УДК 517.98

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛОВ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОПОЛОГИИ СКОРОХОДА

Д. А. Борзых

Национальный исследовательский университет,
Высшая школа экономики

Поступила в редакцию 12.01.2016 г.

Аннотация. В работе рассматривается широкий класс функционалов интегрального типа, определенных на пространстве Скорохода — пространстве функций, непрерывных справа и имеющих левосторонние пределы, на котором определена метрика специального вида. Такие функционалы возникают в предельных теоремах для случайных процессов. В статье доказана теорема о непрерывности таких функционалов при условии отсутствия атомов интегрирующей меры. В работе показано, что данное условие также является необходимым для справедливости доказываемой теоремы. Приведенные результаты обобщаются на случай функционалов многих переменных, определенных на прямом произведении пространств Скорохода с естественной топологией прямого произведения.

Ключевые слова: пространство Скорохода, функционал интегрального типа, функционал многих переменных, прямое произведение пространств Скорохода.

ON A CLASS OF FUNCTIONALS CONTINUOUS IN THE SKOROKHOD TOPOLOGY

D. A. Borzykh

Abstract. This paper considers a wide class of functionals of the integral type defined on the Skorokhod space — space of functions continuous to the right and having left-side limits, where determined metrics of a special form. Such functionals arise in limit theorems for random processes. In the article the theorem is proved on the continuity of these functionals in the absence of atoms of the integrating measure. It is shown that this condition is also necessary for the fairness of the theorem. The results are generalized to functionals of several variables, defined on the Cartesian product of the Skorokhod spaces with natural Cartesian product topology.

Keywords: Skorokhod space, functional of integral type, functionals of several variables, Cartesian product of Skorokhod spaces.

ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1], [2], [3], [4], [5] возникают функционалы, определенные на пространстве Скорохода. В частности работе [3] в рассматриваются функционалы вида

$$f\colon \mathbf{D}[0;T] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int\limits_{[0;T]} \varphi(s,x(s))\,ds,$$

где $\mathbf{D}[0;T]$ — пространство Скорохода, а $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — ограниченная гладкая функция. При этом непрерывность таких функционалов на всем пространстве Скорохода не анализируется, поскольку для целей работы [3] достаточно непрерывности этих функционалов только на подмножестве, состоящем из непрерывных функций. Тем не менее, вопрос о непрерывности таких функционалов на всем пространстве Скорохода остается открытым. В предлагаемой вниманию статье приведено условие, при котором функционалы более общего вида $f\colon [0;T] \times (\mathbf{D}[0;T])^k \to \mathbb{R}$,

$$f(t, x_1, \dots, x_k) = \Psi\Bigg(t, \int\limits_{[0;T]} \varphi(s, x_1(s), \dots, x_k(s))\, y(s)\, d\mu(s)\Bigg),^{1)}$$

являются непрерывными в топологии прямого произведения метрических пространств $[0;T] \times (\mathbf{D}[0;T])^k$. Этим условием является отсутствие атомов интегрирующей меры μ.

1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь мы приводим только необходимые сведения о пространстве Скорохода. Более полную информацию можно найти в книгах [6], [7].

Обозначим через $\mathbf{D}[0;T]$ — множество функций $x\colon [0;T] \to \mathbb{R}$, непрерывных справа и имеющих пределы слева.

Пусть Λ — множество всех непрерывных строго возрастающих функций $\lambda\colon [0;T] \to [0;T]$, для которых $\lambda(0) = 0$ и $\lambda(T) = T$.

На множестве $\mathbf{D}[0;T]$ введем метрику $d\colon \mathbf{D}[0;T] \times \mathbf{D}[0;T] \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \Big\{ \max\Big(\sup_{t\in[0;T]} |x(t) - y(\lambda(t))|,\ \max_{t\in[0;T]} |t - \lambda(t)| \Big) \Big\},$$

которая называется *метрикой Скорохода*. При этом полученное метрическое пространство $(\mathbf{D}[0;T], d)$ называется *пространством Скорохода*, а топология, порожденная метрикой d, — *топологией Скорохода*.

