозначим $\omega(x) = u(x) - u_I(x)$. Заметим, что $\omega(\eta) = 0$ для всякой точки разбиения η. Имеем

$$\langle u - u_I, u - u_I \rangle = \langle \omega, \omega \rangle = \int\limits_0^\ell p\omega_\mu'^2 d\mu + \int\limits_0^\ell \omega^2 d[Q].$$

Заметим, что на $[x_i,x_{i+1}]$, где x_i и x_{i+1} не совпадают с элементами вида $\xi - 0$ и $\xi + 0$ соответственно, где ξ — точка разрыва μ, интерполянт $u_I(x)$ определен как

$$u_I(x) = u(x_i) + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)}(\mu(x) - \mu(x_i)).$$

Тогда для всех $x \in [x_i,x_{i+1}]$ верно

$$\omega(x) = \int\limits_{x_i}^{x} \omega_\mu'(s)d\mu(s) = \int\limits_{x_i}^{x} (u_\mu'(s) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)})d\mu(s).$$

Следовательно,

$$|\omega(x)| \leqslant \int\limits_{x_i}^{x} |u_\mu'(s)|d\mu(s) + |u(x_{i+1}) - u(x_i)|.$$

С другой стороны,

$$u(x) = \int\limits_0^x u_\mu'(s)d\mu(s) + u(0),$$

откуда

$$|u(x_{i+1}) - u(x_i)| \leqslant \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |u_\mu'(s)|d\mu(s).$$

Значит,

$$|\omega(x)| \leqslant 2 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |u_\mu'(s)|d\mu(s).$$

Поскольку $u(x)$ — решение (1), то

$$|u_\mu'(x)| \leqslant \frac{\sup\limits_{[0,\ell]} |u(x)| V_0^\ell(Q) + V_0^\ell(F)}{p_0} \leqslant \frac{V_0^\ell(F)(\sup\limits_{[0,\ell]\times[0,\ell]} K(x,s)V_0^\ell(Q) + 1)}{p_0} = A = const,$$

где символ V_a^b означает полную вариацию на $[a,b]$. Значит,

$$|\omega(x)| \leqslant 2A(\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)) \leqslant Ah.$$

Оценим теперь $\omega(x)$ в энергетической норме. Заметим, что

$$\int\limits_0^\ell p\omega_\mu'^2 d\mu = -\int\limits_0^\ell \omega d[p\omega_\mu'] = -\sum_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \omega d[p\omega_\mu'],$$

поскольку внеинтегральные слагаемые вида $\omega(\xi-0)\Delta^- p\omega_\mu'(\xi)$ и $\omega(\xi+0)\Delta^+ p\omega_\mu'(\xi)$ равны нулю. Значит,

$$\int\limits_0^\ell p\omega_\mu'^2 d\mu \leqslant \sum_i \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \omega d[p\omega_\mu'] \right| \leqslant hA(V_0^\ell(F) \sup_{[0,\ell]\times[0,\ell]} K(x,s)V_0^\ell(Q) + V_0^\ell(F) + AV_0^\ell(p)).$$

Для слагаемого $\int_0^\ell \omega^2 d[Q]$ из энергетической нормы верно

$$\int_0^\ell \omega^2 d[Q] = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega^2 d[Q] \leqslant h^2 A^2 V_0^\ell(Q).$$

Получили, что $\langle \omega,\omega\rangle \leqslant Ch$.

Остается показать, что верна оценка $\langle u-v, u-v\rangle \leqslant Ch$. Это следует из приведенного ниже аналога классического результата теории конечных элементов.

Предположим, что $u(x)$ минимизирует функционал $\Phi(v)$, задаваемый равенством (3), на множестве $\widehat{E}$. Обозначим через E_N конечномерное подпространство $\widehat{E}$. Тогда
1) минимум $\Phi(v_h)$ и минимум $\langle u-v_h,u-v_h\rangle$, где v_h пробегает подпространство E_N, достигается на одной и той же функции u_h.
2) по отношению к энергетическому скалярному произведению u_h есть проекция u на E_N, или, что то же самое, ошибка $u-u_h$ ортогональна E_N:

$$\langle u-u_h,v_h\rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in E_N. \tag{4}$$

3) функция u_h, на которой достигается минимум, удовлетворяет условию

$$\langle u_h,v_h\rangle = \int_0^\ell v_h d[F] \text{ для всех } v_h \in E_N \tag{5}$$

$$\langle u,v\rangle = \int_0^\ell v d[F] \text{ для всех } v \in \widehat{E}. \tag{6}$$

Как и в классической теории, для нас эта теорема ключевая. Более того, все три ее части тесно связаны.
Из 1) следует 2): в пространстве с энергетическим скалярным произведением функция из подпространства E_N, ближайшая к заданной функции u, всегда является ее проекцией на E_N. Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\langle u-u_h-v_h,u-u_h-v_h\rangle = \langle u-u_h,u-u_h\rangle - 2\langle u-u_h,v_h\rangle + \langle v_h,v_h\rangle.$$

Если справедливо равенство (4), то

$$\langle u-u_h,u-u_h\rangle \leqslant \langle u-u_h-v_h,u-u_h-v_h\rangle.$$

Равенство возможно только когда $\langle v_h,v_h\rangle = 0$, т.е. когда $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция, на которой $\langle u-v_h,u-v_h\rangle$ достигает минимум, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (6) справедливо для всех $v \in \widehat{E}$, то оно справедливо и для $v_h \in E_N$; вычитая из него (5), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3) — из него вытекает 2), и из него следует 1). Если u_h минимизирует $\Phi(v)$ на E_N, то

$$\Phi(u_h) \leqslant \Phi(u_h+\varepsilon v_h)$$

для всех ε и v_h. Заметив, что $\Phi(v) = \dfrac{1}{2}\langle u,u\rangle - \displaystyle\int_0^\ell u d[F]$, из предыдущего неравенства получим, что

$$0 \leqslant \varepsilon \left(\langle u_h,v_h\rangle - \int_0^\ell v_h d[F] \right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\langle v_h,v_h\rangle.$$

Так как неравенство верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h \rangle = \int\limits_0^\ell v_h d[F]$. Последнее выражает равенство нулю первой вариации функционала Φ в точке u_h по направлению v_h. Таким образом, утверждение 3) доказано. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аткинсон, Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи : пер. с англ. / Ф. Аткинсон. — М. : Мир, 1968. — 749 с.

2. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

3. Покорный, Ю. В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 262–265.

4. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

5. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

6. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями : качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен : Lap Lambert Academic Publishing, 2012. — 112 с.

REFERENCES

1. Atkinson F.V. Discrete and Continuous Boundary Problems. [Atkinson F. Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi]. Moscow: Mir, 1968, 749 p.

2. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

3. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Derivatives in a Generalized Sturm-Liouville Problem. [Pokornyj Yu.V. O differencialax Stilt'esa v obobshhennoj zadache Shturma-Liuvillya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2002, vol. 383, no. 5, pp. 262–265.

4. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Problem for Impulsive Problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

6. Zvereva M.B. Differential Equations with Discontinuous Solutions: Qualitative Theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)2–20–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)2–20–86–90

Шабров Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Aleksandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Залукаева Жанна Олеговна, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zalukaeva Zhanna Olegovna, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–86–90