УДК 519.178

ЦИКЛЫ ГРАФА ПЕРЕХОДОВ БАЗИСНОГО КОНЕЧНОГО АВТОМАТА И СВЯЗАННЫЕ ВОПРОСЫ

В. Н. Долгов[1], Б. Ф. Мельников[2], А. А. Мельникова[3]

[1] — *Тольяттинский государственный университет,*
[2] — *Академия государственной противопожарной службы МЧС России,*
[3] — *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»*

Поступила в редакцию 23.10.2015 г.

Аннотация. В статье рассматриваются объекты теории графов, используемые при работе с недетерминированными конечными автоматами. Такими объектами являются пути и циклы графа переходов базисного конечного автомата для заданного регулярного языка. Авторами были определены обобщённые функции разметки для языка, для которого заданный язык является собственным подмножеством, и сформулированы необходимые условия равенства этих двух языков. В настоящей статье подобные пути впервые были описаны для важного частного случая — детерминированных конечных автоматов; также была показана связь этих путей с путями произвольного недетерминированного конечного автомата, определяющего заданный регулярный язык. Кроме того, авторами были определены обобщённые функции разметки для языка, для которого заданный язык является собственным подмножеством. С помощью определённых нами обобщённых функций разметки были сформулированы необходимые условия равенства двух рассматриваемых нами языков.

Ключевые слова: недетерминированные конечные автоматы, базисный автомат, пути и циклы ориентированного графа, алгоритмы эквивалентного преобразования, универсальный автомат.

THE LOOPS OF THE BASIS FINITE AUTOMATON AND THE CONNECTED QUESTIONS

V. N. Dolgov, B. F. Melnikov, A. A. Melnikova

Abstract. The article deals with some objects of the graph theory, used by considering nondeterministic finite automata. These objects are paths and loops of the transition graph of the basis finite automaton defining the given regular language, and appropriate paths of some other automaton defining either the same language or its strict subset.

Loops and paths of the basis automaton are considered at first for the following purpose. In some processes of equivalent transformation of the given automaton (e.g., considering some minimization algorithms), we sometimes obtain an automaton, which is a subautomaton of so-called universal automaton for the given language.

However, this subautomaton can define not the given regular language, but its own subset. In this paper, we formulate a necessary condition of equality of these two languages.

Keywords: nondeterministic finite automata, the basis automaton, paths and cycles of a directed graph, algorithms for equivalent transformation, the universal automaton.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье мы рассматриваем объекты теории графов, использующиеся для решения некоторых проблем теории недетерминированных конечных автоматов (НКА) – в первую очередь для нескольких постановок задач их минимизации. Такими объектами являются пути и циклы ориентированного графа базисного автомата для заданного регулярного языка ([1], [2], [3]), а также *соответствующие* пути графа переходов в некотором НКА, задающем тот же самый язык либо его собственное подмножество.

Циклы и пути графа базисного автомата рассматриваются, в первую очередь, для следующей цели. В процессе преобразования заданного конечного автомата – например, при применении различных алгоритмов его минимизации [1] – мы, *удаляя некоторые циклы рассматриваемого автомата*, получаем автомат, который является подавтоматом универсального автомата для заданного регулярного языка [2] . Однако этот получаемый подавтомат может определять не сам заданный регулярный язык, а некоторое его собственное подмножество. В данной работе мы формулируем необходимые условия *равенства* двух этих языков – причём такие условия, которые удобны для практической реализации и применения в компьютерных программах, решающих различные задачи минимизации недетерминированных конечных автоматов.

Структура данной статьи следующая. В разделе 1 приводятся основные обозначения (ранее на английском языке определённые нами в [2], [11]) и рассматриваются вспомогательные утверждения. Основными из определяемых в разделе 1 объектов являются т.н. функции разметки состояний. Далее в разделе 2 приводится обобщение этих функций.

В разделе 3 определяются объекты теории графов, использующиеся для графов переходов НКА, а именно – пути и циклы в ориентированном графе *базисного автомата* для заданного регулярного языка. Также определяются *соответствующие* пути графа *некоторого заранее заданного* автомата, задающего тот же самый язык либо его собственное подмножество. В разделе 4 приводятся примеры определённых в предыдущих разделах объектов. В разделе 5 мы вводим понятие соответствующих путей базисного автомата и некоторого автомата, определяющего подмножество его языка и приводим некоторые вспомогательные утверждения.

Важно отметить следующий факт. В настоящей статье мы практически не рассматриваем вопросы, связанные со сложностью алгоритмов. Однако интуитивно понятно, что построение практически всех рассматриваемых нами объектов не требует дополнительных вычислений – а выполняется *в процессе построения двух канонических автоматов*: для заданного регулярного языка L и его зеркального образа L^R.

В заключении статьи приведены вопросы, которые авторы предполагают опубликовать в следующей статье; её можно будет рассматривать как продолжение данной. А одной из задач для будущего решения является получение оценок сложности описанных нами алгоритмов.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Недетерминированным конечным автоматом будем называть пятёрку

$$K = (\, Q,\Sigma,\delta,S,F\,), \qquad \text{где:} \tag{1}$$

- Q — множество состояний автомата K;

[1] В том числе эвристических алгоритмов. См. [4], [5], [6], [8] и др.

[2] Определение подавтомата см. в [9], определение универсального автомата – в [10], [7]; см. также раздел 1. Подробно универсальный автомат, а также его связь с циклами базисного автомата, авторы предполагают рассмотреть в следующей публикации.

- Σ — алфавит;
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ — функция переходов ($\mathcal{P}$ – множество подмножеств), в настоящей статье мы будем рассматривать автоматы без ε-переходов;
- S, F — множества стартовых и финальных состояний соответственно.

Иногда мы будем использовать $q_1 \xrightarrow[\delta_\delta]{a} q_2$ для обозначения перехода из состояния q_1 в состояние q_2 в соответствии с функцией δ.

При этом важно отметить, что, в отличие от [2], мы *не* будем обозначать язык автомата K как L, т.е. для заданного языка L равенство $\mathcal{L}(K) = L$ может *не* выполняться.

Введем понятие канонического автомата. Каноническим называется минимальный (относительно состояний) детерминированный автомат для заданного языка. Для *произвольного* регулярного языка L мы будем использовать все обозначения, введённые в [11]; например, канонические автоматы для языков L и L^R (т.е. автоматы $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$) мы будем обозначать следующим образом:

$$\widetilde{L} = (Q_\pi, \Sigma, \delta_\pi, \{s_\pi\}, F_\pi) \quad \text{и} \quad \widetilde{L^R} = (Q_\rho, \Sigma, \delta_\rho, \{s_\rho\}, F_\rho).$$

При этом мы не будем рассматривать пустой язык – поэтому оба приведённых канонических автомата имеют ровно по одной стартовой вершине.

Для любого состояния $q \in Q$ автомата K определим входной и выходной языки $\mathcal{L}_K^{in}(q)$, $\mathcal{L}_K^{out}(q)$, как языки, распознаваемые автоматами соответственно

$$(\,Q, \Sigma, \delta, S, \{q\}\,) \quad \text{и} \quad (\,Q, \Sigma, \delta, \{q\}, F\,).$$

В работах [2], [11] функции φ^{in} и φ^{out} и бинарное отношение # были определены кратко; в настоящей статье, используя иные обозначения вершин и функции перехода, приведём полные определения этих объектов.

