УДК 62–50

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

О. О. Власова, А. В. Дылевский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.02.2015 г.

Аннотация. Рассматривается задача синтеза конечномерного регулятора для распределенного объекта параболического типа. Построение регулятора осуществляется в частотной области с помощью метода синтеза модальных систем управления. Бесконечномерный объект управления аппроксимируется рациональными дробями Паде. Конечномерный регулятор обеспечивает устойчивость замкнутой системы управления для исходного распределенного объекта. Применение модальных регуляторов позволяет обеспечивать системы управления заданными свойствами. Предлагаемый метод может быть использован для других классов объектов с распределенными параметрами.

Ключевые слова: распределенный объект, параболическое уравнение, конечномерный регулятор, аппроксимации Паде, устойчивость, модальное управление.

DESIGN OF A FINITE-DIMENSIONAL CONTROLLER FOR A DISTRIBUTED PLANT OF PARABOLIC TYPE

O. O. Vlasova, A. V. Dylevskii

Abstract. The problem of design of a finite-dimensional controller for a distributed plant of parabolic type is considered. Design of the controller is performed by a method of synthesis of modal control systems in the frequency domain. The distributed plant is approximated by rational fractions of Pade. The finite-dimensional controller ensures stability of the control closed-system for the desired distributed plant. The proposed method can be used for other classes of plants with distributed parameters.

Keywords: distributed plant, parabolic equation, finite-dimensional controller, Pade approximation, stability, modal control.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управления объектами с распределенными параметрами представляет собой одну из актуальных проблем теории автоматического управления [1], [2], [3]. Об этом свидетельствует появление в отечественных и зарубежных изданиях многочисленных публикаций как теоретического, так и прикладного характера, проведение различных конференций и симпозиумов, посвященных этой проблеме. Трудно указать какую-нибудь естественно-научную, техническую или промышленную область, где бы не возникали задачи, связанные с использованием объектов с распределенными параметрами. Кроме того, интерес исследователей к данной проблеме объясняется тем, что объекты с распределенными параметрами, являясь бесконечномерными, описываются трансцендентными передаточными функциями. Это обстоятельство не позволяет непосредственно применять к объектам с распределенными параметрами методы теории автоматического управления объектами с сосредоточенными параметрами. Однако на основе метода синтеза модальных систем управления [4], [5], [6] для достаточно широкого класса распределенных объектов могут быть получены эффективные методы синтеза конечномерных регуляторов [7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть объект управления описывается следующим уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\, t > 0, \tag{1}$$

с соответствующими начальными и граничными условиями

$$y(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} = -\lambda\big[y(1,t) - u(t)\big]. \tag{3}$$

Как известно [8], уравнения параболического типа встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. В частности, уравнение теплопроводности (1) с краевыми условиями (2), (3) описывает температурное поле в тонком стержне единичной длины [8], [9], теплоизолированном с боковой поверхности и с одного торца $x = 0$. В граничных условиях (3) функция $u(t)$ — температура нагревателя, расположенного у торца стрежня $x = 1$, $\varphi(x)$ — некоторая заданная функция, определяющая распределение температуры стержня в начальный момент времени $t = 0$, λ — коэффициент теплообмена.

Для стержня, представляющего собой объект управления с распределенными параметрами (1)–(3), рассмотрим задачу построения конечномерного астатического реализуемого регулятора, вырабатывающего закон управления $u(t)$, который обеспечивает нагрев стержня до заданной температуры.

2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Для решения поставленной задачи найдем передаточную функцию объекта (1)–(3). Применим к уравнению (1) сначала преобразование Лапласа по временной переменной t, а затем — по пространственной переменной x. В условии (2) положим

$$\varphi(x) \equiv 0. \tag{4}$$

Тогда имеем

$$pY(q,p) = q^2 Y(q,p) - qY(0,p) - Y'_x(0,p). \tag{5}$$

Здесь $Y(q,p) \doteqdot y(x,t)$. Учитывая условие (3), из (5) сразу получаем

$$Y(q,p) = \frac{q}{q^2 - p} Y(0,p). \tag{6}$$

По изображению (6) восстановим оригинал по переменной x. Нетрудно проверить, что

$$\frac{q}{q^2 - p} = \operatorname{ch}\sqrt{p}x. \tag{7}$$

Поэтому

$$Y(x,p) = \operatorname{ch}\sqrt{p}xY(0,p). \tag{8}$$

С помощью граничного условия (3) найдем неизвестное изображение $Y(0,p)$. С этой целью продифференцируем $Y(x,p)$ по x

$$Y'_x(x,p) = \sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p}xY(0,p). \tag{9}$$

Отсюда и условия (3) следует, что

$$\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p}xY(0,p) = \lambda\big[U(p) - Y(1,p)\big], \tag{10}$$

где $U(p) \risingdotseq u(t)$. Из соотношений (8) и (10) при $x = 1$ находим

$$Y(0,p) = \frac{\lambda}{\lambda\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p} + \sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}}\,U(p)\,. \tag{11}$$