Лемма 1. *Пусть последовательность функций $x_n \in \mathbf{D}[0;T]$ сходится к функции $x \in \mathbf{D}[0;T]$ в метрике d. Тогда найдется последовательность функций $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Lambda$, такая, что при $n \to \infty$:*

$$\sup_{t\in[0;T]} |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| \to 0, \tag{1}$$

$$\max_{t\in[0;T]} |t - \lambda_n(t)| \to 0. \tag{2}$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из определения метрики d и определения точной нижней грани. ■

Учитывая, что функции x из пространства $\mathbf{D}[0;T]$ удовлетворяют условию $\sup_{t\in[0;T]} |x(t)| < \infty$ (см., например, [6], гл. 3, § 14, стр. 154), на множестве $\mathbf{D}[0;T]$ может быть введена норма $\|x\| = \sup_{t\in[0;T]} |x(t)|$, не связанная с введенной выше метрикой d.

Лемма 2. *Если последовательность функций $x_n \in \mathbf{D}[0;T]$ сходится к функции $x \in \mathbf{D}[0;T]$ в метрике d, то*

$$\big(\exists C > 0\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big[\|x_n\| \leqslant C\big].$$

---

1) Условия на функции Ψ, φ, y и меру μ описаны в теореме 3.

Доказательство. В силу предыдущей леммы найдется такая последовательность функций $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Lambda$, для которой выполнены условия (1) и (2). Учитывая, что сходящаяся числовая последовательность (1) является ограниченной, для некоторого числа $C_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\bigl(\forall n \in \mathbb{N}\bigr)\Bigl[\sup_{t\in[0;T]} |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| \leqslant C_0\Bigr].$$

Следовательно, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0;T]$ имеет место оценка

$$|x_n(t)| - |x(\lambda_n(t))| \leqslant |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| \leqslant C_0,$$

из которой вытекает соотношение $|x_n(t)| \leqslant C_0 + |x(\lambda_n(t))| \leqslant C_0 + \|x\|$, доказывающее утверждение леммы. ■

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть на σ-алгебре $\mathcal{M}$ измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0;T]$ задана конечная мера μ, не содержащая атомов. Тогда, если функция $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $y\colon [0;T] \to \mathbb{R}$ интегрируема относительно меры μ, то функционал*

$$f\colon \mathbf{D}[0;T] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int\limits_{[0;T]} \varphi(t,x(t))\, y(t)\, d\mu(t), \tag{3}$$

является непрерывным в топологии Скорохода.

Доказательство. Пусть x — произвольная функция из пространства $\mathbf{D}[0;T]$, а $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность функций из пространства $\mathbf{D}[0;T]$, сходящаяся к x в метрике d. Покажем, что $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$. В силу свойств интеграла Лебега справедлива оценка

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(x)| &\leqslant \int\limits_{[0;T]} |\varphi(t,x_n(t)) - \varphi(t,x(t))|\, |y(t)|\, d\mu(t) \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{\int\limits_{[0;T]} |\varphi(t,x_n(t)) - \varphi(t,x(\lambda_n(t)))|\, |y(t)|\, d\mu(t)}_{=:I_n} + \\ &\qquad + \underbrace{\int\limits_{[0;T]} |\varphi(t,x(\lambda_n(t))) - \varphi(t,x(t))|\, |y(t)|\, d\mu(t)}_{:=J_n},\end{aligned}$$

в которой $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, участвующая в лемме 1.

Покажем по отдельности, что каждый из двух интегралов I_n и J_n в правой части предыдущего неравенства сходятся к нулю при $n \to \infty$.

1) В силу леммы 2 существует такая константа $C > 0$, для которой при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $\|x_n\| \leqslant C$ и $\|x\| \leqslant C$. По теореме Кантора непрерывная на компактном множестве $[0;T] \times [-C;C]$ функция $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на этом множестве, т. е.

$$\begin{aligned}&\bigl(\forall \varepsilon > 0\bigr)\bigl(\exists \delta > 0\bigr)\bigl(\forall t_1, t_2 \in [0;T]\bigr)\bigl(\forall z_1, z_2 \in [-C;C]\bigr) \\ &\qquad\Bigl[\Bigl(|t_1 - t_2| < \delta \text{ и } |z_1 - z_2| < \delta\Bigr) \Rightarrow |\varphi(t_1, z_1) - \varphi(t_2, z_2)| < \varepsilon\Bigr].\end{aligned} \tag{4}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из соотношения (1) следует, что для указанного в условии (4) числа δ найдется такой номер N, что при $n \geqslant N$ выполнено неравенство $\sup_{t\in[0;T]} |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| < \delta$. Отсюда, а также из соотношения (4) получаем, что

$$\big(\forall n \geqslant N\big)\big(\forall t \in [0;T]\big)\Big[|\varphi(t,x_n(t)) - \varphi(t,x(\lambda_n(t)))| < \varepsilon\Big].$$