Для заданного регулярного языка L бинарное отношение $\# \subseteq Q_\pi \times Q_\rho$ (для пар состояний автоматов $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$) определяется следующим образом:

$$A \# X \quad \text{тогда и только тогда, когда}$$
$$\Big(\exists uv \in L\Big) \Big(u \in \mathcal{L}_{\widetilde{L}}^{in}(A)\,, v^R \in \mathcal{L}_{\widetilde{L^R}}^{in}(X)\Big)\,.$$

Для некоторого всюду определенного детерминированного автомата

$$T = (\,Q_T, \Sigma, \delta_T, \{s_T\}, F_T)$$

и автомата K для рассматриваемого языка L [3] определим функцию

$$\varphi_{KT}^{in} : Q \to \mathcal{P}(Q_T)\,,$$

где для каждого $q \in Q$ и $\widetilde{q} \in Q_T$ множество $\varphi_{KT}^{in}(q)$ содержит $\widetilde{q}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathcal{L}_K^{in}(q) \cap \mathcal{L}_T^{in}(\widetilde{q}) \neq \varnothing \;. \quad ^{4)} \tag{2}$$

Для эквивалентного автомату K канонического автомата $\widetilde{L}$ обозначим функцию $\varphi_{K\widetilde{L}}^{in}$ записью φ_K^{in}. Далее определим аналогично функцию $\varphi_{K^R\widetilde{L^R}}^{in}$ и кратко обозначим её записью φ_K^{out}; итак,

$$\varphi_K^{in} : Q \to \mathcal{P}(Q_\pi) \quad \text{и} \quad \varphi_K^{out} : Q \to \mathcal{P}(Q_\rho)\,.$$

---

[3] Важно отметить, что *здесь* мы считаем равенство $L = \mathcal{L}(K)$ справедливым. Однако мы так полагаем только в процессе определения функций φ^{in} и φ^{out}.

[4] Условие (4) может быть легко проверено – см. простой алгоритм в [12].

Для языка L определяем соответствующий ему базисный автомат $\mathcal{BA}(L)$ (см. [1]; некоторые свойства таких автоматов были получены в [13], [14]). Базисным автоматом является пятёрка

$$\mathcal{BA}(L) = (\widehat{Q},\Sigma,\widehat{\delta},\widehat{S},\widehat{F}\,), \quad \text{где:} \tag{3}$$

- $\widehat{Q}$ – множество таких пар ${}^{A}_{X}$, что $A \in Q_\pi$, $X \in Q_\rho$ и $A\#X$;
- функция переходов $\widehat{\delta}$ определяется следующим образом: для всех ${}^{A}_{X},{}^{B}_{Y} \in \widehat{Q}$ (допускаем возможности $A = B$ и/или $X = Y$) и буквы $a \in \Sigma$ условие ${}^{A}_{X} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} {}^{B}_{Y}$ выполняется тогда и только тогда, когда одновременно $A \xrightarrow[\delta_\pi]{a} B$ и $Y \xrightarrow[\delta_\rho]{a} X$;
- $\widehat{S} = \left\{ \begin{smallmatrix} s_\pi \\ X \end{smallmatrix} \,\middle|\, s_\pi\#X \right\}$;
- аналогично для $\widehat{F}$: $\widehat{F} = \left\{ \begin{smallmatrix} A \\ s_\rho \end{smallmatrix} \,\middle|\, A\#s_\rho \right\}$.[5)]

Для состояния $\widehat{q} = {}^{A}_{X} \in \widehat{Q}$ будем писать $\alpha(\widehat{q}) = A$ и $\beta(\widehat{q}) = X$. Аналогично для $\mathcal{B} = (P,R)$ (где $P \subseteq Q_\pi$ и $R \subseteq Q_\rho$): мы будем писать $\alpha(\mathcal{B}) = P$ и $\beta(\mathcal{B}) = R$.

Таким образом, мы можем считать, что, рассматривая заданный регулярный язык L, мы можем для него построить:

- оба его канонических автомата (т.е. $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$), включая их состояния, функции переходов и т.д.;
- бинарное отношение $\#$;
- функции разметки состояний φ^{in} и φ^{out};
- базисный автомат $\mathcal{BA}(L)$.

При этом все указанные объекты строятся *одновременно*[6)] .

Иногда нужно рассматривать сильно связные компоненты ([15] и др.) графа переходов автомата $\mathcal{BA}(L)$. Для большинства рассматриваемых нами проблем достаточно языков, соответствующие базисные автоматы которых содержит *единственную* такую компоненту. К примеру, таковым является язык, задаваемый регулярным выражением

$$(a + ab + ba)^*. \tag{4}$$

Однако очевидно, что, например, базисный автомат для языка, который может быть определён регулярным выражением

$$c(a + ab + ba)^*,$$

содержит больше одной компоненты. Более подробно примеры будут рассмотрены в разделе 4.

---

5) Отметим ещё раз, что, согласно [2], s_π и s_ρ – единственные стартовые состояния автоматов $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$.

6) Как уже было отмечено, мы в настоящей статье практически не рассматриваем вопросы, связанные со сложностью алгоритмов. Однако в данном случае отметим, что построения функций φ^{in} и φ^{out} *не* требуют дополнительных вычислений: согласно приведённым в [11] алгоритмам, они могут быть построены *в процессе* детерминизации (и последующей «канонизации») заданного автомата.

2. ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ РАЗМЕТКИ СОСТОЯНИЙ

Далее в статье мы будем рассматривать пару (K,L), где K – автомат (1), а $L \subseteq \Sigma^*$ – такой регулярный язык, что
$$\mathcal{L}(K) \subseteq L \tag{5}$$
(но, вообще говоря, $\mathcal{L}(K) \neq L$).

В рассматриваемых далее построениях мы полагаем, что $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$ являются всюду определенными автоматами.[7] Затем для автомата, определяющего L (можно сказать, для $\widetilde{L}$, – как это было сделано в [2, Sect. 3]), построим функции $\varphi^{in}_{\widetilde{L}}$ и $\varphi^{out}_{\widetilde{L}}$. После этого[8] для заданного автомата K определим функции
$$\varphi^{in}_{K\widetilde{L}} \quad \text{и} \quad \varphi^{in}_{K^R\widetilde{L^R}} = \varphi^{out}_{K\widetilde{L}}$$
(так же, как мы делали в разделе 1). Введём 2 новые функции (Φ^{in}_{KL} и Φ^{out}_{KL}) следующим образом[9] :
$$\Phi^{in}_{KL} = \varphi^{in}_{K\widetilde{L}} \quad \text{и} \quad \Phi^{out}_{KL} = \varphi^{out}_{K\widetilde{L}}\,;$$
согласно изложенному, они являются функциями вида
$$\Phi^{in}_{KL} : Q \to \mathcal{P}(Q_\pi) \quad \text{и} \quad \Phi^{out}_{KL} : Q \to \mathcal{P}(Q_\rho)$$
(как и ранее, Q_π и Q_ρ суть множества состояний автоматов $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$).

Для рассматриваемой пары (K,L) будем называть функции Φ^{in}_{KL} и Φ^{out}_{KL} *обобщёнными функциями разметки состояний*. Важно отметить, что, несмотря на (5), мы *не можем* считать, что состояния автоматов $\widetilde{L_1}$ и $\widetilde{L_1^R}$ (где $L_1 = \mathcal{L}(K)$) являются подмножествами состояний автоматов $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$, т.е. что
$$\varphi^{in}_K \subseteq \Phi^{in}_{KL} \quad \text{и} \quad \varphi^{out}_K \subseteq \Phi^{out}_{KL}\,. \tag{6}$$

Справедливость последнего факта может быть легко продемонстрирована на примере. Пусть на рис. 1 приведён автомат $\widetilde{L}$, тогда автомат $\widetilde{L^R}$ показан на рис. 2. Обозначим автомат на рис. 3 записью K; очевидно, что $\mathcal{L}(K) \subseteq L$. Значит, автомат $\widetilde{L_1^R}$ (где $L_1 = \mathcal{L}(K)$) показан на рис. 4; в нём 4 состояния, и, следовательно условие (6) неверно.