Из (11) в силу равенства (8) получаем зависимость в пространстве изображений (по временной переменной t) температуры стержня в каждой точке x от изображения по Лапласу управляющего воздействия $u(t)$

$$Y(x,p) = \frac{\lambda\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p}x}{\lambda\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p} + \sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}}\,U(p)\,. \tag{12}$$

Таким образом, передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W(p) = \frac{Y(1,p)}{U(p)} = \frac{\lambda\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p}}{\lambda\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p} + \sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}}\,. \tag{13}$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Согласно формуле (13) передаточная функция распределенного объекта (1)–(3) является трансцендентной. Для решения поставленной выше задачи, т.е. построения конечномерного регулятора, аппроксимируем трансцендентную передаточную функцию дробно-рациональной функцией. С этой целью в качестве аппроксимирующих функций рассмотрим аппроксимации Паде [10]. При аппроксимации трансцендентной передаточной функции важно не только обеспечить заданную точность аппроксимации в некоторой комплексной области, но и сохранить всю информацию об объекте управления, которая содержится в особых точках передаточной функции объекта, т.е. в ее полюсах. Известно [10], что полюсы аппроксимации Паде с увеличением порядка аппроксимации стремяться к полюсам исходной функции. Кроме того, если синтезированный конечномерный регулятор для распределенного объекта с передаточной функцией является робастным, то замкнутая система управления допускает некоторую ошибку аппроксимации в области высоких частот.

Пусть $\lambda = 1$. Тогда для передаточной функции (13) рассмотрим аппроксимирующую дробь Паде порядка [1/2]

$$W_{[1/2]}(p) = \frac{6p + 15}{p^2 + 21p + 15} = \frac{B(p)}{A(p)}\,. \tag{14}$$

На рис. 1 изображены АФЧХ исходной передаточной функции (13) (кривая 1) и АФЧХ дроби Паде (14) (кривая 2). Нетрудно заметить, что в области низких частот характеристики практически совпадают (абсолютная ошибка аппроксимации не превосходит 10^{-3} при $0 \leqslant \omega \leqslant 1.85$). При $\omega > 1.85$ абсолютная ошибка аппроксимации не превосходит 0.065. Таким образом, аппроксимация (14) удовлетворяет заданным требованиям и может быть использована для построения конечномерного регулятора.

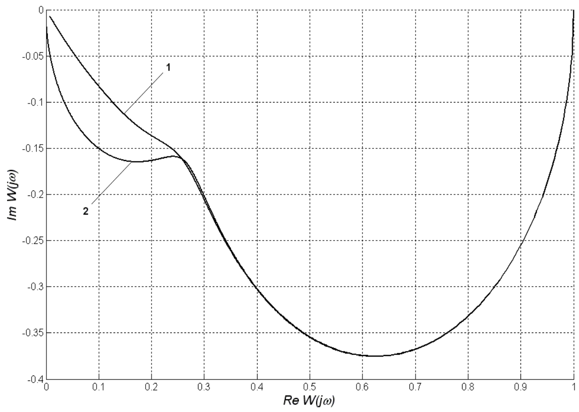

Рис. 1.

4. СИНТЕЗ КОНЕЧНОМЕРНОГО РЕГУЛЯТОРА

Воспользуемся методом синтеза модальных систем управления для распределенных объектов [7]. Рассмотрим замкнутую систему управления с отрицательной обратной связью, структурная схема которой представлена на рис. 2. Здесь $V(p)$ — передаточная функция искомого регулятора.

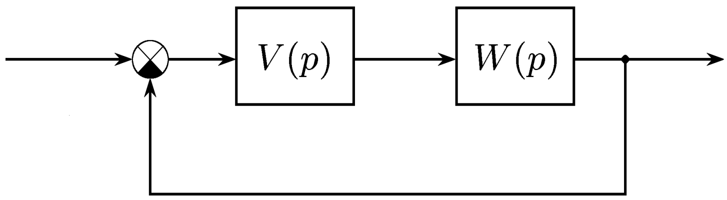

Рис. 2.

Передаточную функцию $V(p)$ конечномерного регулятора будем искать в виде

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)},$$

где неизвестные многочлены $S(p)$ и $R(p)$ удовлетворяют следующему полиномиальному уравнению:

$$B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p). \tag{15}$$

Здесь $D(p)$ — произвольный характеристический многочлен замкнутой системы, степень n которого удовлетворяет условию $n \geqslant 5$. Пусть $n = 5$ и

$$D(p) = (p + 0.7402)(p + 4)(p + 5)(p + 6)(p + 11.7359).$$

Тогда решением полиномиального уравнения (15) является пара многочленов

$$S(p) = 18.6034p^2 + 107.6564p + 69.4953;$$
$$R(p) = p^3 + 6.4761p^2 + 7.2097p.$$

Нетрудно проверить, что замкнутая система управления с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{V(p)W(p)}{1 + V(p)W(p)}$$

является устойчивой.