Следовательно, при $n \geqslant N$ для интегралов I_n справедлива оценка

$$\int\limits_{[0;T]} |\varphi(t,x_n(t)) - \varphi(t,x(\lambda_n(t)))|\,|y(t)|\,d\mu(t) \leqslant \int\limits_{[0;T]} \varepsilon\cdot|y(t)|\,d\mu(t) = \varepsilon\cdot \underbrace{\int\limits_{[0;T]} |y(t)|\,d\mu(t)}_{<\infty},$$

которая означает сходимость $I_n \to 0$ при $n \to \infty$.

2) Как известно (см., например, [6], гл. 3, § 14, стр. 154), множество E точек разрыва функции x, принадлежащей множеству $\mathbf{D}[0;T]$, является не более чем счетным. Следовательно, в силу отсутствия атомов меры μ справедливо равенство $\mu(E) = 0$. Не ограничивая общности можно считать, что интегрируемая относительно меры μ функция y является определенной всюду и всюду конечной. Значит, в силу предельного соотношения (2) для точек $t_0 \in [0;T]\setminus E$ имеет место сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi(t_0,x(\lambda_n(t_0))) - \varphi(t_0,x(t_0))|\,|y(t_0)| = 0.$$

Это означает, что при $n \to \infty$ последовательность подынтегральных функций $\psi_n(t) := |\varphi(t,x(\lambda_n(t))) - \varphi(t,x(t))|\,|y(t)|$ в интегралах J_n μ-(п. в.) сходится к нулю.

Кроме этого, последовательность подынтегральных функций $\psi_n(t)$ имеет μ-интегрируемую мажоранту:

$$|\psi_n(t)| \leqslant 2 \max_{(t,z)\in[0;T]\times[-C;C]} |\varphi(t,z)|\cdot|y(t)|.$$

Стало быть, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $J_n \to 0$ при $n \to \infty$. ■

Замечание. Следующий пример, показывает, что в доказанной теореме нельзя отказаться от условия отсутствия атомов меры μ. В самом деле, рассмотрим функционал

$$f\colon \mathbf{D}[0;1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int\limits_{[0;1]} x(t)\,d\mu(t), \tag{5}$$

где $\mu(A) = \delta_{1/2}(A)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $1/2$ и заметим, что несмотря на то, что последовательность функций $x_n(t) = \mathbb{I}_{[0;1/2+1/n)}(t)$ сходится к функции $x(t) = \mathbb{I}_{[0;1/2)}(t)$ в топологии Скорохода (см., [6], гл. 3, § 14, стр. 157), последовательность $f(x_n) = 1$ не сходится к $f(x) = 0$ при $n \to \infty$. Значит, функционал (5) не является непрерывным в топологии Скорохода.

Теперь перейдем к обобщениям приведенного выше результата. На прямом произведении $(\mathbf{D}[0;T])^k = \mathbf{D}[0;T]\times\ldots\times\mathbf{D}[0;T]$ метрических пространств $\mathbf{D}[0;T]$ определим метрику обычным способом:

$$d_{(\mathbf{D}[0;T])^k}((x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_k)) := \max_{j=1,\ldots,k} d(x_j,y_j).$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть на σ-алгебре $\mathcal{M}$ измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0;T]$ задана конечная мера μ, не содержащая атомов. Тогда, если функция $\varphi\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $y\colon [0;T] \to \mathbb{R}$ интегрируема относительно меры μ, то функционал $f\colon (\mathbf{D}[0;T])^k \to \mathbb{R}$,*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \int\limits_{[0;T]} \varphi(t, x_1(t), \ldots, x_k(t))\, y(t)\, d\mu(t),$$

является непрерывным в топологии пространства $(\mathbf{D}[0;T])^k$, порожденной метрикой $d_{(\mathbf{D}[0;T])^k}$.

Мы не стали здесь приводить доказательство этой теоремы, поскольку с очевидными изменениями оно повторяет обоснование теоремы 1. Непосредственным следствием теоремы 2 является следующий факт.