Если (5) выполняется, то для обобщённых функций разметки состояний мы будем использовать следующую запись. Если для состояния $q \in Q$ (автомата (1)) и состояния $\widehat{q} \in \widehat{Q}$ (автомата $\mathcal{BA}(L)$) выполняются оба следующих условия:
$$\Phi^{in}_{KL}(q) \supseteq \alpha(\widehat{q}) \quad \text{и} \quad \Phi^{out}_{KL}(q) \supseteq \beta(\widehat{q})\,,$$
то будем писать $[q \ni \widehat{q}]$. Заметим ещё раз, что мы говорим о состояниях и дугах *автомата* (1), но значения функций φ^{in} и φ^{out} относятся *к языку* L. (Их значениями являются некоторые подмножества множеств состояний автоматов $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L^R}$.)

[7] Если это не так, то мы всегда можем обычным образом добавить «мёртвое» состояние N. После этого мы строим функции разметки состояний φ^{in} и φ^{out} с помощью полученного нами всюду определённого детерминированного автомата. Легко показать, что в построениях, которые приводятся далее, такое состояние N не будет встречаться ни в одном из *значений* функций разметки состояний.

[8] Т.е. после получения состояний автомата $\widetilde{L^R}$.

[9] При этом под данной записью подразумевается следующее.

- Пометки состояний зависят от языка – а не от соответствующего ему автомата (т.е. от L, а не от $\widetilde{L}$).
- Рассмотренные функции разметки состояний (в отличие от обычных φ^{in} и φ^{out}) определены для некоторого языка, для которого язык заданного автомата K является подмножеством.

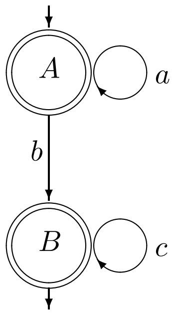

Рис. 1

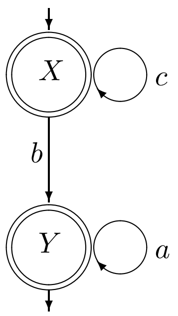

Рис. 2

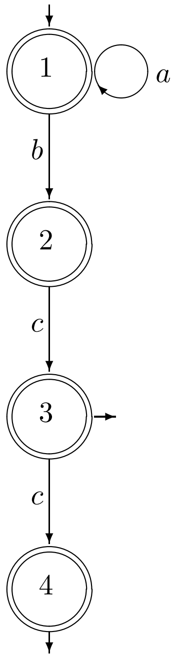

Рис. 3

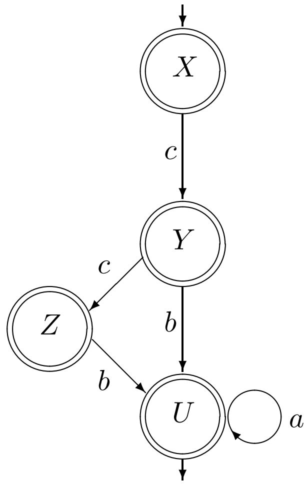

Рис. 4

3. ПУТИ ГРАФА БАЗИСНОГО АВТОМАТА

Пусть для исследуемого языка L дан его базисный автомат $\mathcal{BA}(L)$ (3). Рассмотрим функцию переходов $\widehat{\delta}$ базисного автомата как *множество* его дуг

$$\widehat{\Delta} = \left\{ \widehat{e}_i = (\widehat{p}_i,a_i,\widehat{r}_i) \,\middle|\, \widehat{p}_i,\widehat{r}_i \in \widehat{Q}, a_i \in \Sigma, \widehat{\delta}(\widehat{p}_i,a_i) \ni \widehat{r}_i, i \in \{1,\ldots,\widehat{m}\} \right\}$$

(где $\widehat{m}$ – число дуг автомата (3)). Таким образом, мы нумеруем («раскрашиваем») дуги автомата $\mathcal{BA}(L)$.

Функция переходов автомата (1) также может быть рассмотрена как множество дуг

$$\Delta = \left\{ e_j = (p_j,a_j,r_j) \,\middle|\, p_j,r_j \in Q, a_j \in \Sigma, \delta(p_j,a_j) \ni r_j, j \in \{1,\ldots,m\} \right\}$$

(где m – число дуг автомата (1)).

Пометим каждую дугу автомата (1) *множеством* возможных «цветов» – т.е., строго, построим функцию $\Omega : \Delta \to \mathcal{P}(\widehat{\Delta})$ следующим образом. Для дуги $e_j = (p_j,a_j,r_j)$ положим $\Omega(e_j) \ni \widehat{e}_i$ (где $i \in \{1,\ldots,\widehat{m}\}$) тогда и только тогда, когда выполняются такие условия:

$$[p_j \ni \widehat{p}_i]\,; \quad a_j = a_i\,; \quad [r_j \ni \widehat{r}_i]\,.$$

Рассмотрим множество путей [10] графа переходов автомата $\mathcal{BA}(L)$. Обозначим некоторый такой путь записью $\widehat{\nu}$ и представим его в виде последовательности

$$\widehat{\nu} = (\widehat{e}_1^{\widehat{\nu}},\ldots,\widehat{e}_{\widehat{n}}^{\widehat{\nu}}), \tag{7}$$

[10] Специально отметим, что мы рассматриваем не только простые пути.

где $\widehat{n}$ – число дуг этого пути. Его k-я дуга $\widehat{e}_k$ будет определена как

$$\widehat{e}_k^{\widehat{\nu}} = (\widehat{p}_k^{\widehat{\nu}}, a_k^{\widehat{\nu}}, \widehat{r}_k^{\widehat{\nu}})$$

($k \in \{1, \ldots, \widehat{n}\}$). При этом, конечно, $\widehat{p}_{k+1}^i = \widehat{r}_k^i$ для каждого k.

Для пути (7) определим множество *$\widehat{\nu}$-соответствующих путей* автомата K следующим образом. Рассмотрим некоторый путь графа переходов автомата K вида

$$\nu = (e_1^{\nu}, \ldots, e_{\widehat{n}}^{\nu});$$

при этом значение $\widehat{n}$ – такое же, как в (7), а каждая (пусть k-я) дуга последнего пути удовлетворяет равенству

$$e_k^{\nu} = (p_k^{\nu}, a_k^{\nu}, r_k^{\nu}).$$

Будем говорить, что последний путь *соответствует* $\widehat{\nu}$, если для каждого $k \in \{1, \ldots, \widehat{n}\}$ выполнено условие

$$\Omega(e_k^{\nu}) \ni \widehat{e}_k^{\widehat{\nu}}.$$

(Т.е. если каждая дуга может быть «окрашена в цвет» дуги пути $\widehat{\nu}$ с тем же номером.)

Будем также говорить, что для пары таких путей для каждого $k \in \{1, \ldots, \widehat{n}\}$ состояния $\widehat{p}_k^{\widehat{\nu}}$ и p_k^{ν} – *соответствующие* .