На рис. 3 изображено распределение температуры вдоль стержня для $t \in [0, 5]$ при нагреве до 100°C. График соответствующего управления $u(t)$ представлен на рис. 4.

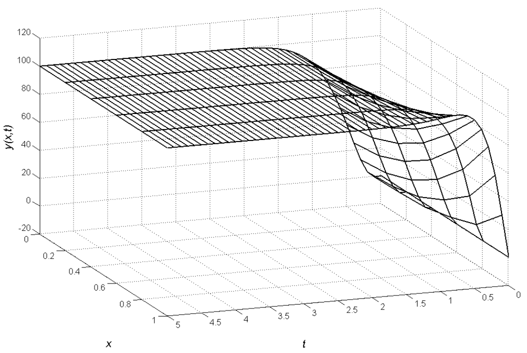

Рис. 3.

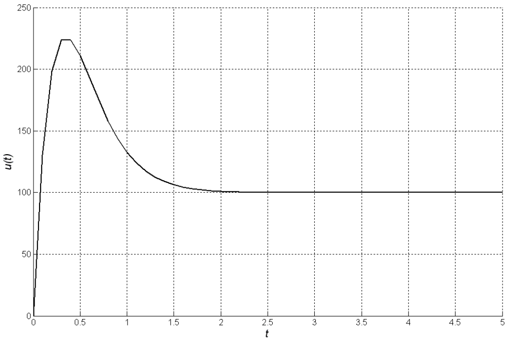

Рис. 4.

Таким образом, результаты моделирования показывают хорошее качество конечномерного регулятора, синтезированного для распределенного объекта управления параболического типа, представляющего собой тонкий стержень единичной длины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский, А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.

2. Curtain, R. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory / R. Curtain, H. Zwart. — New York : Springer-Verlag, 1995. — 698 p.

3. Luo, Z.H. Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications / Z.H. Luo, B.Z. Guo, O. Mörgul. — London : Springer-Verlag, 1999. — 410 p.

4. Лозгачев, Г. И. Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы / Г. И. Лозгачев // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 5. — С. 49–55.

5. Дылевский, А. В. Синтез линейных систем управления с заданным характеристических полиномом / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 4. — С. 17–20.

6. Дылевский, А. В. Синтез модальных систем управления / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 103–109.

7. Дылевский, А. В. Синтез конечномерных регуляторов для бесконечномерных объектов : учебное пособие / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина. —– Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – — 298 с.

8. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 736 с.

9. Андреев, Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 424 с.

10. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. — М. : Мир, 1986. — 502 с.

REFERENCES

1. Butkovskij A.G. Methods of control of systems with the distributed parameters. [Butkovskij A.G. Metody upravlenija sistemami s raspredelennymi parametrami]. Moscow: Nauka, 1975, 568 p.

2. Curtain R., Zwart H. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. New York: Springer-Verlag, 1995, 698 p.

3. Luo Z.H. Guo B.Z., Mörgul O. Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications. London: Springer-Verlag, 1999, 410 p.

4. Lozgachev G.I. Synthesis of modal regulators on transfer function of the closed system. [Lozgachev G.I. Sintez modal'nyh reguljatorov po peredatochnoj funkcii zamknutoj sistemy]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and Remote Control*, 1995, no. 5, pp. 49–55.

5. Dylevskij A.V., Lozgachev G.I. Synthesis of linear control systems with a given characteristic polynomial. [Dylevskij A.V., Lozgachev G.I. Sintez linejnyh sistem upravlenija s zadannym harakteristicheskih polinomom]. *Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija — News of RAS. Theory and control systems*, 2003, no. 4, pp. 17–20.

6. Dylevskij A.V., Lozgachev G.I. Synthesis of modal control systems. [Dylevskij A.V., Lozgachev G.I. Sintez modal'nyh sistem upravlenija]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 1, pp. 103–109.

7. Dylevskij A.V., Lozgachev G.I., Maljutina V.S. Synthesis of finite-dimensional regulators for infinite-dimensional plants: a tutorial. [Dylevskij A.V., Lozgachev G.I., Maljutina V.S. Sintez konechnomernyh reguljatorov dlja beskonechnomernyh ob"ektov: uchebnoe posobie]. Voronezh: VSU, 2012, 298 p.

8. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Equations of mathematical physics. [Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1977, 736 p.

9. Andreev Ju.N. Control of finite-dimensional linear plants. [Andreev Ju.N. Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob"ektami]. Moscow: Nauka, 1976, 424 p.

10. Baker G., Graves-Morris P. Pade Approximants. [Bejker G., Grejvs-Morris P. Approksimacii Pade]. Moscow: Mir, 1986, 502 p.

Власова Ольга Олеговна, аспирант кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
Тел.: +7(473)220–87–15

Дылевский Александр Вячеславович, профессор кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, доктор технических наук, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: nefta@yandex.com

Vlasova Olga Olegovna, Post-graduate student of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: +7(473)220–87–15

Dylevskii Alexander Vyacheslavovich, Professor of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University, Doctor of engineering sciences, Voronezh, Russian Federation
E-mail: nefta@yandex.com