Теорема 3. *Если выполнены все условия теоремы 2 и функция $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна, то функционал*

$$f\colon [0;T] \times (\mathbf{D}[0;T])^k \to \mathbb{R}, \qquad f(t, x_1, \ldots, x_k) = \Psi\Bigg(t, \int\limits_{[0;T]} \varphi(s, x_1(s), \ldots, x_k(s))\, y(s)\, d\mu(s)\Bigg),$$

является непрерывным относительно естественной топологии прямого произведения пространств $[0;T] \times (\mathbf{D}[0;T])^k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булычева, О. Г. О дифференцируемости математических ожиданий функционалов от винеровского процесса / О. Г. Булычева, А. Д. Вентцель // ТВП. — 1989. — Т. 34, вып. 3. — С. 565–568.

2. Вентцель, А. Д. Инфинитезимальные характеристики марковских процессов в функциональном пространстве, описывающих прошлое / А. Д. Вентцель // ТВП. — 1985. — Т. 30, вып. 4. — С. 625–639.

3. Вентцель, А. Д. Уточнение функциональной центральной предельной теоремы для стационарных процессов / А. Д. Вентцель // ТВП. — 1989. — Т. 34, вып. 3. — С. 451–464.

4. Pang, G. Martingale Proofs of Many-Server Heavy-Traffic Limits for Markovian Queues / G. Pang, R. Talreja, W. Whitt // Probability Surveys. — 2007. — V. 4. — P. 193–267.

5. Pang, G. Continuity of a queueing integral representation in the M_1 topology / G. Pang, W. Whitt // Annals of Applied Probability. — 2010. — V. 20, № 1. — P. 214–237.

6. Биллингсли, П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М. : Наука, 1977. — 352 с.

7. Жакод, Ж. Предельные теоремы для случайных процессов / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматлит, 1994. — Т. 1. — 544 с.

REFERENCES

1. Bulcheva O.G., Vent-Tsel' A.D. Differentiability of Expectations of Functionals of a Wiener Process. [Bulcheva O.G., Ventcel' A.D. O differenciruemosti matematicheskih ozhidanij funkcionalov ot vinerovskogo processa]. *Teoriya veroyatnostej i eyo primeneniya — Theory of Probability and its Applications*, 1989, vol. 34, no. 3, pp. 565–568.

2. Vent-Tsel' A.D. Infinitesimal Characteristics of Markov Processes in a Function Space which Describes the Past. [Ventcel' A.D. Infinitezimal'nye harakteristiki markovskih processov

v funkcional'nom prostranstve, opisyvauschih proshloe]. *Teoriya veroyatnostej i eyo primeneniya — Theory of Probability and its Applications*, 1985, vol. 30, no. 4, pp. 625–639.

3. Vent-Tsel' A.D. Refinement of the Functional Central Limit Theorem for Stationary Processes. [Ventcel' A.D. Utochnenie funkcional'noj central'noj predel'noj teoremy dlya stacionarhyh processov]. *Teoriya veroyatnostej i eyo primeneniya — Theory of Probability and its Applications*, 1989, vol. 34, no. 3, pp. 451–464.

4. Pang G., Talreja R., Whitt W. Martingale Proofs of Many-Server Heavy-Traffic Limits for Markovian Queues. Probability Surveys, 2007, vol. 4, pp. 193–267.

5. Pang G., Whitt W. Continuity of a queueing integral representation in the M_1 topology. Annals of Applied Probability, 2010, vol. 20, no. 1, pp. 214–237.

6. Billingsley P. Convergence of probability measures. [Billingsli P. Shodimost' veroyatnostnyh mer]. Moscow: Nauka, 1977, 352 p.

7. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes. [Zhakod Zh., Shiryaev A. N. Predel'nye teoremy dlya sluchajnyh processov]. Moscow: Fizmatlit, 1994, vol. 1, 544 p.

Борзых Дмитрий Александрович, старший преподаватель департамента прикладной экономики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшей школы экономики», Москва, Российская Федерация
E-mail: dborzykh@hse.ru

Borzykh Dmitriy Alexandrovich, Senior Lecturer of Department of Applied Economics of Faculty of Economic Sciences in National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation
E-mail: dborzykh@hse.ru