Предложение 1. *Пусть $L = \mathcal{L}(K)$, где $q \notin S$, $\varphi_K^{in}(q) \ni s_\pi$ (s_π, как и ранее, – единственное стартовое состояния автомата $\widetilde{L}$). Тогда для автомата*

$$K' = (\, Q, \Sigma, \delta, S \cup \{q\}, F\,)$$

выполняется $\mathcal{L}(K') = \mathcal{L}(K)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{L}_{K'}^{out}(q) = \mathcal{L}_K^{out}(q)$. И несмотря на то, что, вообще говоря,

$$\mathcal{L}_{K'}^{in}(q) \neq \mathcal{L}_K^{in}(q) \cup \{\varepsilon\},$$

следующее равенство также очевидно:

$$\mathcal{L}_{K'}^{in}(q) \cdot \mathcal{L}_{K'}^{out}(q) = (\mathcal{L}_K^{in}(q) \cup \{\varepsilon\}) \cdot \mathcal{L}_K^{out}(q). \tag{8}$$

Так как $\varphi_K^{in}(q) \ni s_\pi$, мы получаем, что

$$(\exists u \in \mathcal{L}_{\mathcal{BA}(L)}^{in}(s_\pi))\,(\forall v \in \mathcal{L}_K^{out}(q))\,(uv \in L).$$

Поскольку автомат $\widetilde{L}$ – детерминированный, выполнено следующее условие:

$$(\forall u \in \mathcal{L}_{\mathcal{BA}(L)}^{in}(s_\pi))\,(\forall v \in \mathcal{L}_K^{out}(q))\,(uv \in L).$$

Поскольку $s_\pi \in \varphi_K^{in}(q)$, выполнено условие $\varepsilon \in \mathcal{L}_{\mathcal{BA}(L)}^{in}(s_\pi)$, поэтому

$$(\forall v \in \mathcal{L}_K^{out}(q))\,(\varepsilon v \in L).$$

Последний факт вместе с (8) доказывает утверждение.

Аналогично доказывается следующий («зеркальный») факт.

Предложение 2. *Пусть $L = \mathcal{L}(K)$, $q \notin F$, $\varphi_K^{out}(q) \ni s_\rho$ (s_ρ – единственное стартовое состояние автомата $\widetilde{L^R}$). Тогда для автомата*

$$K' = (\, Q, \Sigma, \delta, S, F \cup \{q\}\,)$$

справедливо равенство $\mathcal{L}(K') = \mathcal{L}(K)$.

4. НЕСКОЛЬКО ПРОСТЫХ ПРИМЕРОВ

Сначала продолжим рассмотрение примера из раздела 2. Отметим, что в этом разделе мы будем использовать буквы X и Y только для маркировки состояний автомата $\widetilde{L^R}$.

Итак, можно полагать, что автомат, приведённый на рис. 1, – это не только автомат $\widetilde{L}$, но ещё и:

- автомат $(\widetilde{L^R})^R$ (при этом A и B заменяются на Y и X соответственно);
- автомат $\mathcal{BA}(L)$ (при этом A и B заменяются на $\frac{A}{Y}$ и $\frac{B}{X}$ соответственно).

После этого мы несложным образом получаем следующие значения для функций Φ^{in}_{KL} и Φ^{out}_{KL} (относящихся к состояниям автомата K, см. рис. 3):

$$\begin{array}{ll} \Phi^{in}_{KL}(1) = \{A\}\,; & \Phi^{in}_{KL}(2) = \Phi^{in}_{KL}(3) = \Phi^{in}_{KL}(4) = \{B\}\,; \\ \Phi^{out}_{KL}(1) = \{Y\}\,; & \Phi^{out}_{KL}(2) = \Phi^{out}_{KL}(3) = \Phi^{out}_{KL}(4) = \{X\}\,. \end{array} \tag{9}$$

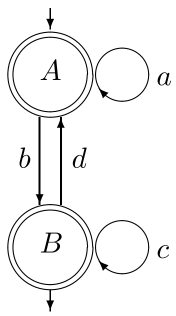

Рис. 5

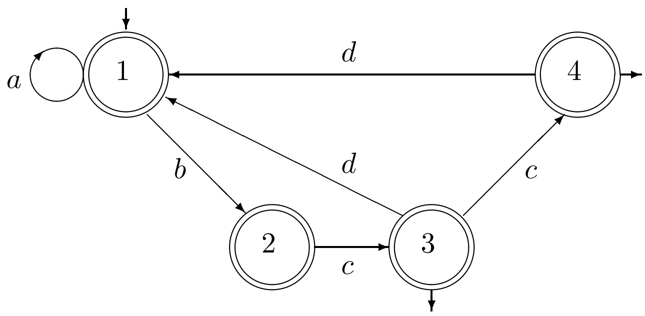

Рис. 6

Однако здесь автомат $\mathcal{BA}(L)$ содержит больше одной сильно связной компоненты; а как было сказано ранее, для исследуемых задач часто бывает достаточно рассматривать только такие языки, для которых соответствующий базисный автомат имеет только 1 такую компоненту, – поэтому рассмотрим другой пример, похожий на предыдущий. Автомат L показан на рис. 5; как и в предыдущем примере, мы можем полагать, что рис. 5 показывает автоматы $(\widetilde{L^R})^R$ и $\mathcal{BA}(L)$ (с теми же самыми заменами состояний A и B). Можно считать, что автомат K приведён на рис. 6; как и в предыдущем примере, мы получаем

$$\mathcal{L}(K) \subseteq L \quad \text{и} \quad \mathcal{L}(K) \neq L\,,$$

но при этом автомат $\mathcal{BA}(L)$ содержит ровно 1 сильно связную компоненту. Отметим, что в этом примере мы получаем те же значения функций Φ^{in}_{KL} и Φ^{out}_{KL}, что и в (9). Например, циклам (путям) автомата $\mathcal{BA}(L)$ с пометками *aaabcd* и *abccd* – *соответствуют* циклы из автомата K, а циклам (путям) с пометками *abcccd* – нет.

Далее рассмотрим язык, задаваемый регулярным выражением (4).

Приведем графическое описание автоматов $\mathcal{BA}(L)$, $\widetilde{L}$ и эквивалентного им автомата K, а также значения функций разметки состояний для последнего автомата – см. рисунки 7, 8 и 9.

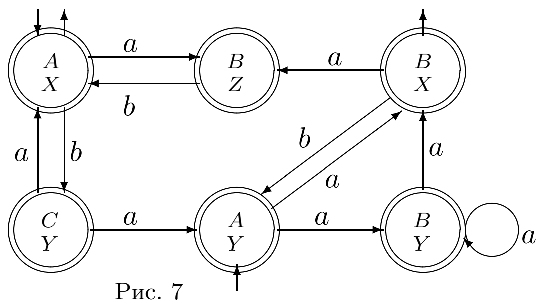

Рис. 7

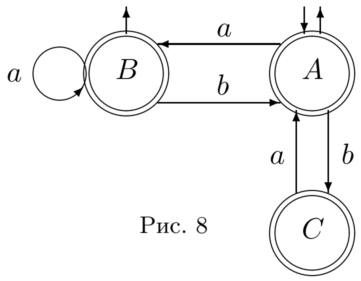

Рис. 8

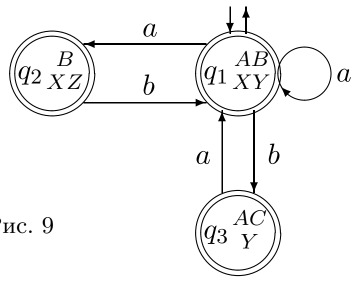

Рис. 9

Возьмем только 2 следующие дуги автомата $\mathcal{BA}(L)$: «зелёную»

$$\begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix}\xrightarrow[\widehat{\delta}]{a}\begin{smallmatrix}B\\X\end{smallmatrix}$$

и «синюю»

$$\begin{smallmatrix}B\\Y\end{smallmatrix}\xrightarrow[\widehat{\delta}]{a}\begin{smallmatrix}B\\X\end{smallmatrix}.$$

Следующие дуги автомата K (и только они) могут быть «зелёными»:

$$q_1\xrightarrow[\delta_\pi]{a}q_1\,,\quad q_1\xrightarrow[\delta_\pi]{a}q_2\quad \text{и}\quad q_3\xrightarrow[\delta_\pi]{a}q_1\,,$$

а следующие дуги (и только они) могут быть «синими»:

$$q_1\xrightarrow[\delta_\pi]{a}q_1\quad \text{и}\quad q_1\xrightarrow[\delta_\pi]{a}q_2\,.$$

Поэтому получается, что, например, дуги $q_1\xrightarrow[\delta_\pi]{a}q_1$ могут быть «раскрашены и в зелёный, и в синий цвета» (а, возможно, и ещё в какие-нибудь другие).

Таким образом, рассмотрим тот же регулярный язык и его базисный автомат $\mathcal{BA}(L)$ (рис. 7). Затем добавим копию цикла[11)]

$$\begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix}\xrightarrow[\widehat{\delta}]{a}\begin{smallmatrix}B\\Y\end{smallmatrix}\xrightarrow[\widehat{\delta}]{a}\begin{smallmatrix}B\\X\end{smallmatrix}\xrightarrow[\widehat{\delta}]{b}\begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix}$$

и получим автомат, изображённый на рис. 10.[12)]

[11)] Мы рассматривали схожие алгоритмы дублирования цикла в [4]. Конечно, обычно нет необходимости в таком *усложнении* автомата – наоборот, обычно бывает необходимо его *упрощение*. Однако в данном случае, применяя варианты усложнений автомата, мы рассматриваем *сами задачи, которые решаются с помощью упрощения*.

[12)] На следующих трёх рисунках правые цифры означают индексы: например, запись $\begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix}1$ в пометке состояния означает $\binom{A}{Y}_1$. При этом, конечно, *значениями* функций разметки таких состояний являются соответственно $\{A\}$ и $\{Y\}$ – и это может быть непосредственно проверено.

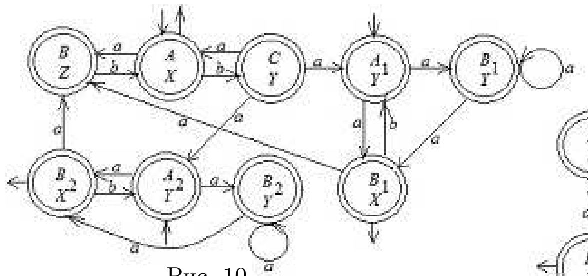

Рис. 10

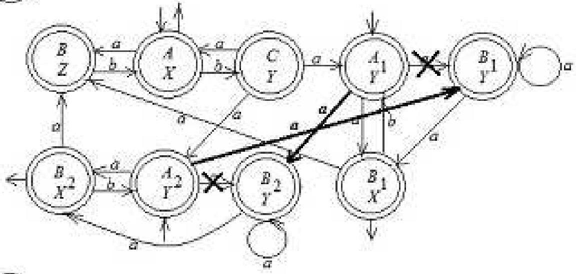

Рис. 11

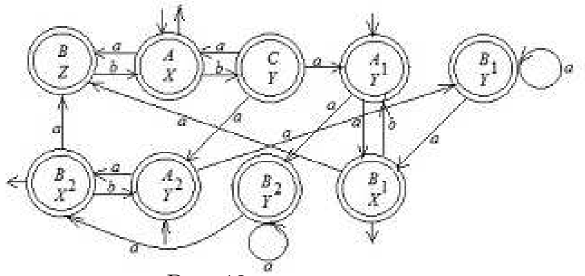

Рис. 12

Далее с помощью простой операции (см. рис. 11, а на нём – жирные и перечёркнутые линии)[13], мы заменяем:

дугу $\binom{A}{Y}_1 \xrightarrow{a} \binom{B}{Y}_1$ на дугу $\binom{A}{Y}_1 \xrightarrow{a} \binom{B}{Y}_2$;[14]

дугу $\binom{A}{Y}_2 \xrightarrow{a} \binom{B}{Y}_2$ на дугу $\binom{A}{Y}_2 \xrightarrow{a} \binom{B}{Y}_1$,

и получаем автомат, изображённый на рис. 12. В последнем автомате имеется, например, длинный цикл[15]

$$\binom{A}{Y}_1 \xrightarrow{a} \binom{B}{Y}_2 \xrightarrow{a} \binom{B}{X}_2 \xrightarrow{b} \binom{A}{Y}_2 \xrightarrow{a} \binom{B}{Y}_1 \xrightarrow{a} \binom{B}{X}_1 \xrightarrow{b} \binom{A}{Y}_1,$$

соответствующий следующему длинному циклу исходного автомата $\mathcal{BA}(L)$:

$$\begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}B\\Y\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}B\\X\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}B\\Y\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}B\\X\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix}.$$

Заметим также, что множество простых циклов автомата $\mathcal{BA}(L)$ включает цикл

$$\begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}B\\Y\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{a} \begin{smallmatrix}B\\X\end{smallmatrix} \xrightarrow[\widehat{\delta}]{b} \begin{smallmatrix}A\\Y\end{smallmatrix}.$$

Во всех рассмотренных ранее примерах (где мы предполагали выполнение равенства $\mathcal{L}(K) = L$) для каждого состояния $\begin{smallmatrix}A\\X\end{smallmatrix}$ автомата $\mathcal{BA}(L)$ существовало такое состояние автомата K, через которое проходили циклы, соответствовавшие *всем* циклам, проходившим через $\begin{smallmatrix}A\\X\end{smallmatrix}$ в $\mathcal{BA}(L)$. Иными словами, в приведённых выше примерах выполнялось следующее утверждение:

> для каждого состояния $\begin{smallmatrix}A\\X\end{smallmatrix}$ автомата $\mathcal{BA}(L)$ существует такое состояние q автомата K (где $\varphi_K^{in}(q) \ni A$ и $\varphi_K^{out}(q) \ni X$), что для каждого цикла ν состояния $\begin{smallmatrix}A\\X\end{smallmatrix}$ найдётся такое число $n \geqslant 1$, что будет существовать цикл автомата K, проходящий через состояние q и соответствующий циклу ν^n.

[13] Как уже было сказано, детально описывать эту операцию нет необходимости.

[14] Здесь мы не можем использовать для функции перехода обозначение $\widehat{\delta}$. Поэтому мы для простоты опустили имя самой функции.

[15] Строгие определения (длинных циклов, n-циклов и т.д.) будут даны ниже. Здесь мы только приводим примеры – которые, по-видимому, понятны и без строгих определений.

В последнем примере этого раздела будет показано, что существуют автоматы, для которых сформулированный факт *не* выполняется. (Однако очевидно, что, несмотря на это, K должен содержать *путь*, соответствующий $\nu^{\,n}$ для каждого $n \geqslant 1$.)

Итак, кратко рассмотрим такой пример.

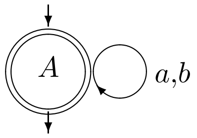

Рис. 13

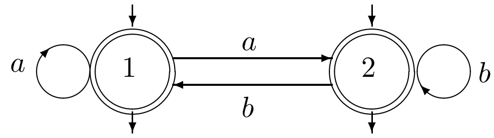

Рис. 14

Как и для нескольких предыдущих примеров, мы полагаем здесь, что автомат, изображённый на рис. 13, одновременно является:

- $\widetilde{L}$;
- $(\widetilde{L^R})^R$ (заменяем пометку A на X);
- $\mathcal{BA}(L)$ (заменяем пометку A на $\frac{A}{X}$).

Этот автомат задаёт язык Σ^* (мы полагаем $\Sigma = \{a,b\}$). Для состояний эквивалентного автомата K, приведённого на рис. 14, выполнены следующие два условия:

- они оба имеют одинаковые значения функций φ_K^{in} и φ_K^{out} (а именно – $\{A\}$ и $\{X\}$);
- однако ни у одного из них нет *одновременно* обоих циклов, соответствующих циклам $\mathcal{BA}(L)$ с пометками a и b.

5. ДЛИННЫЕ ЦИКЛЫ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

Как и всюду в данной статье, мы полагаем, что $\mathcal{L}(K) \subseteq L$, и используем обобщённые функции разметки состояний Φ_{KL}^{in} и Φ_{KL}^{out} для определения соответствующих путей.

Определим длинный цикл строго. Отметим, что в соответствии с [15] определение цикла в наших обозначениях можно дать следующим образом: путь (7) графа переходов автомата (3) является циклом, если $\widehat{r}^{\widehat{\nu}}_{\widehat{n}} = \widehat{p}^{\widehat{\nu}}_1$.

Для некоторого цикла (7) для каждого $n \geqslant 1$ обычным образом определим *n-цикл* цикла $\widehat{\nu} = (\widehat{e}^{\widehat{\nu}}_1, \ldots, \widehat{e}^{\widehat{\nu}}_{\widehat{n}})$ как

$$\widehat{\nu}^n = (\widehat{e}^{\widehat{\nu}^n}_1, \ldots, \widehat{e}^{\widehat{\nu}^n}_{n\cdot\widehat{n}}),$$

где для каждого возможного i (т.е. $i \in \{1, \ldots, (n-1)\cdot\widehat{n}\}$) верно равенство $\widehat{e}^{\widehat{\nu}^n}_i = \widehat{e}^{\widehat{\nu}^n}_{i+n}$.

Для введённого определения n-цикла отметим следующее. Во-первых, $\widehat{r}^{\widehat{\nu}^n}_{n\cdot\widehat{n}} = \widehat{p}^{\widehat{\nu}^n}_1$. Во-вторых, мы использовали обозначения $\widehat{e}$, $\widehat{\nu}$ и т.д., применяемые для базисного автомата; однако при этом можно сказать, что мы определили n-циклы не только для базисного автомата, но и для любого автомата – в частности, для (1).

Мы будем называть n-цикл длинным, если $n > 1$.

Для длинных циклов базисного автомата рассмотрим соответствующие пути графа в автомате (1) – аналогично тому, как это было сделано в разделе 3. Будем называть такой путь *«длинным n-путём» графа переходов автомата (1), соответствующим циклу (7) автомата (3)*; кроме того, если этот путь является циклом, то мы будем называть его *(длинным) n-циклом автомата (1)*. Отметим, что в предыдущем разделе мы *уже* рассмотрели некоторые примеры таких длинных циклов, не отмечая это явно.

Предложение 3. *Если $\mathcal{L}(K) = L$, то для каждого цикла автомата $\mathcal{BA}(L)$ существует соответствующий n-цикл автомата K (для некоторого $n \geqslant 1$)* [16] .

Доказательство. Рассмотрим цикл $\widehat{\nu} = (\widehat{e}_1^{\widehat{\nu}}, \ldots, \widehat{e}_{\widehat{n}}^{\widehat{\nu}})$ автомата $\mathcal{BA}(L)$, начинающийся и заканчивающийся в состоянии $\widehat{p}_1^{\widehat{\nu}^n} = \widehat{r}_{\widehat{n}}^{\widehat{\nu}^n}$. Пусть его пометкой будет v (при этом $v \neq \varepsilon$, поскольку в $\mathcal{BA}(L)$ нет ε-переходов). Пусть также $u \in \mathcal{L}^{in}_{\mathcal{BA}(L)}(\widehat{p}_1^{\widehat{\nu}^n})$ и $w \in \mathcal{L}^{out}_{\mathcal{BA}(L)}(\widehat{r}_{\widehat{n}}^{\widehat{\nu}^n})$; заметим, что $uv^iw \in L$ для каждого $i \geqslant 0$.

Выберем n, превосходящее число состояний автомата K. Рассмотрим слово $x = uv^nw \in L$; поскольку автомат $\mathcal{BA}(L)$ является однозначным ([3], [16] и др.), он допускает проходящий через x (n раз) цикл $\widehat{\nu}$. Автомат K эквивалентен автомату $\mathcal{BA}(L)$ (он задаёт тот же самый язык L), поэтому он допускает слово x.

Рассмотрим *какой-нибудь* допускающий путь для слова x в автомате K; некоторые его подпути соответствуют рассмотренному циклу $\widehat{\nu}$ автомата $\mathcal{BA}(L)$. Для этого пути в автомате K рассмотрим подмножество множества его состояний, которые нужно пройти перед первым прочтением первой буквы подслова v рассматриваемого слова x; пусть это подмножество – $Q' \subseteq Q$. Поскольку число состояний автомата K меньше n, мы получаем совпадение по крайней мере двух состояний множества Q', и, следовательно, соответствующий длинный цикл.

Мы будем использовать доказанный факт в дальнейших работах. Ранее для практической реализации алгоритмов минимизации недетерминированных автоматов по различным критериям нами это утверждение уже было использовано.

6. ПОНЯТИЯ УПРОЩЁННОГО АВТОМАТА И УПРОЩЁННОГО ЯЗЫКА

Основную идею данного раздела можно передать так: для данного регулярного языка вводится некоторое отношение над множеством букв его алфавита («параллельность»).

Определим параллельные буквы следующим образом. Пусть регулярный язык $\mathcal{L}$ задан над алфавитом Σ, $a,b \in \Sigma$, и пусть существует автомат $K = (Q,\Sigma,\delta,S,F)$, такой что $\mathcal{L}_K = \mathcal{L}$ и $\forall q \in Q : \delta(q,a) = \delta(q,b)$. Тогда буквы a и b назовём *параллельными над языком* L, обозначая

$$a \overset{\mathcal{L}}{\parallel} b\,.$$

Для наглядности дадим ещё два эквивалентных определения параллельных букв, однако доказывать эту эквивалентность не будем.

- Буквы a и b параллельны над регулярным языком $\mathcal{L}$, если существует регулярное выражение R_0, задающее $\mathcal{L}$, такое, что

$$R_0 = R_0((a+b),c_1,\ldots,c_k), \quad \text{где} \quad c_1,\ldots,c_k \in \Sigma.$$

- Буквы a и b параллельны над регулярным языком $\mathcal{L}$, если существует автомат $K = (Q,\Sigma,\gamma,S,F)$, такой что $\mathcal{L}_K = \mathcal{L}$ и $\forall q_1,q_2 \in Q \quad \gamma(q_1,q_2) \ni a \Leftrightarrow \gamma(q_1,q_2) \ni b$.

Введём отношение параллельности букв для автомата. Заранее отметим, что это отношение и отношение, определённое выше, связаны между собой аналогично тому, как связаны понятия регулярного выражения и регулярного языка. Иными словами, даже если две буквы параллельны над некоторым регулярным языком, то, тем не менее, этот язык может

[16] Важно отметить следующее: мы *не* требуем, чтобы данный цикл автомата $\mathcal{BA}(L)$ был простым.

быть задан автоматом, для которого эта параллельность не выполняется. Пусть есть автомат $K = (Q,\Sigma,\delta,S,F)$, $a,b \in \Sigma$, и пусть $\forall q \in Q : \delta(q,a) = \delta(q,b)$. Тогда буквы a и b назовём *параллельными над автоматом* K, обозначая этот факт записью

$$a \overset{K}{\parallel} b\,.$$

Далее записью $\widehat{K}$ мы будем обозначать детерминированный автомат, полученный из K с помощью обычной процедуры детерминизации ([2] и мн. др.). Кроме того, аналогично обозначениям, применяемым выше, через $\widetilde{K}$ мы будем обозначать канонический автомат, эквивалентный $\widehat{K}$.

Предложение 4. *Если* $a \overset{K}{\parallel} b$*, то* $a \overset{\widehat{K}}{\parallel} b$ *и* $a \overset{\widetilde{K}}{\parallel} b$.

Доказательство.

$$\widehat{\delta}(Q_1,a) = \bigcup_{q\in Q_1} \delta(q,a) \overset{\text{Опр.}}{=} \bigcup_{q\in Q_1} \delta(q,b) = \widehat{\delta}(Q_1,b),$$

то есть при детерминизации параллельность сохраняется; иными словами,

$$a \overset{K}{\parallel} b \Rightarrow a \overset{\widehat{K}}{\parallel} b.$$

Для приведения детерминированного автомата к каноническому автомату применяется только вспомогательный алгоритм объединения вершин, при этом

$$\widetilde{\gamma}(r,q_1) = \widehat{\gamma}(r,q_1) \cup \widehat{\gamma}(r,q_2),$$

где множества $\widehat{\gamma}(r,q_1)$ и $\widehat{\gamma}(r,q_2)$ могут содержать a и b только попарно. Значит, тот же самый факт верен и для множества $\widetilde{\gamma}(r,q_1)$.

Предложение 5. *Если* $a \overset{K}{\parallel} b$ *и* $b \overset{K}{\parallel} c$*, то* $a \overset{K}{\parallel} c$.

Доказательство. Возьмём некоторое $q \in Q$, тогда согласно введённому определению параллельности букв, $\delta(q,a) = \delta(q,b) = \delta(q,c)$. Из последнего непосредственно получаем $a \overset{K}{\parallel} c$.

Предложение 6. *Если* $a \overset{\mathcal{L}}{\parallel} b$ *и* $b \overset{\mathcal{L}}{\parallel} c$*, то* $a \overset{\mathcal{L}}{\parallel} c$.

Доказательство. В силу введённого определения параллельных букв,

$$\exists K_1 : a \overset{K_1}{\parallel} b \quad \text{и} \quad \exists K_2 : b \overset{K_2}{\parallel} c,$$

причём K_1 и K_2 задают язык $\mathcal{L}$. Так как $\widetilde{K_1} = \widetilde{K_2} = \widetilde{K}$ (канонический автомат – инвариант регулярного языка), то $a \overset{K_1}{\parallel} b \Rightarrow a \overset{\widetilde{K}}{\parallel} b$ и $b \overset{K_2}{\parallel} c \Rightarrow b \overset{\widetilde{K}}{\parallel} c$ (согласно утверждению 4) влечёт $a \overset{\widetilde{K}}{\parallel} c$ (согласно утверждению 5). Значит, по определению параллельности букв, $a \overset{\mathcal{L}}{\parallel} c$

Таким образом, отношение $a \overset{\mathcal{L}}{\parallel} b$ является рефлексивным, симметричным (в силу определения) и транзитивным, то есть удовлетворяет всем трём свойствам отношения эквивалентности. Значит, весь алфавит Σ можно разбить на классы параллельных (над данным регулярным языком $\mathcal{L}$) букв.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было отмечено во введении, в настоящее время авторами готовится статья, которая будет являться продолжением данной. В ней на основе обобщённых функций разметки состояний и параллельных букв будут определены т.н. покрывающие автоматы и рассмотрен соответствующий пример. Этот пример будет продолжением примера, рассматривавшегося в [11] – в нём покрывающий автомат будет эквивалентен исходному (т.е., согласно терминологии настоящей статьи, равенство $\mathcal{L}(K) = L$ выполняется). Далее будут сформулированы два алгоритма построения покрывающего автомата, после чего будут рассмотрены примеры *не*эквивалентности покрывающего и исходного автоматов. На их основе будет сформулирован *метод* доказательства неравенства $\mathcal{L}(K) \neq L$, в котором автомат K имеет свойства, сформулированные в настоящей статье. Как уже было сказано, этот метод используется в алгоритмах минимизации конечных автоматов по различным критериям. Кроме того, этот метод может быть использован в алгоритмах минимизации для других моделей автоматов – например, в модели, описывающей специальное расширение класса НКА (т.н. автоматы Оллонгрена-Вылитка, [17], [18]).

Кроме того, в одной из последующих публикаций мы естественным образом определим канонический автомат, в котором алфавитом являются соответствующие классы параллельных букв. Этот автомат (и соответствующий ему язык) можно назвать «упрощённым». Заметим, что все основные свойства языка (например, отношение #) при таком «упрощении» сохранятся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vakhitova, A. The basis automaton for the given regular language / A. Vakhitova // The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1999. — V. 6, № 3. — P. 617–624.

2. Melnikov, B. Extended nondeterministic finite automata / B. Melnikov // Fundamenta Informaticae. — 2010. — V. 104, № 3. — P. 267–283.

3. Мельникова, А. А. Некоторые свойства базисного автомата / А. А. Мельникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 184–189.

4. Мельников, Б. Ф. О некоторых алгоритмах эквивалентного преобразования недетерминированных конечных автоматов / Б. Ф. Мельников, М. Р. Сайфуллина // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2009. — Т. 53, № 4. — С. 54–57.

5. Мельников, Б. Ф. Многоаспектная минимизация недетерминированных конечных автоматов. Часть I. Вспомогательные факты и алгоритмы / Б. Ф. Мельников, А. А. Мельникова // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2011. — Т. 20, № 4. — С. 59–69.

6. Мельников, Б. Ф. Многоаспектная минимизация недетерминированных конечных автоматов. Часть II. Основные алгоритмы / Б. Ф. Мельников, А. А. Мельникова // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2012. — Т. 21, № 1. — С. 31–43.

7. Зубова, М. А. Об одном алгоритме построения универсального автомата Конвея / М. А. Зубова, Б. Ф. Мельников // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 135–137.

8. Melnikov, B. The state minimization problem for nondeterministic finite automata: the parallel implementation of the truncated branch and bound method / B. Melnikov, A. Tsyganov // 5th Int. Symp. on Parallel Architectures, Algorithms and Programming, Taipei. IEEE Computer Society Ed. — 2012. — P. 194–201.

9. Лаллеман, Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения / Ж. Лаллеман. — М. : Мир, 1985. — 440 с.

10. Lombardy, S. The Universal Automaton / S. Lombardy, S. Sakarovitch // Logic and

Automata, Texts in Logic and Games, Amsterdam Univ. Press. — 2008. — V. 2. — P. 457–504.

11. Melnikov, B. Once more on the edge-minimization of nondeterministic finite automata and the connected problems / B. Melnikov // Fundamenta Informaticae. — 2010. — V. 104, № 3. — C. 267–283.

12. Melnikov, B. On an expansion of nondeterministic finite automata / B. Melnikov // The Korean J. of Computational and Applied Math. — 2007. — V. 24, № 1–2. — C. 155–165.

13. Melnikov, B. Some properties of the basis finite automaton / B. Melnikov, A. Melnikova // The Korean J. of Comp. and Appl. Math. — 2002. — V. 9. — № 1. — C. 131–150.

14. Melnikov, B. A new algorithm of constructing the basis finite automaton / B. Melnikov, A. Melnikova // Informatika (Lithuanian Acad. Sci. Ed.). — 2002. — V. 13, № 3. — C. 299–310.

15. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. — М. : Мир, 1973. — 300 с.

16. Мельников, Б. Ф. Однозначные конечные автоматы / Б. Ф. Мельников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. — 2002. — № 1. — С. 45–58.

17. Вылиток, А. А. О построении графа магазинного автомата / А. А. Вылиток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 3. — С. 68–73.

18. Вылиток, А. А. Об одном расширении класса конечных автоматов для задания контекстно-свободных языков / А. А. Вылиток, М. А. Зубова, Б. Ф. Мельников // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2013. — № 1. — С. 39–45.

REFERENCES

1. Vakhitova A. The basis automaton for the given regular language. The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, vol. 6, no. 3, pp. 617–624.

2. Melnikov B. Extended nondeterministic finite automata. Fundamenta Informaticae, 2010, vol. 104, no. 3, pp. 267–283.

3. Melnikova A.A. Some properties of the basis finite automaton. [Melnikova A.A. Nekotorye svojstva bazisnogo avtomata]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 184–189.

4. Melnikov B.F., Sayfullina M.R. On some algorithms of equvalent transformations of nondeterministic finite automata. [Melnikov B.F., Sayfullina M.R. O nekotoryx algoritmax ekvivalentnogo preobrazovaniya nedeterminirovannyx konechnyx avtomatov]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Izvestiya of Universities. Mathematics*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 54–57.

5. Melnikov B.F., Melnikova A.A. Multiaspect minimization of nondeterministic finite automata. Part I. Accessory facts and algorithms. [Melnikov B.F., Melnikova A.A. Mnogoaspektnaya minimizaciya nedeterminirovannyx konechnyx avtomatov. Chast' I. Vspomogatel'nye fakty i algoritmy]. *Izvestiya vuzov. Povolzhskij region. Fiziko-Matematicheskie nauki — Izvestiya of Universities. Volga reg. Physical and Mathematical Sciences*, 2011, vol. 20, no. 4, pp. 59–69.

6. Melnikov B.F., Melnikova A.A. Multiaspect minimization of nondeterministic finite automata. Part II. The main algorithms. [Melnikov B.F., Melnikova A.A. Mnogoaspektnaya minimizaciya nedeterminirovannyx konechnyx avtomatov. Chast' II. Osnovnye algoritmy]. *Izvestiya vuzov. Povolzhskij region. Fiziko-Matematicheskie nauki — Izvestiya of Universities. Volga reg. Physical and Mathematical Sciences*, 2012, vol. 21, no. 1, pp. 31–43.

7. Zubova M.A., Melnikov B.F. On one algorithm of constructing Conway's universal automaton. [Zubova M.A., Melnikov B.F. Ob odnom algoritme postroeniya universalnogo avtomata Konveya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1,

pp. 135–137.

8. Melnikov B., Tsyganov A. The state minimization problem for nondeterministic finite automata: the parallel implementation of the truncated branch and bound method. 5th Int. Symp. on Parallel Architectures, Algorithms and Programming, Taipei. IEEE Computer Society Ed, 2012, pp. 194–201.

9. Lallement G. Semigroups and combinatorial application. [Lalleman Zh. Polugruppy i kombinatornye prilozheniya]. Moscow: Mir, 1985, 440 p.

10. Lombardy S., Sakarovitch S. The Universal Automaton. Logic and Automata, Texts in Logic and Games, Amsterdam Univ. Press, 2008, vol. 2, pp. 457–504.

11. Melnikov B. Once more on the edge-minimization of nondeterministic finite automata and the connected problems. Fundamenta Informaticae, 2010, vol. 104, no. 3, pp. 267–283.

12. Melnikov B. On an expansion of nondeterministic finite automata. The Korean J. of Computational and Applied Math., 2007, vol. 24, no. 1–2, pp. 155–165.

13. Melnikov B., Melnikova A. Some properties of the basis finite automaton. The Korean J. of Computational and Appl. Math., 2002, vol. 9, no. 1, pp. 131–150.

14. Melnikov B., Melnikova A. A new algorithm of constructing the basis finite automaton. Informatika, Lithuanian Acad. Sci. Ed., 2002, vol. 13, no. 3, pp. 299–310.

15. Harary F. Graph Theory. [Xarari F. Teoriya grafov]. Moscow: Mir, 1973, 300 p.

16. Melnikov B.F. Unambiguous finite automata. [Melnikov B.F. Odnoznachnye konechnye avtomaty]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Povolzhskij region. Texnicheskie nauki — Izvestiya of Universities. Volga reg. Technical Sciences*, 2002, no. 1, pp. 45–58.

17. Vylitok A.A. On the constructing the graph of push-down automaton. [Vylitok A.A. O postroenii grafa magazinnogo avtomata]. *Vestnik Moscovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naja matematika i kybernetika — Vestnik of Moscow Univ. Series 15: Appl. Mathematics and Cybernetics*, 1996, no. 3, pp. 68–73.

18. Vylitok A.A., Zubova M.A., Melnikov B.F. On an expansion of the class of finite automata for defining context-free languages. [Vylitok A.A., Zubova M.A., Melnikov B.F. Ob odnom rasshirenii klassa konechnyx avtomatov dlya zadaniya kontekstno-svobodnyx yazykov]. *Vestnik Moscovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naja matematika i kybernetika — Vestnik of Moscow Univ. Series 15: Appl. Mathematics and Cybernetics*, 2013, no. 1, pp. 39–45.

Долгов Василий Николаевич, аспирант, Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Российская федерация
E-mail: terenga74@mail.ru
Тел.: +7(927)813–25–44

Dolgov Vasiliy Nikolaevich, post-graduate student, Togliatti State University, Togliatti, Russian Federation
E-mail: terenga74@mail.ru
Tel.: +7(927)813–25–44

Мельников Борис Феликсович, доктор ф.-м. наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Академия государственной противопожарной службы МЧС России, Москва, Российская Федерация
E-mail: bf-melnikov@yandex.ru
Тел.: +7(916)722–97–56

Melnikov Boris, Doctor of Physical-Mathematical Sciences, professor, cademy of state fire service of EMERCOM of Russia, Moscow, Russian Federation
E-mail: bf-melnikov@yandex.ru
Tel.: +7(916)722–97–56

Мельникова Александра Александровна, кандидат ф.-м. наук, доцент кафедры высшей математики Димитровградского инженерно-технологического института– филиала Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Димитровград, Российская федерация
E-mail: super-avahi@yandex.ru
Тел.: +7(84235)4–63–42; +7(927)826–21–03

Melnikova Aleksandra Aleksandrovna, Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associated Professor, Department of Mathematics Dimitrovgrad Engineering Institute of Technology – a branch of the National Research Nuclear University «Moscow Engineering Physics Institute», Dimitrovgrad, Russian Federation
E-mail: super-avahi@yandex.ru
Tel.: +7(84235)4–63–42; +7(927)826–21–03